506.95
.A215

Pubblicazione bimensile. *Roma 7 gennaio 1906.* **N. 1.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 gennaio 1906.

Volume XV.° — Fascicolo 1°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

19593

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

195931

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 gennaio 1906.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Geologia. — *La Rovina delle Rocche di S. Pietro a Porto Venere.* Nota del Socio G. Capellini.

Sei anni or sono, in una mia Nota: *La rovina della Piana del Soldato a Porto Venere* [1], annunziavo che la stessa sorte era riservata alle pittoresche masse rocciose che si ammiravano sulla destra di chi attraversava la piazza *Lazzaro Spallanzani*, per recarsi a visitare il grazioso monumentale tempietto di S. Pietro.

Quel complesso di strati di calcare compatto e schistoso grigio cupo, indicato col nome di *Rocche di S. Pietro*, era ricercato dai pittori e dai naturalisti; i primi per ritrarne le bizzarre forme, i secondi per raccogliervi fossili dell' interessante piano retico, pei quali fin dal principio del secolo passato furono particolarmente ricordati gli scogli dei dintorni di Porto Venere.

Spallanzani non vi aveva notato avanzi fossili, perchè mentre era a Porto Venere si interessava più specialmente degli animali marini, e ricordava ancor troppo la ricchezza di fossili del calcare del Finale; il geologo Cordier invece ve ne scoprì e pel primo li segnalò nei 1811.

Nel 1830, Guidoni confermò quella scoperta informandone Paolo Savi e, un anno dopo, Hoffmann raccolse ricca messe paleontologica negli scogli

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Cl. di sc. fis. mat. e nat. vol. IX, 2° sem. 1900.

di Porto Venere, e più tardi descrisse quei fossili del calcare nero riferendoli al Lias.

Pilla visitò il Golfo della Spezia nel 1844, ma solamente nel 1847 fece conoscere alla Società geologica di Francia come egli interpretava la vera posizione stratigrafica e cronologica del calcare nero fossilifero e, in quella memoria e nel suo trattato di Geologia, per la prima volta è menzionata la *Grotta dell'Arpaia.*

Nella seconda metà del secolo passato i lavori di Savi, di Meneghini e di Cocchi, nonchè le mie pubblicazioni sulla geologia dei dintorni della Spezia resero celebre la Grotta dell'Arpaia e quegli scogli furono più frequentemente visitati da naturalisti e da curiosi.

Le Rocche di S. Pietro coronavano la Grotta dell'Arpaia, erano pittoresche se si ammiravano dalla piazza o dall'alto, imponenti e minacciose apparivano viste dal mare. La discesa negli scogli dell'Arpaia, per arrivare alla piccola grotta lambita dal mare e accessibile soltanto in giorni di perfetta calma, già un tempo difficile e pericolosa, in seguito era stata resa agevole per attirarvi visitatori; ma il mare continuava l'opera sua demolitrice, battendo in breccia la base delle Rocche di S. Pietro, particolarmente quando imperversava il libeccio.

Dopo la pubblicazione della ricordata Nota nella quale dichiarai esplicitamente che la rovina era inevitabile e che occorreva di provvedere per prevenire disastri, per ordine governativo fu murato il cancello posto a capo della scaletta che, improvvidamente, era stata costruita per condurre forastieri al piccolo antro. Ma i ragazzi passavano per le fratture delle Rocche e attraverso il cancello, coloro che si recavano alla *Vista da S. Pietro* non si rendevano conto del grave pericolo che correvano andando anche alla *Vistetta presso le Rocche*, e si arrampicavano sopra quei massi per farsi fotografare; solamente dal mare si poteva vedere come le Rocche erano erose e minate alla base, sicchè le mie previsioni non avrebbero tardato ad avverarsi.

Mi ero accorto che quel complesso stratigrafico, basato sopra lo strato di calcare compatto con *Plicatula intusstriata* che forma il tetto della Grotta Arpaia, aveva cominciato a piegare dal lato del mare, staccandosi dalla sua base; avvertii allora che presto le Rocche sarebbero scivolate e precipitate.

Malgrado i miei avvertimenti, nel mese di settembre ultimo scorso una comitiva di dame e cavalieri, per la maggior parte forestieri ma alcuni dimoranti a Porto Venere e non ignari delle mie predizioni e del pericolo che andavo avvertendo che si faceva sempre più grave e imminente, si arrampicarono e si disposero artisticamente sopra e attorno alle Rocche di S. Pietro per farsi fotografare.

Nell'ottobre visitai ancora le ormai famose Rocche in compagnia del prof. Morini, ma al collega ed amico non permisi di avvicinarsi, e meno ancora di avanzarsi fino al muretto d'onde si godeva la vista dell'aperto

mare; avevo osservato che le Rocche si erano staccate maggiormente dalla base, ero atterrito dal presentimento che il disastro poteva avvenire da un momento all'altro.

Tornato a Bologna in novembre, fui informato di violenti tempeste, di furiose libecciate, ma presto tornò la calma e non si poteva affatto sospettare che le Rocche di S. Pietro sarebbero precipitate prima del nuovo anno; speravo di rivederle, speravo di farle ancora fotografare per serbarne ricordo, poichè ormai avevo rinunziato a cercarvi fossili.

Il 9 dicembre il mare era calmo, l'aria tranquilla e tiepida come in una bella giornata di primavera, col vaporetto che arriva alle 13 circa sbarcavano parecchi forastieri per recarsi a visitare i monumenti e le curiosità dell'antico borgo, quando alle 13,15′ un rumor cupo e una piccola scossa avvertita, questa, soltanto delle case vicine a S. Pietro, avvisava del franamento delle Rocche.

Per fortuna in quell'ora il luogo era deserto; a qualche distanza sulla piazza Spallanzani qualche donnicciola e un ragazzo che per l'impeto dell'aria commossa si ebbe asportato in mare il berretto e fuggì atterrito recando la triste novella. I forastieri andando a S. Pietro più non trovarono le famose Rocche, bensì una pericolosa frana che minaccia ancora altre rovine.

Il denudato strato di calcare con Plicatule e Rinconelle forma provvisoriamente una bella spianata dalla quale, in estate, si potranno contemplare melanconicamente i rosei tramonti, i quali col picco dolomitico del Muzzerone ricordano perfettamente lo spettacolo del Sole a mezzanotte al Capo Nord. Le tempeste degli ultimi mesi dello scorso anno, le violenti piogge dell'autunno, le continue mine che da qualche tempo si fanno esplodere nella riattivata cava di pietre, detta di Carlo Alberto, all'isola Palmaria a breve distanza dalla Punta di S. Pietro, tutto deve aver contribuito ad affrettare ciò che ormai era inevitabile.

La fotografia che ho sopra accennata, fatta dal sig. Codevilla di Genova, nella quale si contano più di trenta persone arrampicate e poggiate contro le Rocche di S. Pietro ricorderà il gravissimo pericolo al quale scampò quella lieta comitiva, l'immane disastro che poteva far registrare tra i dì nefasti la frana spaventevole, la fiducia che si dovrebbe avere negli studî accurati e diligenti degli *Scrutatori del sotterraneo mondo!*

Matematica. — *Sulle differenze finite.* Nota del Corrispondente G. Peano.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Intorno al calcolo della rifrazione astronomica, senza speciali ipotesi sul modo di variare della temperatura dell'aria coll'altezza.* Nota del Corrispondente P. Pizzetti.

Cristallografia. — *La trasformazione delle coordinate dei cristalli.* Nota del Corrispondente C. Viola.

Matematica — *Sur le développement en fraction continue de la fonction* Q *de M. Prym.* Nota di Niels Nielsen, presentata dal Socio U. Dini.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore* (1). Nota del dott. R. Magini, presentata dal Corrispondente Battelli.

1. È noto che la densità elettrica sulle armature di un condensatore non ha dappertutto lo stesso valore, e che, mentre può ritenersi come costante nelle loro parti centrali, essa tende a prendere dei valori tanto più grandi, quanto più i punti considerati sono prossimi agli orli che limitano la superficie delle armature. Conseguentemente, quando si voglia desumere dal calcolo la capacità elettrostatica di un condensatore, tenendo conto soltanto delle sue dimensioni, occorre esaminare e valutare la perturbazione prodotta dagli orli nella distribuzione elettrica dei conduttori; altrimenti il valore così ricavato risulta inferiore, e non poco, a quello dato dall'esperienza. Le formole comuni, supponendo costante la densità, esprimono solo la capacità corrispondente ad una distribuzione puramente immaginaria, e non possono, al contrario, rappresentare più esattamente la cosa, se non quando si prendano per le dimensioni del condensatore dei valori più grandi di quelli reali, ed in modo tale che l'aumento delle dimensioni compensi, con la supposta densità uniforme, l'aumento effettivo della densità in vicinanza degli orli e sugli orli.

In varî lavori (2) eseguiti in questo Istituto di Fisica, si è presentata più volte la necessità di tener conto di questa influenza degli orli; e la

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Pisa.

(2) Cfr. Battelli e Magri, *Sulle scariche oscillatorie*, N. Cimento, S. V, vol. III, 1902.

incertezza riscontrata sull'argomento ha suggerito in quei casi l'idea di farne uno studio sistematico e, possibilmente, completo.

Mi propongo in questa Nota, come pure in quella che seguirà sull'influenza sopra un condensatore munito o no di anello di guardia, di fare una disamina preliminare delle varie e più importanti soluzioni e formole proposte per il calcolo della capacità. E ciò nell'intento di liberare il lavoro sperimentale da inutili esperienze di controllo, e di ricavare alcune leggi o suggerire alcuni artifici, da verificare od usare nella parte sperimentale, di cui questa Nota e la successiva cercano di essere la direttiva.

2. Il primo ad occuparsi di questa perturbazione fu Cavendish (1), cui il confronto fra le capacità di condensatori di eguale area, ma di differente contorno, consigliò subito l'espediente dell'aggiunta di una *striscia addizionale* avvolgente l'intero orlo. Egli però non si preoccupò di cercare le relazioni intercedenti fra la larghezza della striscia, e le dimensioni e forma del condensatore. Ciò venne in seguito fatto da Maxwell (2), che nel capitolo sulle funzioni coniugate e negli esempi successivi, studiò in *Electricity and Magnetism* molto estesamente il problema, e dette le soluzioni di parecchi casi. Clausius (3) suggerì una soluzione assai esatta del caso importante — come quello che capita spesso nella pratica — di un condensatore formato da due dischi finiti, circolari, di cui la grossezza sia piccolissima rispetto alla loro distanza. Questa restrizione fu rimossa dal Kirchhoff (4) che si propose di risolvere per altra via il caso di un condensatore circolare con o senza anello di guardia, tenendo nel debito conto la grossezza dei dischi. Il metodo da lui usato è quello già indicato da Helmholtz e fondato sulle funzioni di variabile complessa; questo metodo, se unito all'altro notissimo di Schwarz e Christoffel per la rappresentazione di una porzione di un piano limitata da linee rette sopra un'altra, permette appunto di introdurre nel calcolo la grossezza finita del piatto.

I. I. Thomson e G. F. C. Searle (5) d'altra parte studiarono in un loro importante lavoro, per mezzo delle trasformazioni schwarziane prima, dell'esperienza poi, la correzione da introdursi nel calcolo della capacità di un condensatore cilindrico munito di anelli di guardia. Lo stesso Thomson (6), dedicò un intero capitolo di *Notes on Recent researches* ecc. alla trattazione dell'influenza degli orli, esponendo elegantemente, mediante le suddette trasformazioni, i risultati già ottenuti da Maxwell, ed altri ancora.

(1) The elect. researches of the Hon. Hr. Cavendish, F. R. S. 1771-81; F. R. S. Cambridge Univ., 1879, pag. 144.

(2) Maxwell, *Electricity and Magnetism.*

(3) Pogg. Ann., Bd. 86.

(4) Monatsber. der Akad. d. Wiss. zu Ber., v. 15, 1877.

(5) *Sulla determinazione di « v »* ecc. Phil Trans., A. 1890.

(6) I. I. Thomson, *Recent Researches in Electricity and Magnetism,* cap. III.

Anche altri fisici si occuparono incidentalmente di questo argomento; sono da citare, fra essi, O. I. Lodge e R. T. Glazebrook [1], che modificarono leggermente la più semplice formola di Maxwell in seguito ad analogie acustiche (cfr. Rayleigh, *Suono*, v. II, §§ 307, 314).

In questi ultimi tempi poi, sono comparsi due lavori di Boulgakoff [2] sulla teoria del condensatore piano. Egli ha studiato un condensatore che ha delle parti piane ed è formato da due ellissoidi di rivoluzione appiattiti nelle parti affacciate e coassiali, caricati di quantità eguali d'elettricità e di segno opposto. Le superficie equipotenziali sono state calcolate dall'autore e possono servire per la forma di un condensatore reale.

3. Un condensatore adatto alla verifica dei calcoli teorici dovrà essere anzitutto ad isolamento d'aria per rimuovere, il più possibile, la dispersione; inoltre, sarà bene che esso abbia anche una curvatura costante lungo il contorno, od almeno sufficientemente grande in ogni suo punto, e che di più il contorno stesso sia privo di parti rientranti. A tal fine è consigliabile di adoperare un condensatore piano a contorno circolare od ellittico, scartando *a priori* il contorno rettangolare, in cui l'influenza dei vertici si unirebbe a quella degli orli. Queste condizioni sarebbero soddisfatte anche dal condensatore cilindrico; però, a parte l'assai più grande difficoltà di costruzione esatta e scrupolosa ed il concorso di parecchie cause di errore, quali la mancanza di coincidenza fra gli assi dei due cilindri, la ellitticità delle sezioni trasversali ecc., il condensatore circolare od ellittico è sempre preferibile come quello che possiede, a parità di capacità, un contorno non piccolo, e che permette di essere più facilmente maneggiato, nonchè facilmente modificato nella grandezza, nello spessore e nella posizione di un piatto rispetto all'altro o agli altri piatti.

La grossezza del condensatore circolare dovrà essere supposta tale da impedire ogni deformazione del disco sospeso. Per fissare le idee e per rendersi conto delle correzioni da introdurre, si supporrà che questo disco abbia un raggio di cm. 15 ed una grossezza di cm. 0,5.

4. Si prendano anzitutto a considerare le formole di Maxwell, e s'incominci dalla più semplice:

$$\lambda = \frac{d}{\pi} \log_e 2 , \tag{1}$$

dove λ è la larghezza della « striscia addizionale » e d la distanza di due grandi piatti paralleli, fra i quali è posto un terzo piatto che dista egualmente dagli altri due. I due grandi piatti sono supposti al potenziale **V** ed il conduttore intermedio al potenziale zero, oppure inversamente. La formola vale tanto per un contorno rettilineo, quanto per uno curvilineo, di cui il

[1] Cambridge, Phil. Trans., v. 18, 1899.

[2] Giorn. della Soc. Fis. Chim. russa, f. 6, 1902; f. 17, 1904.

raggio di curvatura in ogni punto sia grande rispetto alla distanza dei piatti. Applicando quindi la (1) ad un disco circolare di raggio R, si ha subito per la capacità corretta C del disco:

$$C = \frac{R^2}{2d} + \frac{2\pi R\lambda}{2\pi d} = \frac{R^2}{2d} + \frac{R}{\pi}\log_e 2 . \tag{2}$$

Ora, mentre dalla (1) risulta che l'influenza dell'orlo (che deve appunto valutarsi dalla larghezza della striscia addizionale anzichè dalla correzione della capacità) è proporzionale a d, si vede dalla (2) che la correzione è una costante rispetto alla distanza e alla grossezza dei dischi, il che non è invece molto verosimile.

Più corrette della (1) e quindi della (2), sono le altre due espressioni per la capacità, date da Maxwell (loc. cit., § 200) per un disco circolare, e cioè:

$$C_1 = \frac{R^2}{2d} + \frac{R}{\pi}\log_e 2 + \frac{1}{4}d , \tag{3}$$

$$C_2 = \frac{R^2}{2d} + \frac{R}{\pi}\log_e 2 + \frac{1}{8}d - \frac{1}{\pi^2}\left(\log_e 2 - \frac{\pi}{2} + 1\right) d . \tag{4}$$

Sebbene per esse la correzione della capacità non sia più una costante rispetto a d, è facile mostrare che per distanze piccole, le espressioni (2), (3), (4) si equivalgono quasi perfettamente. Infatti è:

$$C_1 - C = 0{,}25\, d \quad ; \quad C_2 - C = 0{,}11260\, d \quad ; \quad C_1 - C_2 = 0{,}13739\, d ;$$

il che significa questo: che mentre l'uso della (2), p. es., introduce per il disco di raggio eguale a cm. 15 una correzione nella capacità equivalente ad una parte su 340, se $d =$ cm. 0,1, e ad una parte su 34 se $d =$ cm. 1; l'uso invece dell'una anzichè dell'altra fra le tre formole, non influisce rispettivamente che di una parte su 45000, o di una parte su 99911, o di una su 81884 se $d =$ cm. 0,1, e rispettivamente di una su 450, su 999, o su 818 parti se invece $d =$ cm. 2. Le divergenze incominciano quindi ad essere rilevanti solo per queste grandi distanze; ma allora nessuna più di quelle tre formole è sicuramente applicabile.

5. Di più, esse non tengono conto della grossezza b del disco centrale; anzi suppongono che essa sia trascurabile rispetto alla distanza fra i piatti. Infatti, se la grossezza fosse rilevante, d andrebbe evidentemente computato in modo diverso.

Della grossezza tiene invece conto l'altra formola data da Maxwell:

$$\lambda = \frac{d}{\pi}\log_e 2 \cos\frac{\pi b}{2d} , \tag{5}$$

valevole peraltro soltanto per un orlo arrotondato. Inoltre, dato il modo nel

quale essa suppone contata la distanza, deve essere forzatamente $b < d$. Ora invece capita spesso il caso in cui, non la distanza d fra i grandi piatti, ma la somma 2δ degli spazî d'aria esistenti fra essi ed il piatto centrale sia effettivamente minore della grossezza di questo. In tal caso si potrebbe, essendo allora $d - b = 2\delta$, dare alla (5) l'altra forma più appropriata:

$$\lambda = \frac{2\delta}{\pi} \log_e 2 \cos \frac{\pi b}{4\delta}, \tag{5'}$$

che presenta minori inconvenienti di quella di Maxwell. Ma, anche così trasformata, essa si riduce alla (1), ossia non tiene conto della grossezza, ogni volta che $2\delta = \frac{b}{4n}$, e non dice nulla quando $2\delta = \frac{b}{2n+1}$ e $\cos \frac{\pi b}{4\delta} < 0$. Inoltre, nè la (5), nè la (5') suppongono nulla del modo nel quale può esser fatto l'arrotondamento; e questa è un'altra ragione per dubitare che esse non rappresentino che molto genericamente il fenomeno.

Sarebbe anche facile mostrare che λ, cioè l'influenza dell'orlo, cresce con la distanza e, a parità di questa, diminuisce col crescere della grossezza. Ciò, s'intende, per uno stesso condensatore o per condensatori eguali. Infatti, scrivendo la (5) come segue:

$$\lambda = \frac{d}{\pi} \log_e 2 + \frac{d}{\pi} \log_e \cos \frac{\pi b}{2d},$$

basta notare che, posto $e < d$, il secondo termine varia in modo continuo ed è negativo, e quindi λ diminuisce per b crescente; e che è inoltre

$$\frac{\partial^3 \lambda}{\partial d^3} = \frac{\pi b^2}{4} \left(3d^2 \cos^{-2} \frac{\pi b}{2d} + \frac{b}{2d^4} \operatorname{sen} \frac{\pi b}{d} \right),$$

quantità essenzialmente positiva, sempre per $b < d$, e significante perciò che λ cresce con d.

6. Si consideri ora la formola data da Thomson [1] per l'orlo a sezione rettangolare, di grossezza b e valevole per un piatto a contorno rettilineo posto in mezzo a due grandi piatti situati ad una distanza d tra loro, come nei casi precedenti. Si ha allora, sostituendo e trasformando:

$$\lambda = \frac{d}{2\pi} \log_e \frac{2d - b}{b} + \frac{d - b}{2\pi} \log_e \frac{b(2d - b)}{(d - b)^2} \tag{6}$$

Questa espressione non si presta, così come è, ad una semplificazione, ne permette, derivandola, di vedere facilmente come cambi λ col variare di d e di b. Si chiami, come prima, δ la distanza fra il piatto di mezzo ed uno

[1] Loc. cit., § 237.

dei grandi piatti, contata fra le superficie piane affacciate; essendo b sempre la grossezza del piatto intermedio, avremo subito:

$$\delta = \frac{d-b}{2}, \text{ ossia: } d = 2\delta + b.$$

Sostituendo allora nella (6) si avrà:

$$\lambda = \frac{2\delta + b}{2\pi} \log_e \frac{4\delta + b}{b} + \frac{2\delta}{2\pi} \log_e \frac{b(4\delta + b)}{(2\delta)^2},$$

e questa può scriversi:

$$\lambda = \frac{\delta}{\pi}\left(\log_e \frac{4\delta + b}{b} + \log_e \frac{b(4\delta + b)}{(2\delta)^2}\right) + \frac{b}{2\pi} \log_e \frac{4\delta + b}{b}$$

ossia

$$\lambda = \frac{\delta}{\pi} \log_e \left(\frac{4\delta + b}{2\delta}\right)^2 + \frac{b}{2\pi} \log_e \frac{4\delta + b}{b},$$

ed infine

$$\lambda = \frac{2\delta}{\pi} \log_e \left(2 + \frac{b}{2\delta}\right) + \frac{b}{2\pi} \log_e \left(1 + \frac{4\delta}{b}\right). \tag{7}$$

Da questa formola risulta subito che se facciamo crescere o diminuire insieme δ e b nello stesso rapporto k, si ha per la striscia addizionale del nuovo condensatore il valore $k\lambda_1$, dove λ_1 è il valore di λ per il condensatore di confronto. In altre parole, se la (6) rappresenta realmente la entità dell'influenza esercitata dall'orlo sulla distribuzione elettrica, quest'influenza non può essere che proporzionale alla variazione contemporanea e simile *della grossezza* e *della distanza* del piatto mediano dagli altri due.

È facile, valendosi della (7), vedere come varia λ; infatti, se teniamo costante b, si scorge subito che il secondo termine del secondo membro cresce e diminuisce con δ; inoltre, anche il primo termine varia nella stessa guisa con δ, perchè, indicandolo con φ, si trova appunto:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} = \frac{2}{\pi}\left\{\log_e \left(2 + \frac{b}{2\delta}\right) - \frac{b}{4\delta + b}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2} = -\frac{2b}{\pi(4\delta + b)^2\,\delta}$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \delta^3} = \frac{2b(12\delta + b)}{\pi(4\delta + b)^3\,\delta^2}.$$

Quest'ultima quantità è essenzialmente positiva, perchè b e δ sono quantità esprimenti delle dimensioni; quindi φ è crescente con δ, ossia λ cresce col crescere della distanza.

Lo stesso procedimento può ripetersi per b, lasciando costante δ. Infatti i due termini del secondo membro hanno la stessa forma. Risulta quindi che l'influenza dell'orlo sulla capacità di un condensatore a bordo quadrangolare cresce e diminuisce col crescere e diminuire sia della grossezza, sia della distanza dei piatti.

Rispetto alla grossezza, l'orlo a sezione rettangolare si comporta quindi a rovescio di quello arrotondato (§ 5).

7. D'altra parte è da ritenersi che la (7) si possa applicare con sufficiente approssimazione ad un contorno curvilineo, purchè il raggio di curvatura sia in ogni suo punto assai grande in confronto della distanza fra i piatti. In tal caso, analogamente al procedimento tenuto da Maxwell nel § 196 per la formola (1), si può considerare quel contorno come sensibilmente rettilineo, e supporre che sul piatto accresciuto di una corona di larghezza λ, la densità sia uniforme ed eguale a quella effettivamente esistente nei punti della parte centrale, e quindi lontani dal contorno.

Per la capacità corretta di un condensatore circolare si avrà perciò, rammentando che lo spazio d'aria realmente esistente fra i piatti è 2δ e non d, e che $2\delta = d - b$:

$$(8) \qquad C = \frac{R^2\pi + 2\pi R\lambda}{2\pi(d-b)} = \frac{R^2}{4\delta} + \frac{R}{\pi}\left\{\log\left(2 + \frac{b}{2\delta}\right) + \frac{b}{4\delta}\log\left(1 + \frac{4\delta}{b}\right)\right\}.$$

Da quest'ultima espressione si vede che facendo $b = 0$, essa si riduce alla (2), come era da aspettarsi.

Inoltre, se b e δ cambiano nello stesso rapporto, il secondo termine del secondo membro, che è il termine di correzione per la influenza dell'orlo, resta immutato. Ciò vale evidentemente per contorni di eguale lunghezza ma di forma qualunque, purchè sia rispettata in ogni punto la condizione suesposta e relativa al raggio di curvatura. Per condensatori differenti che abbiano la stessa grossezza e la stessa distanza fra i piatti, o per i quali questi valori siano, respettivamente, proporzionali fra loro, il termine di correzione è pure proporzionale alla lunghezza del relativo contorno.

Applicando la (8) al condensatore circolare, per il quale $R =$ cm. 15, $b =$ cm. 0,5 e $\delta = 0{,}05$ si ha una correzione di cm. 10,571, che equivale all'aggiunta di una parte su 106. Se si fosse invece usata la (2), computando la distanza nel modo che sopra, si sarebbe aggiunta soltanto una parte su 340; mentre, supponendo di arrotondare l'orlo, e quindi di usare la (5'), essa non ci condurrebbe a nessun valore significativo per il termine di correzione cercato, perchè in tal caso, coi dati precedenti, troveremmo:

$$\log_e \cos\frac{\pi b}{4\delta} = \log_e \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\infty.$$

Per un altro disco circolare di cm. 0,1 di grossezza, di cm. 15 di raggio,

troveremmo per $\delta =$ cm. 0,2, applicando successivamente la (5), la (5′) e la (8), i seguenti valori per la correzione della capacità:

dalla (5): cm. 3,070, che equivale all'aggiunta di una parte su 91;
dalla (5′): cm. 2,931, equivalente all'aggiunta di una parte su 94;
dalla (8): cm. 6,494, che equivale all'aggiunta di una parte su 43.

Da quest' ultimo esempio si scorge quanto sia piccola la differenza fra i risultati ottenuti mediante la (5) e la (5′), e quanto sia invece rilevante quella fra i risultati precedenti e quello ricavato dalla formola (8). Il che, mentre conferma le considerazioni precedenti, consiglia di fare una verifica sperimentale per vedere se veramente la (8) sia la formola che meglio rappresenta la cosa, e per sapere con qual grado di precisione essa può venire applicata.

8. Una prima verifica della (8), come pure delle altre formole (1), (5), (5′), può essere fatta indipendentemente dalla conoscenza della capacità vera, e può servire a vedere se la (7) sia realmente applicabile ad un contorno curvilineo per il quale sia soddisfatta la condizione posta relativamente al raggio di curvatura; ed in caso affermativo, può anche farci sapere per quali valori non troppo piccoli della distanza, la (7) e le altre siano con sufficiente approssimazione applicabili.

Si supponga perciò di ritagliare da una stessa lastra metallica, perfettamente piallata o tornita su ambe le faccie, due dischi di area esattamente equivalente, di cui l' uno abbia contorno circolare, l'altro ellittico. Si controllino con lo sferometro e con ogni altro strumento di misura, e si formi con ciascuno di essi un condensatore da usare, occorrendo, anche con anelli di guardia. Indicando con l_e e l_c le lunghezze dei due orli, con R il raggio del disco circolare e con a e b i semiassi di quello ellittico, con δ la comune distanza contata nel solito modo, con λ la larghezza della striscia addizionale data da una qualunque delle formole precedenti, e con C_e e C_c le capacità corrette e relative ai due condensatori, sarà:

$$C_e = \frac{\pi ab + l_e \lambda}{4\pi\delta} \quad , \quad C_c = \frac{\pi R^2 + l_c \lambda}{4\pi\delta}$$

e

$$C_e - C_c = \frac{(l_e - l_c)\,\lambda}{4\pi\delta}\,.$$

Ora è:

$$l_e = 2\pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^3 - \dots \right\}$$

$$l_c = 2\pi R = 2\pi\sqrt{ab} = 2\pi a \sqrt[4]{1 - e^2},$$

e quindi:

$$(9) \qquad C_e - C_c = \frac{a}{2\delta}\left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^3 - \dots - \sqrt[4]{1 - e^2} \right\} \lambda$$

Detta k la capacità dell'elettrometro e dei fili di congiunzione fra esso e l'uno o l'altro condensatore; detto V il potenziale di carica; V_e, il potenziale assunto dall'elettrometro, dai fili e dal condensatore ellittico; V_c, il potenziale assunto dallo stesso elettrometro, dagli stessi fili e dal condensatore circolare; allora, se le formole in esame o soltanto alcune di esse esprimono con sufficiente esattezza le capacità dei condensatori, sarà:

$$C_e V = (C_e + k) V_e,$$
$$C_c V = (C_c + k) V_c,$$

dalle quali, sostituendo prima ai potenziali V, V_e, V_c le deviazioni $\Delta, \Delta_e, \Delta_c$ direttamente osservate all'elettrometro, e poi risolvendo e sottraendo, si avrà:

$$C_c - C_e = k \left(\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e} - \frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c} \right).$$

Questa espressione, se confrontata con la (9), dà subito:

$$\frac{a}{2\delta} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} e \right)^2 \cdots - \sqrt[4]{1 - e^2} \right\} \lambda = k \left(\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e} - \frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c} \right);$$

ma k è una costante, e quindi se le espressioni di λ sono esatte, deve esistere proporzionalità fra il termine in parentesi del secondo membro, che diremo Q, ed il primo membro, e ciò qualunque sia il valore di δ, purchè non eccessivamente grande. Ossia, dati due valori di δ, δ' e δ'', dovrà essere anche:

$$\frac{Q'\delta'}{Q''\delta''} = \frac{\lambda'}{\lambda''}.$$

In altra Nota esporrò altre considerazioni sull'influenza degli orli in un condensatore circolare, privo oppure munito di anello di guardia.

Fisica. — *Sulla radioattività dei fanghi termali depositati dalle acque degli Stabilimenti dei Bagni di Lucca (Toscana).* Nota del dott. G. Magri, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Sulla misura della velocità di propagazione delle perturbazioni sismiche in rapporto alla sismometria razionale.* Nota di V. Monti, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Per quanto la misura della velocità superficiale di propagazione delle perturbazioni sismiche sia sempre stata considerata come argomento pieno di difficoltà, queste appaiono tuttavia ancor più gravi di quanto si è finora, a ciò che mi consta, pensato, se i sismogrammi che servono di base alla misura vengano considerati da un punto di vista rigorosamente razionale.

Prendere i diagrammi forniti da due Osservatorî, scegliere in essi dei tratti corrispondenti, determinarne gl'istanti relativi ad assumere la differenza tra questi come uguale al tempo che una certa fase della perturbazione ha impiegato per propagarsi da un osservatorio all'altro, tutto ciò sarebbe abbastanza facile e logico se non fosse necessario alcun lavoro di riduzione per risalire dai sismogrammi al movimento vero del suolo, o se, quanto meno, le riduzioni relative ai due osservatorî si elidessero a vicenda.

Per mostrare che così non è, io considererò un caso particolare, che, per quanto si presenti subito con qualche complicazione, è il più semplice che si possa immaginare.

Si supponga una perturbazione tale che le particelle del suolo compiano delle vibrazioni orizzontali, rettilinee e parallele; la forza sia proporzionale allo spostamento, e le vibrazioni si vengano smorzando sotto l'azione di una resistenza proporzionale alla velocità.

Preso come asse delle x una retta parallela alla direzione delle vibrazioni, per una particella qualunque ha luogo, com'è noto, l'equazione differenziale

$$x'' + 2\varepsilon x' + n^2 x = 0\,, \tag{1}$$

essendo ε ed n due costanti, la prima delle quali dipende dalla resistenza che produce lo smorzamento. Supporremo $n > \varepsilon$, con che la (1) corrisponde ad un moto oscillatorio di ampiezza decrescente.

Supponiamo adesso che, nel luogo stesso dove ha luogo tutto ciò, si trovi un pendolo orizzontale funzionante secondo la direzione delle x. Come ha mostrato B. Galitzin [1], l'equazione differenziale del moto dello strumento si può scrivere nella forma

$$X'' + 2\varepsilon_1 X' + n_1 X + x'' = 0. \tag{2}$$

[1] C. R. de la Comm. Sismique permanente; St. Petersbourg, 1902, 1904.

Qui X è l'ordinata del diagramma corrispondente all'epoca t; ε_1 e n_1 sono due costanti dipendenti dallo smorzamento, dalle dimensioni e dalla figura del pendolo. Supporremo $n_1 > \varepsilon_1$, cosicchè le oscillazioni strumentali siano di ampiezza decrescente senza che abbia luogo l'aperiodicità. Queste corrispondono all'equazione differenziale

$$X'' + 2\varepsilon_1 X' + n_1 X = 0$$

il cui integrale generale è

$$X = Ae^{-\varepsilon_1 t} \operatorname{sen}(pt + a) \tag{3}$$

essendo

$$p = \sqrt{n_1^2 - \varepsilon_1^2}.$$

Per applicare alla (2) il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, scriviamo la (3) nella forma

$$X = C_1 e^{-\varepsilon_1 t} \operatorname{sen} pt + C_2 e^{-\varepsilon_1 t} \cos pt,$$

e, posto

$$Y_1 = e^{-\varepsilon_1 t} \operatorname{sen} pt$$
$$Y_2 = e^{-\varepsilon_1 t} \cos pt,$$

risolviamo il sistema delle due equazioni algebriche:

$$C_1' Y_1 + C_2' Y_2 = 0$$
$$C_1' Y_1' + C_2' Y_2' = -x''.$$

Viene

$$C_1' = -\frac{x''}{p} e^{\varepsilon_1 t} \cos pt \tag{4}$$

$$C_2' = \frac{x''}{p} e^{\varepsilon_1 t} \operatorname{sen} pt. \tag{5}$$

Per avere C_1 e C_2, occorre notare che, per $n > \varepsilon$,

$$x'' = e^{-\varepsilon t}(P \operatorname{sen} qt - Q \cos qt),$$

essendo P, Q, q costanti dipendenti da ε.
Allora:

$$C_1 = -\frac{1}{p}\left[P \int e^{mt} \operatorname{sen} qt \cos pt\, dt - Q \int e^{mt} \cos qt \cos pt\, dt\right]$$
$$C_2 = \frac{1}{p}\left[P \int e^{mt} \operatorname{sen} qt \operatorname{sen} pt\, dt - Q \int e^{mt} \cos qt \operatorname{sen} pt\, dt\right],$$

essendo $m = \varepsilon_1 - \varepsilon$. Fatte le operazioni indicate, e posto

$$p + q = h \quad ; \quad p - q = k;$$

$$\frac{Pm - Qh}{h^2 + m^2} = \alpha \; ; \; \frac{Ph + Qm}{h^2 + m^2} = \beta \; ; \; \frac{Pm + Qk}{k^2 + m^2} = \gamma \; ; \; \frac{Pk - Qm}{k^2 + m^2} = \delta$$

si ha per integrale generale della (2)

$$X = -\frac{e^{-\varepsilon t}}{2p}\Big\{\Big[\alpha \operatorname{sen} ht - \beta \cos ht - \gamma \operatorname{sen} kt + \delta \cos kt\Big] \operatorname{sen} pt + \\ + \Big[\beta \operatorname{sen} ht + \alpha \cos ht - \delta \operatorname{sen} kt - \gamma \cos kt\Big] \cos pt\Big\},$$

la quale, perchè per $t = 0$, $X = 0$, dà

$$\frac{1}{2p}(\alpha - \gamma) = 0,$$

ossia

$$\alpha = \gamma;$$

cosicchè

$$(6) \quad X = -\frac{e^{-\varepsilon t}}{2p}\Big\{\Big[\alpha(\operatorname{sen} ht - \operatorname{sen} kt) - \beta \cos ht + \delta \cos kt\Big] \operatorname{sen} pt + \\ + \Big[\beta \operatorname{sen} ht - \delta \operatorname{sen} kt + \alpha(\cos ht - \cos kt)\Big] \cos pt\Big\}.$$

La (6) mostra che il tracciato del pendolo orizzontale risulta dalla sovrapposizione di un certo numero di curve sinuose. Derivando la (6), ponendo uguale a 0 la derivata e risolvendo rispetto a t, si avrebbero le epoche dei massimi e dei minimi del tracciato, le quali, come si vede subito, vengono a dipendere da ε.

Così *le fasi del tracciato del pendolo orizzontale dipendono dal valore che lo smorzamento delle oscillazioni telluriche ha nel luogo dove il pendolo orizzontale si trova.*

Ne segue che se la perturbazione sismica si propaga dal punto considerato a un altro ove sia collocato un secondo pendolo orizzontale, e ove, per la diversa costituzione geologica del suolo, ε abbia un valore diverso dal primo punto, la rassomiglianza fra i tracciati dei due pendoli sarà puramente apparente e i loro massimi e minimi saranno spostati in modo differente rispetto ai massimi e minimi della perturbazione sismica. Nulla si potrà dedurre dal confronto dei due tracciati sulla velocità di propagazione delle diverse fasi della perturbazione sismica, perchè i due valori di ε sono, com'è evidente, ignoti.

L'unico modo possibile per arrivare alla conoscenza della detta velocità è quello di costituire degli Osservatorî geodinamici forniti di una combinazione di strumenti appropriati a risolvere il movimento del suolo in tre spostamenti paralleli ad una terna di assi coordinati ortogonali e nelle tre rotazioni intorno agli assi stessi per ogni istante della perturbazione; ricostruire sui tracciati di tali strumenti il moto vero del suolo, e paragonare finalmente la ricostruzione ottenuta in un Osservatorio con quella ottenuta in un altro.

A proposito di queste combinazioni di strumenti è noto che M. Contarini [1] e B. Galitzin [2] ne hanno proposte diverse, il primo partendo esclusivamente dagli strumenti già in uso, il secondo introducendone dei nuovi. Su tali proposte giova fare alcune osservazioni.

I. Benchè gli Autori insegnino il modo di determinare sperimentalmente le varie costanti da introdurre nelle equazioni differenziali relative al movimento di ciascuno strumento, col far oscillare lo strumento stesso in assenza di ogni perturbazione sismica, tuttavia l'attrito delle penne scriventi contro la carta avvolta sul tamburo (nel caso della registrazione meccanica) non si può determinare a questo modo perchè, come già notava il Contarini stesso, esso varia da punto a punto del tracciato. Lo stesso dicasi dell'effetto della tensione superficiale dell'inchiostro scendente dalle penne sulla carta. Per evitare l'introduzione nei calcoli di grandezze di cui non si sa precisare il valore, o, quanto meno, per ridurne l'importanza al minimo possibile, gioverebbe, se non si vuole ricorrere alla registazione fotografica, adottare il sistema di registrazione in uso nei Microsismografi Vicentini, che rende minimo l'attrito e sopprime l'effetto della tensione superficiale dell'inchiostro.

II. Lo stesso sistema di registrazione si raccomanda anche per l'estrema sottigliezza dei tracciati. È infatti questa una condizione indispensabile affinchè si possano fare delle misure di grande sensibilità sui tracciati stessi, come si richiedono per sapere quale funzione del tempo sia l'ordinata, e risalire quindi alle derivate prima e seconda di tale funzione, necessarie per le equazioni differenziali atte a fornire il moto vero del suolo.

III. È bene evitare l'uso di pendoli verticali troppo lunghi, perchè su questi può avere un'influenza perturbatrice l'elasticità degli alti fabbricati da cui pendono, come già notava il Burgatti [3]. Nè siffatta influenza si può misurare col fare oscillare il pendolo in assenza di ogni perturbazione sismica, perchè le onde elastiche che a questo modo si propagano dal punto d'attacco al fabbricato sono evidentemente diverse da quelle che, partendo dal suolo, arrivano, pel fabbricato, al punto d'attacco quando si verifichi una perturbazione sismica.

(1) Rend. dell'Acc. dei Lincei, 1901, 1902.

(2) Loc. cit.

(3) Rend. dell'Acc. dei Lincei, 1900.

Fisica terrestre. — *Risultati pireliometrici ottenuti dal 22 agosto a tutto giugno 1903 al R. Osservatorio Geofisico di Modena.* Nota di CIRO CHISTONI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Su taluni derivati del pirazolo* (1). Nota di GAETANO MINUNNI e G. LAZZARINI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

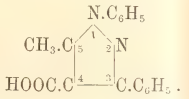
In una Nota (2) comunicata all'Accademia da uno di noi nella seduta del 5 novembre u. s., furono esposti sommariamente i risultati teorici delle ricerche da noi intraprese sull'azione dell'etere acetoacetico sui fenilidrazoni delle aldeidi aromatiche in presenza di cloruro di zinco. Questa reazione ha luogo fra una molecola di etere acetoacetico ed una molecola di idrazone con eliminazione di una molecola d'acqua e di due atomi di idrogeno. Il prodotto di condensazione, $C_{19}H_{18}O_2N_2$, che si ottiene dal benzalfenilidrazone secondo l'equazione:

$$C_{13}H_{12}N_2 + C_6H_{10}O_3 = C_{19}H_{18}O_2N_2 + H_2O + H_2$$

fu riconosciuto identico all'*etere etilico dell'acido 5-metil-1.3-difenilpirazol-4-carbonico* di Knorr e Blank (3).

In modo analogo procede la reazione con gli altri idrazoni finora studiati, cioè coi fenilidrazoni delle aldeidi nitrobenzoiche (meta e para) e dell'aldeide salicilica. In questa Nota ci proponiamo di descrivere brevemente le esperienze eseguite e le proprietà dei composti pirazolici ottenuti secondo il nuovo metodo sintetico. I composti derivanti dai nitrobenzalfenilidrazoni e dall'o-ossibenzalidrazone erano finora sconosciuti.

I. — *Acido 5-metil-1.3-difenilpirazol-4-carbonico,*



L'*etere etilico* di questo acido, ottenuto per la prima volta da L. Knorr ed A. Blank (4) per azione della fenilidrazina sull'etere acetbenzalacetico,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Sassari.

(2) Rendiconti, vol. XIV, 2° sem. 1905, 414.

(3) Berichte *18*, 932.

(4) Loc. cit.

si può preparare in modo più semplice per azione dell'etere acetoacetico sul benzalfenilidrazone. In un palloncino munito di canna ascendente si riscalda un miscuglio di 10 gr. di idrazone, 10 gr. di etere acetoacetico ed alcuni pezzetti di cloruro di zinco, per circa due ore a 125-130° in bagno di paraffina. Verso 110° l'idrazone incomincia a sciogliersi; contemporaneamente si inizia uno sviluppo di gas che diviene verso i 125° assai vivo. La reazione si mantiene intensa per circa mezz'ora, poi diminuisce rapidamente. Dopo il raffreddamento si ottiene una massa rossastra, semisolida, limpida ed amorfa, che a contatto dell'alcool si trasforma lentamente in una poltiglia di cristalli. Per la purificazione del prodotto conviene aggiungere alla massa ancora calda e fluida un egual volume di alcool e riscaldare fino ad avere una massa uniforme, la quale dopo circa 24 ore si trasforma in una densa poltiglia di cristalli. Si filtra, si lava ripetutamente alla pompa con alcool e si cristallizza dall'alcool caldo fino a punto di fusione costante.

La composizione della sostanza corrisponde a quella dell'etere etilico di un acido metildifenilpirazolcarbonico. Infatti:

I. gr. 0.2430 di sostanza fornirono gr. 0.1325 di acqua e gr. 0.6672 di anidride carbonica;

II. gr. 0.2297 di sostanza fornirono gr. 0.1257 di acqua e gr. 0.6304 di anidride carbonica;

III. gr. 0,2708 di sostanza diedero 21.9 cm^3 di azoto misurati alla pressione di 736.0 mm. ed alla temperatura di 14.5°;

IV. gr. 0.2442 di sostanza diedero 19.7 cm^3 di azoto misurati a 14.5° ed a 734 mm. di pressione.

In 100 parti:

	Calcolato per	Trovato			
	$C_{19}H_{18}O_2N_2$	I	II	III	IV
Carbonio	74.51	74.88	74.84	—	—
Idrogeno	5.88	6.06	6.08	—	—
Azoto	9.12	—	—	9.18	9.14

I risultati delle analisi, la solubilità del composto e la sua proprietà di fornire per saponificazione un acido, $C_{17}H_{14}O_2N_2$, fusibile a 194° dimostrano che il prodotto di condensazione è identico all'*etere etilico dell'acido 5-metil-1.3-difenilpirazol-4-carbonico* di Knorr e Blank. Una lieve discordanza fu osservata soltanto per il punto di fusione che fu trovato 110° da Knorr e Blank, mentre noi osservammo 105°. La temperatura non ha influenza sull'andamento della reazione sopra descritta; infatti, riscaldando il miscuglio di idrazone ed etere acetoacetico a 200-205° si ebbe lo stesso prodotto, ma con minore rendimento. In assenza del cloruro di zinco non avviene alcuna reazione nemmeno a temperature superiori ai 200°.

Per ottenere l'acido libero si riscalda l'etere a b. m. con potassa alcoolica al 10 % fino a tanto che la soluzione alcoolica non precipita più per aggiunta di acqua; impiegando 1 gr. di etere la reazione è completa dopo circa due ore di riscaldamento. Si diluisce con acqua, si acidifica con acido cloridrico diluito, si filtra, si lava il precipitato con acqua e si cristallizza dall'alcool a 50 %. La sostanza fondeva dopo ripetute cristallizzazioni a 193-194° con sviluppo di gas e presentava tutti i caratteri di solubilità descritti da Knorr e Blank per *l'acido 5-metil-1.3-difenilpirazol-4-carbonico.* I risultati dell'analisi confermarono l'identità.

I. gr. 0.2297 di sostanza diedero gr. 0.6192 di anidride carbonica e gr. 0.1047 di acqua;

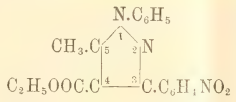
II. gr. 0.1720 di sostanza diedero 15,2 cm³ di azoto misurati a 15,5° ed a 744 mm. di pressione.

In 100 parti:

	Calcolato per $C_{17}H_{14}O_2N_2$	Trovato I	Trovato II
Carbonio	73.38	73.51	—
Idrogeno	5.04	5.06	—
Azoto	10.07	—	10.10

La saponificazione ha luogo anche per azione del sodio metallico sulla soluzione alcoolica bollente dell'etere; il prodotto della reazione fondeva esattamente a 193-194° con sviluppo di gas ed aveva tutte le proprietà dell'acido.

II. — *Acido 5-metil-1-fenil-3-(m-nitrofenil)-pirazol-4-carbonico.*



L'*etere etilico*, $C_{19}H_{17}O_4N_3$, si forma nella condensazione del m-nitrobenzalfenilidrazone con l'etere acetoacetico. Si riscalda un miscuglio di 10 gr. di m-nitroidrazone e 10 gr. di etere acetoacetico in presenza di cloruro di zinco per due ore a 130-135°, si diluisce la massa ancora calda con un egual volume di alcool e si versa in un bicchiere. Dopo alcune ore il tutto si rapprende in una poltiglia di cristalli. Si filtra alla pompa e si lava sul filtro ripetutamente con alcool fino ad avere una massa colorata leggermente in giallo; il prolungato lavaggio facilita molto la purificazione del prodotto, che venne ripetutamente cristallizzato dall'alcool fino a punto di fusione costante:

I. gr. 0.2373 di sostanza diedero gr. 0.5643 di anidride carbonica e gr. 0.1015 di acqua;

II. gr. 0.1621 di sostanza fornirono 17.1 cm³ di azoto misurati a 15° ed a 739 mm. di pressione.

In 100 parti:

	Calcolato per $C_{19}H_{17}O_4N_3$	Trovato I	Trovato II
Carbonio	64.95	64.85	—
Idrogeno	4.84	4.75	—
Azoto	11.96	—	12.0

L'etere fonde a 105.5-106.5°. È insolubile in acqua, poco solubile in ligroina, solubile in alcool, etere, alcool amilico, solubilissimo in benzolo, etere acetico e cloroformio; dall'alcool si separa in aghi sottili ed incolori; si scioglie a freddo negli acidi solforico e cloridrico concentrati e riprecipita inalterato per aggiunta di acqua. Riscaldato a b. m. con acido solforico concentrato, si saponifica; la saponificazione è completa, quando per aggiunta di acqua alla soluzione acida si ottiene un precipitato completamente solubile in potassa caustica. Per separare l'acido si diluisce la soluzione solforica con molta acqua, si filtra, si lava alla pompa con acqua e si cristallizza il prodotto prima dall'alcool e poi da molto benzolo bollente, in cui l'acido è pochissimo solubile. Per raffreddamento si separano degli aghi bianchi, sottilissimi, riuniti in grandi rosette. Questi cristalli contengono benzolo di cristallizzazione, come dimostrano i seguenti risultati dell'analisi:

I. gr. 0.2319 di sostanza diedero gr. 0.5524 di anidride carbonica e gr. 0.0927 di acqua;

II. gr. 0.2167 di sostanza diedero gr. 0.5165 di anidride carbonica e gr. 0.0867 di acqua;

III. gr. 0.2014 di sostanza diedero 22.5 cm³ di azoto misurati a 18° ed a 745 mm. di pressione.

In 100 parti:

	Calcolato per $3C_{17}H_{13}O_4N_3 + C_6H_6$	Trovato I	Trovato II	Trovato III
Carbonio	65.3	64.8	65.0	—
Idrogeno	4.2	4.4	4.4	—
Azoto	12.0	—	—	12.6

Il prodotto cristallizzato dal benzolo diede all'analisi dopo una ricristallizzazione dall'alcool numeri normali:

I. gr. 0.2015 di sostanza diedero gr. 0.4669 di anidride carbonica e gr. 0.0742 di acqua;

II. gr. 0.1270 di sostanza diedero 15 cm³ di azoto misurati a 20° ed a 738 mm. di pressione.

In 100 parti:

	Calcolato per $C_{17}H_{13}O_4N_3$	Trovato I	Trovato II
Carbonio	63.15	63.19	—
Idrogeno	4.02	4.09	—
Azoto	13.0	—	13.11

L'*acido 5-metil-1-fenil-3-(m-nitrofenil)-pirazol-4-carbonico* fonde a 207-208° con sviluppo di gas; è insolubile in acqua ed in ligroina tanto a freddo quanto a caldo, è quasi insolubile a freddo in benzolo, pochissimo solubile a caldo, si scioglie abbastanza bene a caldo in alcool, è poco solubile in etere, si scioglie bene in cloroformio anche a freddo.

III. — *Acido 5-metil-1-fenil-3-(p-nitrofenil)-pirazol-4-carbonico.*

Per la preparazione e per la purificazione dell'*etere etilico* di questo acido si segue lo stesso metodo indicato nel capitolo precedente; però si è trovato necessario riscaldare il miscuglio di 10 gr. di p-nitroidrazone e di 10 gr. di etere acetoacetico per tre ore a 130-135°; riscaldando soltanto per due ore rimaneva dell'idrazone inalterato. L'etere cristallizzato ripetutamente dall'alcool fino a punto di fusione costante, diede all'analisi i seguenti risultati:

I. gr. 0.3020 di sostanza diedero gr. 0.7184 di anidride carbonica e gr. 0.1339 di acqua;

II. gr. 0.2328 di sostanza diedero 24.5 cm^3 di azoto misurati a 17.5° ed a 744.5 mm. di pressione.

In 100 parti:

	Calcolato per $C_{19}H_{17}O_4N_3$	Trovato I	Trovato II
Carbonio	64.95	64.87	—
Idrogeno	4.84	4.92	—
Azoto	11.96	—	11.93

L'etere cristallizza dall'alcool in piccoli aghi gialli fusibili a 107-108°, è insolubile in acqua ed in ligroina a freddo, è poco solubile in alcool freddo ed in etere, si scioglie bene in alcool caldo, in acetone ed in cloroformio anche a freddo.

Per saponificazione con acido solforico concentrato a b. m. si ebbe l'*acido libero* che fu purificato come il m-derivato, ricristallizzandolo dapprima dall'alcool e poi dal benzolo bollente, in cui anch'esso è pochissimo solubile anche a caldo. Il prodotto si separava dal benzolo in aghi bianchi, sottili, riuniti a ciuffi che fondevano dopo due cristallizzazioni a 209.5-210°

con sviluppo di gas. Anche questi cristalli contenevano benzolo di cristallizzazione; all'analisi si ebbero infatti i seguenti risultati:

I. gr. 0.1656 di sostanza diedero gr. 0.3952 di anidride carbonica e gr. 0.0663 di acqua;

II. gr. 0.1121 di sostanza diedero 12.4 cm³ di azoto misurati a 21° ed a 740 mm. di pressione.

In 100 parti:

	Calcolato per	Trovato	
	$3\,C_{17}H_{13}O_4N_3 + C_6H_6$	I	II
Carbonio	65.3	65.08	—
Idrogeno	4.2	4.44	—
Azoto	12.0	—	12.2

A differenza del m-nitroacido questo p-derivato non perde completamente il benzolo di cristallizzazione, quando viene ricristallizzato dall'alcool. Il p-acido è insolubile in acqua a freddo, pochissimo solubile a caldo, è quasi insolubile in ligroina tanto a freddo quanto a caldo, è poco solubile in etere, in alcool ed in benzolo a freddo, si scioglie bene a caldo nell'alcool ed è molto solubile in acetone.

In una prossima Nota descriveremo i prodotti della reazione fra l'etere acetoacetico e l'o-ossibenzalfenilidrazone.

Chimica. — *L'equivalente elettrochimico dell' Iodio* (¹). Nota di Gino Gallo, presentata dal Socio E. Paternò.

In un mio precedente lavoro (²) sul Tellurio, mi sono proposto di arrivare al peso atomico di tale elemento, fondandomi sulla legge dell'elettrolisi di Faraday. Incoraggiato dai risultati soddisfacenti ottenuti con tale metodo, credetti opportuno di applicarlo anche per la determinazione del peso atomico dell' Iodio, sempre in considerazione della strana anomalia che i pesi atomici di questi due elementi presentano in rapporto alla classificazione del Mendeleeff. La prima determinazione del peso atomico dell'Iodio fu realizzata da Gay-Lussac (³) nel 1814 mediante la sintesi dell' ioduro di zinco. Egli trovò per l' I il p. a. 125. Nel 1815 Prout (⁴) con un processo analogo ottenne per risultato 126. Berzelius (⁵) fece nel 1828 una nuova determinazione basata sull'azione del cloro sull' ioduro di argento; che gli fornì un peso

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio chimico della R. Scuola degl' Ingegneri di Roma.

(²) Gazz. Chim. Ital., t. XXXV, parte II, 1905 e Rendic. R. Acc. dei Lincei, vol. XIV, 1° sem. 1905.

(³) Gay-Lussac, 418, Ann. Chim. *91*, 5, 1814.

(⁴) Prout, Ann. of Phys., *6*, 323, 1815.

(⁵) Berzelius, Ann. Ph. Chem., Pagg. *14*, 558, 1828.

atomico un po' più elevato cioè 126,3. La decomposizione dell' iodato K, e quella dell' iodato di argento mediante il calore furono utilizzate da Millon [1] nel 1843, che trovò nel primo caso il numero 126,697, e nel secondo 125,33. Nello stesso anno Marignac [2] fece la sintesi dell' ioduro di argento che lo condusse per l'ossigeno = 16 al peso atomico dell' Iodio = 126,84. Nel 1859 Dumas [3] riprendendo le esperienze di Berzelius adottò il numero 126,59. Infine Stas [4] in seguito alle sue belle ricerche sui pesi atomici, trovò come media delle sue determinazioni (analisi dell' iodato di argento, analisi dell' ioduro di argento e sintesi dell' ioduro di argento) il numero 126,848. Poi il peso atomico dell' Iodio è stato calcolato da diversi scienziati secondo i dati dello Stas, e finalmente il numero 126,86 è stato ammesso dalla Commissione internazionale nel 1897. Senonchè in questi ultimi tre anni sono state pubblicate tre serie di determinazioni; l'una del Ladenburg [5], l'altra dello Scott [6], la terza del Baxter [7] le quali forniscono dei risultati di circa $^1/_{10}$ di unità superiori al numero suddetto. I metodi adottati dal Ladenburg sono due; l'uno consiste nel riscaldare l'ioduro di argento in una corrente di cloro fino a spostare completamente l' Iodio; egli ottenne in tal modo il numuro 126,96. Nell'altro mediante la sintesi dell' ioduro di argento ottenne I = 126,86; Scott preparò pure sinteticamente l' ioduro di argento ed ottenne in due analisi i valori 126,96 e 126,98. L'argomento fu ripreso recentemente dal Baxter il quale dai rapporti Ag : AgI, AgI : AgCl, Ag : I, AgBr : AgCl, confermò come peso atomico dell' Iodio il numero 126,98.

A questo punto si trovava la questione quando io intrapresi le mie ricerche.

Già nel mio precedente lavoro ho indicato quali sono le condizioni le quali permettono di ottenere dei risultati attendibili per la determinazione del peso atomico di un elemento, mediante l' impiego della corrente elettrica. In sostanza si tratta di ricorrere alla disposizione di un voltametro, e di determinare il peso di un elemento che può venire deposto da una data quantità di elettricità, col peso di Ag, deposto dalla stessa quantità di elettricità in un voltametro campione, perchè come è noto per la legge di Faraday « la massa elettrica è sempre esattamente proporzionale alla massa degli ioni messi in libertà, e questi per masse elettriche uguali, stanno nel rapporto dei loro equivalenti chimici ».

(1) Millon, Ann. Chem. Ph., *9*, 407, 1843.

(2) Marignac, Bibl. Genève, *46*, 363, 1843.

(3) Dumas, Ann. Chem. Ph., *55*, 163, 1859.

(4) Stass, *Nouvelles recherches sur les lois des proportions chimiques, sur les poids atomiques et leurs rapports mutuels.* Hayez, Bruxelles, 1865.

(5) Ladenburg, Ber. t. XXXV, pag. 2275.

(6) Scott, Proc. chem. Soc. 18-112.

(7) Baxter, Proc. Amer. Acad., *40*, 1904, 419 e Zeits. für. Anorg. Chem., *43*, 14 e vol. *46*, pag. 36.

La questione però si presentava alquanto più complessa per l'I, e diverse difficoltà sperimentali parvero a prima vista rendere impossibile tale determinazione. L'Iodio infatti (che fra i composti alogenati ha il potenziale più basso) per elettrolisi di una soluzione di un suo sale, si separa come elemento elettronegativo, all'anodo. Come si può qui fissare l'I? La prima soluzione che si può affacciare alla mente è quella di ricorrere al metodo già applicato dal Vortman per il dosaggio dell'I per via elettrolitica, impiegando cioè come anodo una lamina di Ag. Ora questo metodo sarebbe veramente molto comodo, se non presentasse alcuni inconvenienti che ho potuto constatare. Prima di tutto o l'ioduro di Ag è leggermente solubile nella soluzione dell'ioduro che si impiega come elettrolita, o una piccola quantità di Ag passa direttamente in soluzione, perchè sta il fatto che elettrolizzando dopo qualche tempo la soluzione stessa con elettrodi di Pt, si osserva deporsi dell'Ag al catodo. In secondo luogo, sotto l'azione della corrente l'anodo di Ag si trasforma parzialmente in perossido, per cui i risultati rimangono affetti da due errori di cui non è possibile nè sicuro valutare la portata.

Si può ricorrere allora alla determinazione dell'Iodio per via volumetrica. Ma io ho detto già nel mio precedente lavoro, che per ottenere dei risultati concordanti è necessario che la concentrazione ionica nella soluzione si mantenga presso a poco costante; è necessario dunque circondare il catodo di uno strato di Iodio metallico, sufficiente per reagire coll'idrato del metallo che si va formando.

Dirò subito che il sale che meglio si presta ad essere impiegato è l'ioduro potassico. Ora è noto che il K che si porta al catodo, forma coll'acqua idrato potassico. Ma l'idrato potassico reagisce coll'Iodio libero, per dare in ultima analisi dell'ioduro potassico e dell'iodato potassico

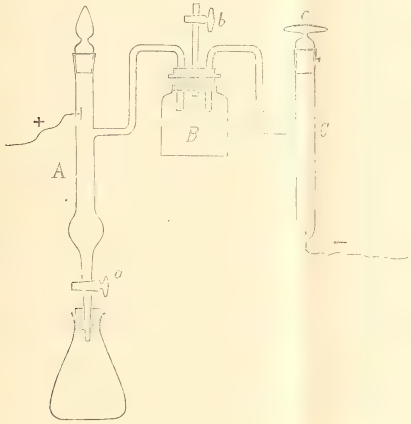
$$(1) \qquad I_2 + 2KOH = 2KIO + H_2$$
$$(2) \qquad 3KIO = 2KI + KIO_3$$

Ora, come si può separare questo Iodio che noi aggiungiamo al catodo da quello che si separa all'anodo, e come potremo impedire la loro reciproca diffusione dallo spazio anodico a quello catodico e viceversa? E come potremo ancora impedire che l'idrato K che si forma al catodo, giunga in contatto dell'Iodio separatosi all'anodo per reagire insieme?

L'esecuzione dell'esperienza richiedeva dunque una disposizione sperimentale tale da soddisfare a tutte queste diverse esigenze e credo di esservi riuscito col seguente piccolo apparecchio, che dopo innumerevoli modificazioni mi parve risolva bene il problema.

Due tubi di vetro (v. figura) dell'altezza di 15 cm. del diam. interno di 12 mm., e che si possono chiudere con tappo a smeriglio a chiusura perfetta, funzionano rispettivamente da spazio anodico e catodico. I due tubi sono messi in

comunicazione fra di loro mediante due tubicini piegati ad S del diam. interno di 4 mm., saldati a metà circa dell'altezza dei due tubi principali e terminanti in un recipiente intermedio chiuso da un turacciolo a tre fori. Attraverso il terzo foro del tappo passa un tubicino di vetro con rubinetto. Il tubo funzionante da anodo porta alla parte inferiore un ingrossamento e



termina con un rubinetto. La chiusura del tubo catodico viene fatta mediante un tappo cavo di vetro portante lateralmente un foro, cui corrisponde un foro simile praticato nella parete del tubo, in modo da permettere, o impedire a volontà, mediante un $\frac{1}{2}$ giro la comunicazione fra l'interno del tubo e l'esterno.

Gli elettrodi costituiti da due laminette di Pt, della superficie di 4 mm.^{2} sono saldati ai due tubi, per l'anodo alla parte superiore alquanto al di sopra del tubo laterale, per il catodo sul fondo del tubo. Ho potuto constatare che questa disposizione per l'anodo è preferibile, perchè la diffusione è meglio impedita in quanto che l' Iodio che si separa all'anodo, tende in tal modo a raccogliersi alla parte inferiore del tubo, ricevendo come una spinta, mentre invece trovandosi l'elettrodo in basso, per la stessa spinta tende a salire attraverso al tubicino laterale.

Per procedere all'esperienza si opera nel seguente modo: Mediante un imbuto a collo lungo si introduce nello spazio catodico una certa quantità

di Iodio polverizzato, e vi si fissa con un piccolo batuffolo di lana di vetro, allo scopo di evitare che al sopravvenire della soluzione esso giunga a galleggiare alla superficie del liquido e quindi sciogliendosi favorisca la diffusione. Quindi si applica il tappo coll'avvertenza di mantenere i due fori coincidenti. Tenendo chiuso il rubinetto *b*, s' introduce nel tubo anodico la soluzione. Il riempimento avviene completamente, prima in A, poi in B, quindi nel tubo C; il livello nel liquido nei due tubi deve essere mantenuto alquanto al disotto della curva superiore dei due tubi laterali. Si chiude quindi il tubo A col tappo a smeriglio, e si segna il livello del liquido; questa chiusura permette di rilevare dallo spostamento del liquido che ne deriverebbe nell' interno, un eventuale svolgimento di ossigeno; inconveniente questo che si deve evitare, e che solo con una scelta opportuna del voltaggio e dell' intensità della corrente si può raggiungere, come meglio vedremo in seguito.

Si stabilisce quindi il contatto coi due poli della sorgente elettrica e si incomincia l'elettrolisi. L'apparecchio offre una resistenza un po' forte al passaggio della corrente, per cui l'operazione deve essere prolungata per 24 ore, e talvolta anche per 36; però la diffusione dell' Iodio sia dallo spazio anodico, che da quello catodico, è completamente evitata, e la soluzione si mantiene perfettamente incolora nella parte superiore dei tubicini laterali, e nel recipiente intermedio B. Terminata l'elettrolisi, si chiude il rubinetto *c*, si apre il rubinetto *a*, e tenendo chiuso il tappo superiore, si permette al liquido insieme all' Iodio messo in libertà e disciolto nella soluzione di discendere in un recipiente sottoposto, mediante l'apertura del rubinetto *b*. La parte della soluzione che viene aspirata dal recipiente B, serve al lavaggio del tubicino; si completa poi il lavaggio del tubo A, (togliendo il tappo superiore), con acqua distillata, con soluzione di ioduro, e quindi di nuovo con acqua, e si dosa subito l' Iodio messo in libertà mediante soluzione circa $\frac{N}{50}$ di iposolfito sodico.

Già ho esposto estesamente nell'altro mio lavoro citato quale sia la disposizione adottata pei voltametri ad argento di confronto, e le precauzioni e le correzioni di cui è necessario tener conto per ottenere dei risultati esatti, e rimando ad esso per le opportune dilucidazioni.

Ho preferito fra tutti gli ioduri, l' ioduro di potassio per la sua facile solubilità e per la relativa facilità con cui si può ottenere allo stato puro.

I materiali da me impiegati, Iodio, ioduro potassico, iposolfito di sodio, erano stati provveduti dalla casa Erba di Milano ed erano allo stato puro.

L' Iodio che doveva servirmi essenzialmente alla titolazione della soluzione di iposolfito sodico, richiese uno speciale trattamento. L' Iodio fornitomi dalla casa Erba venne disciolto in una soluzione concentrata di KI, e quindi distillato per la massima parte impiegando una storta e raccogliendo l' I in un recipiente raffreddato con acqua fredda. L' Iodio così ottenuto venne

trasformato in acido iodidrico, sospendendolo in acqua e facendo agire una corrente d' idrogeno solforato.

Quest'ultimo venne preparato per azione di acido solforico diluito sul solfuro di ferro, e venne lavato attraverso ad una serie di bottiglie di lavaggio. In questo modo l' ioduro di cianogeno eventualmente presente viene trasformato per azione dell' H_2S in acido cianico, acido iodidrico e zolfo. La soluzione venne bollita per breve tempo, quindi eliminato lo zolfo per filtrazione. La soluzione chiara venne ancora bollita per alcune ore allo scopo di eliminare tutto l'acido cianico. Infine l' HI venne trasformato in Iodio mediante distillazione della soluzione con permanganato potassico puro esente da cloro. Mediante il permanganato, le sostanze organiche eventualmente presenti, vengono ossidate. L' Iodio così ottenuto venne nuovamente e per due volte distillato da una soluzione di ioduro di potassio, allo scopo d'eliminare le traccie di cloro e bromo se presenti. Quindi venne sublimato due volte in un becher, raccogliendo il sublimato sopra un tubo di vetro forte portante a metà una bolla, che si adattava esattamente all'orlo del becher, e che veniva riempita di acqua fredda [1]. Il sublimato raccolto su vetro di orologio veniva quindi lasciato per 48 ore in essiccatore non ingrassato, in presenza di cloruro di calcio [2]. Infine esso venne distillato da una navicella di porcellana posta entro un tubo di vetro duro in corrente di aria perfettamente secca, raccogliendo il distillato in un tubicino di vetro duro che veniva conservato poi entro ad altro essiccatore a cloruro di calcio. Tutte le varie parti dell'apparecchio a distillazione erano riunite fra di loro a smeriglio.

Con l' Iodio così purificato e disseccato si passava a titolare la soluzione di iposolfito nel seguente modo:

La soluzione di iposolfito preparata circa $\frac{N}{50}$ con iposolfito Na purissimo, venne prima conservata per circa venti giorni nel buio, allo scopo di permettere che tutto l'acido carbonico contenuto nell'acqua distillata esercitasse quella decomposizione che è causa in principio di una rapida variazione di titolo della soluzione stessa. È noto infatti che l'acido carbonico reagisce coll' iposolfito Na nel seguente modo:

$$Na_2 S_2 O_3 + 2H_2 CO_3 = 2Na HCO_3 + H_2 S_2 O_3$$
$$H_2 S_2 O_3 = H_2 SO_3 + S$$

per cui il titolo va lentamente aumentando perchè l'acido solforoso che si

(1) Treadwel, Analytisch. Chem., III, Aufl., pag. 473.

(2) L' impiego dell' $H_2 SO_4$ è da evitarsi perchè l' I dopo qualche ora rimane inquinato di tale acido; il grasso dell'essiccatore viene facilmente intaccato dai vapori d' Iodio, con formazione di acido iodidrico, che può inquinare l' Iodio.

forma consuma più iodio che non la quantità di acido iposolforoso da cui esso deriva.

$$H_2 SO_3 + 2I + H_2O = 2HI + H_2 SO_4,$$

mentre con

$$2Na_2 S_2 O_3 + I_2 = 2Na I + Na_2 S_4 O_6 \text{ (1)}.$$

In un piccolo tubo per pesata con tappo a smeriglio a perfetta chiusura, si introducono 2, 2,5 gr. di KI purissimo e $\frac{1}{2}$ cm³ di acqua distillata, si chiude e si pesa esattamente. Quindi si aggiungono gr. 0,35-0,45 di Iodio puro, si chiude e si pesa nuovamente. La differenza mi dà il peso di Iodio. L'Iodio si scioglie in tal modo quasi istantaneamente nella soluzione concentrata di ioduro di potassio. Si fa quindi cadere il tubo in un pallone di Erlenmayer, della capacità di circa 500 cm³ e contenente 200 cm³ di acqua distillata più un grammo di ioduro potassico. Si toglie il tappo al momento dell'introduzione, e si fa cadere dentro contemporaneamente al tubo. In questo modo ogni perdita di Iodio è evitata. Si fa quindi gocciolare entro al pallone la soluzione di iposolfito da una buretta di Baudin, fino ad ottenere una colorazione giallognola. Si aggiungono allora 2-3 cm³ di salda d'amido e si continua a far agire a goccia a goccia la soluzione di iposolfito fino a che la colorazione da bleu diventa ametista e poi sparisce completamente.

La salda d'amido venne preparata nel seguente modo (2): 5 gr. d'amido vennero triturati finemente e spappolati con pochissima acqua fredda. Si versò poi lentamente il miscuglio in un litro di acqua bollente contenuta in una capsula di porcellana. Si prolungò quindi per 2 minuti ancora l'ebollizione, si lasciò raffreddare e riposare per una notte. Si filtrò la soluzione in tanti tubi da saggio; i quali vennero collocati in bagno maria, e riscaldati per circa due ore, e chiusi quindi con ovatta sterilizzata, prima di toglierli dal bagno. In questo modo sterilizzata, la salda d'amido si conserva per lungo tempo e manifesta sempre la bellissima colorazione bleu come se preparata di fresco.

In queste titolazioni poi ebbi sempre l'avvertenza, sia nel caso dell'impiego dell'iodio per titolare la soluzione, sia nelle determinazioni di Iodio dopo l'elettrolisi, di conservare sempre presso a poco la stessa diluizione, perchè come è noto (3) colla stessa quantità di ioduro e diverse quantità di liquido possono essere richieste quantità diverse di Iodio per ottenere la colorazione bleu. Ad ogni determinazione poi facevo una titolazione di confronto

(1) La soluzione di iposolfito era conservata al buio, perchè altrimenti il suo titolo va poi continuamente diminuendo.

(2) Treadwel, l. cit.

(3) Treadwel, l. cit.

della soluzione di iposolfito, per constatare se il titolo di questa fosse rimasto costante.

Le pesate tanto per l'Ag come per l'I vennero sempre ridotte al vuoto. Per l'I assumendo come p. es. il numero 4,933 (2) venne introdotta per ogni grammo apparente la correzione + 0,000102 gr.

L'ioduro potassico fornitomi dalla casa Erba era purissimo e non ebbe bisogno di speciali trattamenti. La concentrazione della soluzione da me impiegata fu ordinariamente al 10 %, ma ho potuto constatare, che anche variando entro larghi limiti la concentrazione, purchè non si raggiunga una diluizione eccessiva, i risultati non vengono punto influenzati [1].

Una speciale attenzione ha richiesto la determinazine del voltaggio opportuno, per evitare lo sviluppo di ossigeno all'anodo. Nelle condizioni del mio apparecchio questo non doveva altrepassare i 6 Volt durante l'esperienza, (ordinariamente tre accumulatori) altrimenti si correva pericolo di avere sviluppo di ossigeno, e quindi si avevano risultati sensibilmente inferiori. L'intensità media di corrente impiegata fu di A: 0,005-0,002. Le pesate vennero eseguite con un'ottima bilancia Sartorius, a braccia corte della portata di 100 gr. e della sensibilità di $^1/_{20}$ di mmgr. Tutti i pesi vennero prima controllati. L'acqua era stata prima distillata in presenza di una soluzione alcalina di permanganato potassico, quindi ridistillata in alambicco di stagno, rifiutando le prime e le ultime porzioni.

Ogni determinazione richiedeva tre giorni, due circa per l'elettrolisi, l'altro per lavaggi, essiccazione, conservazione nel vuoto e pesate. Come si disse nel mio citato lavoro, tutti gli apparecchi erano diligentemente isolati dal tavolo di lavoro, ed i due voltametri ad Ag, e l'apparecchio di elettrolisi erano riuniti in serie mediante fili aerei dal serrafilo di partenza a quello di arrivo della corrente dal quadro distributore dell'elettricità.

Nella seguente tabella riporto i risultati delle determinazioni eseguite.

[1] Ladenburg, Ber. Deut. chem. Gesell. *35*, 1256.

Numero	Durata in ore	Argento deposto nel I voltametro	Argento deposto nel II voltametro	Media Ag corretta nel vuoto e per l'acqua madre	Peso dell' Iodio corretto nel vuoto	Peso atomico dell' Iodio in rapporto all'Ag = 107,93	Medie parziali	Media finale
1	8½	0,18055	0,18060	0,18054	0,21230	126,92		
2	8	0,2137	0,2136	0,21360	0,251309	126,98		
3	16	0,2311	0,2310	0,23103	0,27181	126,90	126,886	
4	16	0,2403	0,2399	0,24005	0,28213	126,85		
5	9½	0,15460	0,15455	0,15454	0,18167	126,85		
6	16	0,25985	0,25965	0,2597	0,30515	126,82		
7	9½	0,1623	0,16235	0,16229	0,19080	126,89		
8	22	0,30095	0,30115	0,300988	0,35411	126,98		
9	11	0,2682	0,2683	0,26819	0,31528	126,88	126,903	
10	"	0,25885	0,2588	0,25877	0,30425	126,90		
11	16	0,2444	0,24415	0,24422	0,28703	126,85		
12	9	0,20835	0,2085	0,20838	0,24516	126,92		126,89
13	16	0,25055	0,2505	0,25047	0,29445	126,88		
14	"	0,2028	0,2026	0,20266	0,23826	126,89		
15	9	0,18315	0,18325	0,18316	0,21533	126,89	126,881	
16	24	0,37285	0,37285	0,37278	0,43809	126,84		
17	20	0,28225	0,2823	0,28221	0,33207	126,90		
18	22	0,2584	0,2582	0,2582	0,30356	126,89		
19	36	0,3397	0,3397	0,33963	0,39923	126,88		
20	"	0,3349	0,3346	0,33461	0,39345	126,91		
21	"	0,3362	0,33595	0,3360	0,39502	126,89	126,890	
22	34	0,3704	0,37025	0,37025	0,43526	126,88		
23	31	0,3084	0,3084	0,30824	0,36233	126,87		
24	36	0,36395	0,3640	0,36390	0,42789	126,91		

Discussione dei risultati ottenuti.

Dalla tabella riportata nella pagina precedente si deduce come media aritmetica delle determinazioni il numero 126,89 (0 = 16) come peso atomico dell' Iodio.

Nel fare tale media io ho creduto più opportuno sommare i singoli valori dei pesi atomici ottenuti e dividere il numero finale per il numero delle esperienze, anzichè sommare le quantità di Ag e di I trovate in ogni singola esperienza e stabilire il rapporto fra le somme ottenute. A quest'ultimo si-

stema si attennero Lothar Meyer e il Seubert [1] nei loro calcoli ritenendolo più sicuro del primo, poichè le determinazioni eseguite con maggior quantità di materia e quindi presumibilmente più esatte vengono ad avere una preponderanza nel calcolo. Ma il Clarke [2] non trova del tutto giustificato quest'ultimo metodo di calcolo, perchè gli errori probabili dovuti alle pesate diminuiscono è vero proporzionalmente con l'aumentare della sostanza, ma sono in realtà piccolissimi con gli apparecchi moderni, mentre assai maggiori sono quelli dovuti a cause diverse; perchè p. es. anche le minime traccie di impurezze contenute nelle sostanze impiegate vengono ad aumentare in tal caso la portata della loro influenza. La media ordinaria quindi di una serie di osservazioni, con la sua misura di concordanza, cioè l'errore probabile, val meglio [3] del numero ottenuto calcolando come il Lothar Meyer e il Seubert.

Il tentativo però di potere con questo metodo arrivare ad un peso atomico dell' Iodio superiore a quello del Tellurio è dunque completamente fallito, ed un'altra prova è quindi venuta ad avvalorare la grave obbiezione che con tale elemento viene fatta alla classificazione del Mendeleeff. Non solo, ma anzi il risultato delle mie esperienze mi condurrebbe a ridurre di circa $^1/_{10}$ di unità il valore trovato dagli ultimi sperimentatori (126,98), per avvicinarmi invece ancora una volta al numero dedotto dalle esperienze classiche dello Stas. Quantunque non si possa escludere in modo assoluto che qualche errore si sia fatto strada ad onta delle delicate precauzioni prese, nei valori ottenuti dallo Stas, sembra però assai probabile che questo errore sia di grande entità quando si rifletta alla straordinaria abilità e pertinacia dell'esperimentatore, e alle numerose e severe verifiche a cui un tal valore era stato sottoposto prima che gli ultimi sperimentatori, il Ladenburg, lo Scott ed il Baxter arrivassero in seguito alle loro determinazioni all' I = 126,98.

Inoltre il fatto che tali scienziati hanno dovuto riferirsi nel loro calcolo, come fece lo Stas, oltre che al peso atomico dell'Ag, a quello del cloro e del bromo, non rende improbabile che un piccolo errore da cui possono essere affetti i pesi atomici di tali elementi, determini un errore poi sul peso atomico dell' Iodio da quelli dedotti. D'altra parte uno studio accurato dei processi adottati da tali autori (non ostante la straordinaria difficoltà che presentano tutte le numerose operazioni di purificazione, lavaggio, filtrazione, essiccamento), non lascerebbe adito ad alcun dubbio che le precauzioni prese siano anche in questo caso tali da ritenere certo il loro risultato, e quindi che il numero dello Stas sia alquanto inferiore al vero; e ad avvalorare questa ipotesi più probabile concorre anche il fatto che le ultime determinazioni del

(1) *Die Atomgewichte der Elemente*, pag. 4.
(2) *A recalculation of the atomic weights*, pag. 5.
(3) Piccini, *Determinazione dei pesi atomici*. Enciclopedia chim., vol. I, pag. 317.

peso atomico del cloro, fatte dai signori Richard e Wells [1] conducono a modificare il numero 35,45 ammesso fin qui, nel numero 35,473.

Ma d'altra parte non può sembrare non sintomatico il fatto che il Ladenburg mentre nella trasformazione dell' ioduro di argento in cloruro mediante il cloro gassoso ottiene I = 126,96, colla sintesi dell' ioduro di argento ottenga invece I = 126,86, numero analogo a quello ottenuto dal Marignac e Stas collo stesso metodo, numero infine che si avvicina di più a quello da me ottenuto 126,89. E mi pare che questo sia il procedimento analitico che meglio si presta ad essere messo in confronto col metodo elettrolitico da me impiegato, perchè anche nel mio caso il rapporto si fa semplicemente fra argento e Iodio.

Comunque sia, io non posso e non voglio escludere che delle piccole cause d'errore non possano avere influito sui miei risultati, e che il mio valore possa essere alquanto inferiore al vero. Non è improbabile infatti che io possa non avere avvertito un piccolissimo svolgimento di gas all' anodo, quantunque le precauzioni prese siano sufficienti per escluderlo, non è improbabile inoltre che la formazione d'una traccia minima di ipoiodito e di iodato possa aver determinato una piccola causa d'errore, quantunque le ricerche analitiche di tali sostanze eseguite ogni volta nella soluzione anodica, ne abbiano sempre esclusa la presenza.

Non è improbabile infine che l' I si separi in minima parte anche allo stato di ione polivalente, ciò che del resto sembra poco verosimile.

Io propenderei quindi a ritenere dai risultati delle mie esperienze, come alquanto elevato il peso atomico dell' Iodio dedotto dai signori Ladenburg, Scott e Baxter, ed affermo d'altra parte con certezza che il peso atomico dell' Iodio non può essere inferiore a 126,89. In quanto che le eventuali piccole cause d'errore sarebbero nel mio caso sempre d'ordine sottrattivo, e quindi il valore 126,89 è il valore minimo che si deve adottare. Può darsi che ulteriori ricerche confermino questo mio modo di vedere. Del resto m' interessa far rilevare come i valori ottenuti con questo metodo concordino soddisfacentemente fra loro, in modo da permettere con esso la determinazione del peso atomico di un elemento, qualora naturalmente si possa escludere ogni causa d'errore.

Che se vogliamo spingerci poi anche nel campo delle applicazioni, mi pare che il piccolo apparecchio ideato per queste esperienze, di semplice e facile costruzione, potrebbe venire utilmente impiegato come voltametro a titolazione di Iodio, per piccole e grandi intensità di corrente.

Riassumendo, le conclusioni che si possono trarre dal presente lavoro sono le seguenti :

1) Il peso atomico dell' Iodio determinato in base alla legge di Faraday sarebbe = 126,89 (0 = 16).

[1] Richard e Wells, Pubblication of the Carnegie Institution, n° 28, (1905).

2) L' Iodio nelle soluzioni di ioduri si comporta sempre come ione monovalente.

3) L'apparecchio impiegato in queste determinazioni può venire adottato come voltametro a titolazione di Iodio fino a tanto che non si abbia svolgimento di ossigeno. Ad un equivalente di Iodio (126,89) corrispondono 96537 Coulomb.

Chimica. — *Eterificazione del γ-piridone con diazoidrocarburi grassi.* Nota di A. Peratoner ed E. Azzarello, presentata dal Socio E. Paternò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Prodotti di condensazione dell'acido rodaninico colle aldeidi.* Nota di G. Bargellini, presentata dal Socio E. Paternò.

Nencki nel 1877 (1) facendo reagire insieme acido monocloracetico e solfocianato ammonico ottenne un composto, che chiamò *acido rodaninico*, della formula $C_3H_3S_2NO$ al quale, specialmente in base alla sua decomposizione, per azione degli alcali, in acido solfocianico e acido tioglicolico (2) assegnò la formula strutturale

$$\begin{array}{l} CH_2 \cdot SH \\ | \\ CO \cdot S \cdot CN \end{array}$$

Studi ulteriori di Liebermann e Lange (3) attribuirono a questa sostanza, per la sua analogia colle tioidantoine e coi tiouretani, la formula

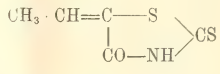
$$\begin{array}{l} CH_2—S \\ | \qquad\quad \diagdown \\ CO—NH \diagup \end{array} CS$$

formula che fu poi dimostrata definitivamente dalle tre eleganti sintesi che Miolati (4) fece di questo composto.

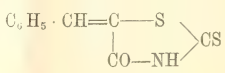
Nel corso delle sue ricerche su questa sostanza per stabilirne la costituzione, prima che essa fosse dimostrata da Miolati, Nencki notò che l'acido

(1) Nencki, J. für prak. Ch. (2) 16, 1.
(2) Nencki, B. 17, 2279.
(3) Liebermann e Lange, B. 12, 1594.
(4) Miolati, A. 262, 82.

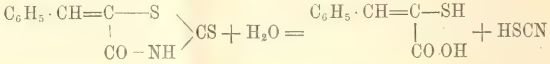
rodaninico dà prodotti di condensazione colle aldeidi. Di questi prodotti fu studiato da Nencki soltanto l'acido etilidenrodaninico, ottenuto dall'aldeidammoniaca



e l'acido benzilidenrodaninico, ottenuto dall'aldeide benzoica



Bondzynsky [1] dall'acido benzilidenrodaninico, per riscaldamento a b. m. con soluzione di idrato di bario, ottenne l'acido solfidrilcinnamico che si forma secondo la reazione:



Fu dapprima mio pensiero di studiare questa decomposizione in altri simili prodotti di condensazione e tentar di passare dall'acido solfidrilcinnamico all'acido cinnamico corrispondente. Questa reazione mi dava la speranza, partendomi da varie aldeidi aromatiche, di ottenere con un metodo generale di preparazione i corrispondenti acidi cinnamici. Fra le altre avrei potuto così fare nuove sintesi della cumarina (dall'aldeide salicilica), dell'umbelliferone (dall'aldeide resorcilica), dell'acido caffeico (dall'aldeide protocatechica), dell'acido ferulico (dalla vaniglina), dell'acido esperetinico (dall'isovaniglina) ecc. ecc.

Ho già cominciato a fare ricerche su questo argomento, ed ho ottenuto per ora resultati soddisfacenti sui quali mi riserbo di far presto una comunicazione.

Prima però di andare avanti, ho creduto opportuno studiare sistematicamente questi prodotti di condensazione che l'acido rodaninico fa colle aldeidi: e a tale scopo ho cominciato a preparare i prodotti di condensazione dell'acido rodaninico con diverse aldeidi aromatiche, usando come mezzo condensante l'acido solforico concentrato e l'acido cloridrico concentrato.

Tutti i prodotti di condensazione che ho preparati, come l'acido benzilidenrodaninico di Nencki, hanno proprietà acide. Aggiungendo soluzione alcoolica di acetato di piombo alle loro soluzioni alcooliche, si precipitano i respettivi sali di piombo giallognoli o giallo rossastri. Versando soluzione

[1] Bondzynsky, M. 8, 349.

di nitrato d'argento ammoniacale nelle loro soluzioni alcooliche, si precipitano i respettivi sali di argento gialli o rossastri, che divengono più scuri alla luce.

Tutti i prodotti che ho ottenuti e che descrivo nella Nota presente, si sciolgono facilmente nelle soluzioni, anche diluite, di soda. Però le soluzioni gialle o rosse dopo un certo tempo, lasciandole a sè, e più rapidamente con un blando riscaldamento, perdono il colore primitivo, indizio certo di alterazione che il prodotto ha subìto per opera dell'alcali. La medesima alterazione si ha più facilmente ancora, usando una soluzione di soda concentrata.

Alcuni di questi prodotti che io descrivo erano già stati ottenuti ed io non ho fatto altro che ripeterne la preparazione, per imparare meglio a conoscerli prima di proseguire nello studio sistematico della loro decomposizione per opera della barite.

Nencki (1) aveva già avvertito che anche l'aldeide salicilica e l'aldeide p.ossibenzoica dànno composti di condensazione coll'acido rodaninico, ma non li descrisse affatto e non ne riportò neppure il punto di fusione. Bondzynsky (2) in seguito preparò i prodotti di condensazione colle aldeidi orto- e paranitro-benzoica. Infine Zipser (3) e Andreasch e Zipser (4) prepararono quelli coll'aldeide salicilica, l'aldeide anisica, l'aldeide cinnamica e il piperonalio. Dapprima mi sembrò inutile fare uno studio particolareggiato dei composti già ottenuti da Zipser e Andreasch; ma, avendo io ripreparato il prodotto di condensazione dell'acido rodaninico coll'aldeide salicilica ed avendo trovato che il suo punto di fusione costante è 218°-219°, cioè molto più alto di quello che riferisce Zipser, volli ripreparlarli tutti, usando come mezzo condensante l'acido solforico o l'acido cloridrico, e per giunta sottoporli all'analisi per accertarmi della composizione dei composti ottenuti da me: e le analisi delle mie sostanze mi hanno dato numeri pienamente concordanti.

Il prodotto di condensazione dell'acido rodaninico coll'aldeide anisica, che io ho ripreparato usando come condensante l'acido solforico, come quello di Andreasch e Zipser, si fonde decomponendosi fra 230° e 242°. Il prodotto che io ho ottenuto per condensazione dell'acido rodaninico coll'aldeide cinnamica si fonde costantemente a 220°-221° decomponendosi, mentre Zipser per il suo prodotto riporta il punto di fusione 211°; il prodotto di condensazione col piperonalio che, secondo Andreasch e Zipser, comincia a 245° a decomporsi senza fondere, a 255° è ancora giallo e perfettamente inalterato: soltanto a 256°-258° si decompone. Io credo quindi che i prodotti preparati da Zipser e Andreasch non siano stati sufficiente-

(1) Nencki, loc. cit.
(2) Bondzynsky, loc. cit.
(3) Andreasch e Zipser, M. 24, 499.
(4) Zipser, M. 23, 958.

mente puri: e questo si spiega pensando che essi hanno usato come condensante la soda e che la soda appunto scompone abbastanza facilmente tutti questi prodotti di condensazione, come ho detto più avanti.

Colle aldeidi grasse e coi chetoni, sia grassi che aromatici, ho fatto per ora soltanto qualche assaggio, usando come condensante l'acido solforico o l'acido cloridrico. Dai tentativi che ho fatto, però, mi risulta che coll'acido rodaninico non si condensa nessuno dei seguenti composti: aldeide propionica, aldeide butirrica, aldeide isovalerianica, aldeide enantica, gliossale, cloralio, acetone, metil-nonilchetone, etere acetacetico, acetofenone e benzile. Ho fatto anche qualche tentativo usando come condensante la soda, ed ho osservato che l'acido rodaninico dà col cloralio come anche col bromalio e col butilcloralio, in presenza di soda, intense colorazioni rosse, intorno alla natura delle quali non ho fatto alcuna speciale ricerca, perchè avendo Andreasch e Zipser [1] ottenuto nel 1904 simili colorazioni coll'acido ν-metil- e coll'acido ν-etil-rodaninico, è probabile che abbiano già cominciato ricerche in questo senso e non voglio invadere il loro campo di studio. Io mi propongo di fare ulteriori tentativi per trovare le condizioni in cui anche le aldeidi grasse e i chetoni si possano condensare coll'acido rodaninico.

Tutti i prodotti di condensazione che ho preparati da acido rodaninico e aldeidi aromatiche hanno notevoli proprietà coloranti: le loro soluzioni tingono la lana e la seta in un bel color giallo. Ma la poca stabilità delle colorazioni ottenute impedisce che queste sostanze possano trovare un'applicazione pratica.

Metodo di preparazione.

I prodotti che descrivo nella Nota presente li ho tutti ottenuti con due metodi generali di preparazione, che per brevità preferisco descriver qui piuttosto che ripeterli volta per volta nella descrizione dei composti ottenuti.

Il primo consiste nel disciogliere 1 p. di acido rodaninico insieme ad una quantità di aldeide poco superiore alle quantità molecolari, in 5-10 p. di alcool e aggiungere a questa soluzione, scaldata a b. m., 3 p. di acido solforico concentrato del commercio, continuando poi il riscaldamento per mezz'ora o un'ora. Il secondo invece consiste nell'aggiungere 5-10 p. di acido cloridrico (d=1,19) ad una soluzione di 1 p. di acido rodaninico e una quantità di aldeide un po' maggiore del calcolato in 5-10 p. di alcool, e scaldare per mezz'ora o un'ora a b. m.

I prodotti di condensazione si depositano generalmente subito dopo l'aggiunta dell'acido solforico o dell'acido cloridrico: quelli che sono più facilmente solubili nell'alcool si depositano per raffreddamento del liquido: aggiungendo, invece, acqua al prodotto della reazione caldo si può provocare

[1] Andreasch e Zipser, M. 25, 159.

subito la separazione della nuova sostanza formatasi, poichè tutti sono pochissimo solubili nell'acqua. I rendimenti furono in ogni caso buonissimi (80-90 % e anche più) [1]. I prodotti greggi furono poi purificati come dirò nella descrizione dei singoli composti.

Acido rodaninico e aldeide benzoica $C_6H_5 \cdot CH = \begin{array}{l} C\text{——}S \\ | \\ CO\text{—}NH \end{array} \Big\rangle CS$

Nencki ottenne per il primo questo prodotto di condensazione che chiamò *acido benzilidenrodaninico*, facendo agire a b. m. l'acido solforico concentrato sopra una soluzione alcoolica di acido rodaninico e aldeide benzoica. Io ho potuto prepararlo di nuovo, usando come condensante tanto l'acido solforico concentrato che l'acido cloridrico concentrato. Il prodotto ottenuto presentava il medesimo punto di fusione 200° e tutte le altre proprietà del composto descritto da Nencki. Ho osservato inoltre, e credo utile riferirlo, che si scioglie facilmente nell'alcool etilico, alcool amilico, acido acetico, etere acetico, acetone, cloroformio, benzolo, mentre è insolubile nella ligroina.

Acido rodaninico e aldeide salicilica $C_6H_4 \begin{array}{l} \diagup OH \ (2) \\ \text{—}CH = \begin{array}{l} C\text{——}S \\ | \\ CO\text{—}NH \end{array} \Big\rangle CS \end{array}$

Il prodotto greggio lo cristallizzai più volte nell'alcool diluito, finchè presentò il punto di fusione costante 218°-219° decomponendosi (Zipser dice che si fonde a 200° con decomposizione).

Seccato a 100° dette all'analisi i seguenti resultati:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_7O_2NS_2$
C %	50,65	50,63
H %	3,18	2,96
N %	5,98	5,90

Questo prodotto di condensazione (*acido o- ossi- benzilidenrodaninico*) forma aghetti giallo rossastri facilmente solubili nell'alcool etilico, alcool amilico, etere acetico, acido acetico, acetone, un po' meno solubili nel cloroformio e nel benzolo, insolubili nella ligroina.

[1] Invece dell'acido solforico o dell'acido cloridrico, si può usare come condensante anche l'acido fosforico sciropposo: con questo metodo però il rendimento è scarso e il prodotto poco puro.

Acido rodaninico e aldeide m- ossi- benzoica $C_6H_4\begin{cases}OH\ (3)\\ CH{=}C{-}S\\ \quad\ |\\ \quad CO{-}NH\end{cases}\!\!>CS$

Cristallizzai più volte nell'alcool diluito il prodotto greggio della reazione, finchè potei ottenerlo in aghetti col punto di fusione costante 244°-245°.

Seccato a 100° dette all'analisi i seguenti resultati:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_7O_2NS_2$
C %	50,46	50,63
H %	3,14	2,96
N %	5,95	5,90

Quest'*acido m- ossi- benzilidenrodaninico* si distingue dagli altri per il suo colore giallo verdastro. Si scioglie facilmente nell'alcool, acido acetico, etere acetico, acetone, poco nel benzolo e nel cloroformio; non si scioglie nella ligroina.

Acido rodaninico e aldeide p- ossi- benzoica $C_6H_4\begin{cases}OH\ (4)\\ CH{=}C{-}S\\ \quad\ |\\ \quad CO{-}NH\end{cases}\!\!>CS$

Il prodotto greggio ottenuto lo feci cristallizzare più volte nell'alcool acquoso caldo, da cui per raffreddamento si deposita in aghetti giallo rossastri che a 260° cominciano a decomporsi fondendosi.

Seccato a 100° dette all'analisi i seguenti resultati:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_7O_2NS_2$
C %	50,77	50,63
H %	3,19	2,96
N %	6,01	5,90

Quest'*acido p- ossi- benzilidenrodaninico* si scioglie facilmente nell'alcool etilico, alcool amilico, acido acetico, etere acetico, etere, acetone, un po' meno nel benzolo e nel cloroformio; è insolubile nella ligroina.

Acido rodaninico e aldeide anisica $C_6H_4\begin{cases}OCH_3\ (4)\\ CH{=}C{-}S\\ \quad\ |\\ \quad CO{-}NH\end{cases}\!\!>CS$

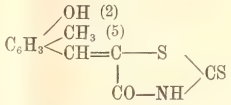
Il prodotto greggio ottenuto per condensazione dell'acido rodaninico coll'aldeide anisica in presenza di acido solforico concentrato, lo feci cristallizzare più volte nell'acido acetico caldo: giunsi così ad ottenerlo in aghetti gialli

che si fondono con decomposizione fra 230° e 242°, come riferiscono Andreasch e Zipser [1].

Non ho perciò creduto necessario analizzarlo.

Quest'*acido p- metossi-benzilidenrodaninico* è solubile nell'alcool, acido acetico, etere acetico, etere, acetone, poco nel benzolo e nel cloroformio, insolubile nella ligroina.

Acido rodaninico e aldeide p- omosalicilica



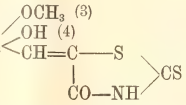
Il prodotto greggio ottenuto per condensazione dell'acido rodaninico coll'aldeide p- omosalicilica (che preparai dal p- cresolo secondo le indicazioni di Tiemann e Schotten [2]), lo feci cristallizzare nell'alcool diluito finchè raggiunse il punto di fusione costante 217°-218° decomponendosi.

Seccato a 100° dette all'analisi i seguenti resultati:

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_9O_2NS_2$
C %	52,36	52,58
H %	3,76	3,59
N %	5,62	5,58

Questo composto (*Acido 2- ossi- 5- metil- benzilidenrodaninico*) si deposita dall'alcool diluito in aghetti del colore del litargirio, facilmente solubili nell'alcool etilico, acido acetico, etere acetico, etere, acetone, discretamente nel benzolo e nel cloroformio, insolubili nella ligroina.

Acido rodaninico e vaniglina



Dalla vaniglina coi soliti processi di preparazione ottenni un composto che feci cristallizzare nell'acido acetico caldo, finchè giunsi ad averlo in aghetti di un colore giallo citrino col punto di fusione costante 227°-230°. Seccato alla stufa, dette all'analisi i seguenti resultati:

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_9O_3NS_2$
C %	49,14	49,43
H %	3,50	3,37
N %	5,30	5,24

[1] Andreasch e Zipser veramente riportano 130°-142°; ma, essendo così evidente la coincidenza, credo che si tratti di un errore di stampa.

[2] Tiemann e Schotten, B. 11, 773.

Questo prodotto di condensazione (*acido 4- ossi- 3- metossi- benzilidenrodaninico*) si scioglie facilmente nell'acido acetico, un po' meno nell'alcool etilico, nell'etere acetico e nell'acetone, ancora meno nell'etere, nel benzene e nel cloroformio: è insolubile nella ligroina.

Acido rodaninico e piperonalio $C_6H_3\begin{cases}O\\O\end{cases}CH_2\ \begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}$ $CH{=}C{-}{-}S$ $\rangle CS$ ($CO{-}NH$)

Il prodotto di condensazione ottenuto dall'acido rodaninico e piperonalio (*acido metilen- 3- 4- diossi-benzilidenrodaninico*) fu purificato con ripetute cristallizzazioni nell'acido acetico caldo: per raffreddamento si deposita in aghetti di un colore giallo volgente all'aranciato. Riscaldato, a 256° comincia a imbrunirsi, e a 258° si è già tutto trasformato in una massa nera semifusa (Il prodotto di Andreasch e Zipser è in aghi *gialli scuri*, che a 245° cominciano a imbrunirsi senza mostrare un chiaro punto di fusione).

Dopo essiccamento in stufa, il prodotto puro fu sottoposto all'analisi.

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_7O_3NS_2$
C %	49,64	49,81
H %	2,80	2,64
N %	5,28	5,28

Non si scioglie nella ligroina: si scioglie poco nell'alcool etilico, etere, acetone, benzene, cloroformio, di più nell'alcool amilico, acido acetico e etere acetico.

Acido rodaninico e aldeide cinnamica $C_6H_5 \cdot CH{=}CH{-}CH{=}C{-}{-}S$ $\rangle CS$ ($CO{-}NH$)

Il prodotto greggio lo purificai facendolo cristallizzare più volte nell'alcool caldo, finchè si fuse costantemente a 220°-221° (secondo Zipser si fonderebbe a 208°-211° con decomposizione).

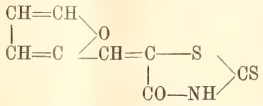
Dopo averlo seccato a 100° fu sottoposto all'analisi.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_9ONS_2$
C %	58,06	58,29
H %	3,72	3,65
N %	5,53	5,66

Quest'*acido cinnamilidenrodaninico* è in forma di aghetti gialli facilmente solubili nell'alcool, acido acetico, benzolo, acetone, un po' meno nell'etere, etere acetico e cloroformio, insolubili nella ligroina.

Per azione del bromo, in soluzione cloroformica, dà un composto bianco giallastro fusibile con decomposizione a circa 160°, su cui non ho creduto utile rivolgere in modo speciale l'attenzione.

Acido rodaninico e furfurolo



Aggiungendo acido solforico o acido cloridrico alla soluzione alcoolica di acido rodaninico e furfurolo, ottenevo sempre una sostanza nera amorfa e non l'atteso prodotto di condensazione. Ma però l'ho potuto preparare usando come condensante una soluzione concentrata di soda. Ad una soluzione di gr. 6 di acido rodaninico e gr. 5 di furfurolo in cm^3 50 di alcool aggiunsi un cm^3 di soluzione di soda al 40 %. Il liquido si riscaldò spontaneamente fino all'ebullizione e dopo qualche minuto si depositò una sostanza gialla rossastra. Per non lasciare troppo a lungo il prodotto di condensazione formatosi, in contatto con la soda che lo decompone, aggiunsi allora acido cloridrico fino a leggera reazione acida; frattanto la sostanza depositatasi, dapprima giallo rossastra, assunse un colore giallo chiaro. Il prodotto greggio così ottenuto fu fatto cristallizzare più volte nell'alcool caldo, da cui si deposita per raffreddamento in aghi di un colore giallo volgente all'aranciato. Comincia a 220° a fondersi decomponendosi e a 230° è fuso completamente in un liquido nero.

Seccato a 100° dette all'analisi i seguenti resultati:

	Trovato	Calcolato per $C_8H_5O_2NS_2$
C %	45,43	45,49
H %	2,53	2,37
N %	6,75	6,65

Questo prodotto di condensazione si scioglie facilmente nell'alcool, acido acetico, acetone, etere, cloroformio, poco nel benzolo: è insolubile nella ligroina.

Sono già a buon punto con lo studio di altri simili prodotti di condensazione. Dovendo lasciare ora il Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Siena, dove ho eseguito le ricerche descritte in questa Nota, ho creduto bene rendere noto quanto ho fatto fino ad ora: la descrizione dei nuovi prodotti di condensazione che sto studiando, sarà argomento di una prossima comunicazione.

Chimica. — *Su una nuova reazione colorata della colesterina* [1]. Nota del dott. D. Ottolenghi, presentata dal Socio A. Menozzi.

Alle molte reazioni qualitative della colesterina che già possediamo, Neuberg e Rauchwerger [2] ne hanno recentemente aggiunta una, la quale, se non è estremamente sensibile, ha però, secondo questi A. A., di fronte a tutte le altre, il pregio di valere a distinguere le colesterine dalle fitosterine.

Tale reazione si pratica nel modo seguente: in cm.^{3} 1,5 di una soluzione di colesterina nell'alcool assoluto si scioglie un piccolissimo frammento di ramnosio oppure si versano 1-2 goccie di soluzione di δ-metil furfurolo; si aggiunge in seguito l'egual volume di H_2SO_4 concentrato, e allora si vede formarsi nel piano di separazione dei due liquidi un anello colorato in rosso lampone. Agitando poi questi stessi liquidi, sotto una corrente d'acqua — in modo da impedire il loro soverchio riscaldamento —, la miscela che ne risulta assume tutta un bel colore lampone, e, esaminata allo spettroscopio, presenta una banda caratteristica d'assorbimento, che, da un lato, incomincia poco prima della linea E e, dall'altro lato, coincide con la linea *b*. La reazione è ancora ben manifesta quando si usi una soluzione di gr. 0,002 di colesterina per cm.^{3} 6 di alcool assoluto (= 0,033 %): ad una concentrazione metà della precedente, la colorazione che si ottiene è l'aranciato, ma essa passa al rosso lampone, per l'aggiunta di alcuni cm.^{3} d'alcool assoluto.

La reazione non è esclusiva della colesterina, perchè è data anche dagli acidi biliari liberi, dalla canfora, dal borneolo, dal mentolo e da altre sostanze, ma, ciò che più importa qui, riesce negativa con la fitosterina. Questa con metilfurfurolo e H_2SO_4 dà solo colorazione gialla che, per aggiunta di alcool assoluto, vira leggermente al rosa, e, allo spettroscopio, presenta una stria incostante nel giallo-verde.

Un comportamento così differente della fitosterina dalla colesterina avrebbe, oltre ad interesse teorico, anche notevole importanza pratica, per esempio, per il riconoscimento dei grassi animali mescolati ai vegetali, il quale, grazie alla reazione di Neuberg e Rauchwerger, diverrebbe assai semplice e spedito, tanto più che questa reazione si ottiene ugualmente netta anche quando venga praticata su colesterina non interamente depurata.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica agraria della R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano.

[2] Carl Neuberg und Dora Rauchwerger, *Ueber eine neue Reaction auf Cholesterin* (Sonder Abdruck aus: Salkowski, Festschrift).

Gli A. A. però, sebbene accennino alla possibilità di tale applicazioni pratiche, non hanno istituito le loro ricerche in proposito che su una sola fitosterina, di cui non dicono l'origine: onde a me parve opportuno di prendere in esame, da questo punto di vista, parecchie colesterine e fitosterine a un tempo, sia per vedere se effettivamente fra colesterina e fitosterina vi siano sempre le differenze riscontrate da loro, e sia per ricercare se, eventualmente, non vi fosse qualche variazione di comportamento fra fitosterine di diversa origine.

Grazie alla squisita cortesia del prof. Menozzi, il quale possiede numerosi campioni di tali sostanze, ho potuto sperimentare sulla colesterina dell'uovo (che, secondo i suoi studî, è identica a quella del latte e della bile) e sulla colesterina dell'olio che si può estrarre dalle crisalidi del baco da seta, e poi sulle fitosterine dell'olio di pomidori, di noci, dei semi di popone, del maiz. Dal canto mio, mi sono preparata per questo scopo un po' di fitosterina dell'olio d'oliva, ed ho anche assoggettato alle stesse prove l'ergosterina, che avevo isolato dal grasso della segale cornuta per altri studî.

Affine di avere risultati ben paragonabili fra loro e quindi più sicuri, ho allestito con ciascuna di tali sostanze soluzioni di egual concentrazione in alcool assoluto, usando poi la stessa quantità e di queste soluzioni e di H_2SO_4; e, a parte alcune ricerche preliminari, invece che del ramnosio, del quale difficilmente avrei potuto adoperare in ogni prova la stessa dose — poichè, come già si disse, ne occorre appena una traccia —, mi sono valso di una soluzione di metilfurfurolo, ottenuta, secondo le indicazioni di Neuberg e Rauchwerger, distillando 5 gr. di ramnosio puro cristallizzato sciolto in 20 cm^3 d'acqua e addizionato di 5 cm^3 di H_2SO_4, aggiungendo mano mano acqua fino a raccogliere in tutto 250 cm^3 di distillato.

Ogni reazione fu fatta con cm^3 1,5 — quantità raccomandata dai citati A. A. — di soluzione di colesterina o di fitosterina nelle tre concentrazioni: 0,004 — 0,002 — 0,001 per cm^3 6 di alcool assoluto, con 2 goccie della soluzione di metilfurfurolo e con cm^3 1,5 di H_2SO_4. Per l'esame spettroscopico usai scatolette di vetro di ugual capacità e spessore, dopo aver fissato la posizione della scala e il valore delle sue divisioni con le strie d'assorbimento del Na e del Li. In quanto si dirà in seguito, i valori letti sulla scala si riferiscono ad una scala avente i seguenti punti fissi: Li = 32, Na = 50 e quindi E = 71, b = 75,25.

Orbene, le numerose prove fatte, e non solo nei modi indicati finora, ma anche variando maggiormente la quantità di colesterina e usando il ramnosio in luogo del metilfurfurolo, hanno dato tutte risultati perfettamente concordanti, onde basterà riportare nella tabella seguente, come esempio, uno degli esperimenti fatti. Ad essa occorre aggiungere solo: 1°, che anche la fitosterina dell'olio di oliva — sia pura, sia greggia — e l'ergosterina reagiscono esattamente nel modo dichiarato come tipico della colesterina da

Neuberg e Rauchwerger; 2°, che, per concentrazioni non inferiori al 0,004 di colesterina o di fitosterina per 6 di alcool assoluto, si osserva talora allo spettroscopio una seconda banda d'assorbimento che va dal 47 al 53 circa; 3°, che la colorazione tipica rosso lampone nelle prove in cui, dopo agitazione, furono aggiunti 2-3 cm^3 d'alcool assoluto, passa abbastanza rapidamente al rosso magenta e poi al paonazzo cupo, e che questa stessa variazione di tinta, ma in un tempo più lungo (circa 24 ore) si osserva anche nelle prove non diluite, sopratutto per le soluzioni di colesterina o di fitosterina al 0,004 : 6.

Pertanto, se dall'esame della tabella, che, ripeto, può valere come esempio tipico di tutte le esperienze che praticai, risulta qualche diversità di comportamento fra le sostanze studiate, da essa però e da quanto sono venuto dicendo appare evidente pure che tale diversità consiste solo nell'essere la reazione più o meno spiccata, ma non è mai di tal natura da condurci ad ammettere, come vorrebbero Neuberg e Rauchwerger, una differenza sostanziale nel modo di reagire delle colesterine e delle fitosterine (almeno nei casi esaminati da me) col metilfurfurolo e l'H_2SO_4. Anzi, le diversità osservate sono tanto poco profonde che, non solo non pare possibile fondare su di esse un saggio qualitativo differenziale fra colesterine e fitosterine, ma anche non può escludersi il dubbio che, tolte di mezzo tutte le cause d'errore che possono aversi adoperando, come nel caso presente, soluzioni molto diluite, che cioè in condizioni perfettamente identiche d'esperimento, si sarebbero avuti risultati assolutamente identici dalle colesterine e dalle fitosterine.

Concentrazione: 0,004 : 6.

Colesterina o fitosterina di	Piano di separazione dei due liquidi	Miscela dopo agitazione	Spettroscopia (estensione della banda d'assorbimento)
Ovo	rosso lampone	rosso lampone	da 57.9 a 86
Crisalidi . .	»	»	» 57.9 a 86
Pomidoro . .	»	»	» 57.9 a 86
Noci	»	»	» 57.9 a 86
Popone . . .	»	»	» 57.9 a 86
Maiz	»	»	» 60.8 a 73.7

Concentrazione: 0,002 : 6.

Colesterina o fitosterina di	Piano di separazione dei due liquidi	Miscela dopo agitazione (1)	Miscela dopo agitazione e aggiunta successiva di cm³ 3 di alc. assoluto	Spettroscopia (estensione della banda d'assorbimento)
Ovo	rosso lampone	giallo roseo	rosso lampone	da 62.2 a 75.2
Crisalidi. . .	"	"	"	" 62.2 a 75.2
Pomidoro . .	"	rosso lampone	"	" 62.2 a 75.2
Noci	"	giallo ranciato	"	" 62.2 a 75.2
Popone . . .	"	rosso lampone pall.	"	" 62.2 a 75.2 (²)
Maiz	rosso lamp. pall.	giallo roseo	rosso lampone pall.	" 62.2 a 75.2 (²)

Concentrazione: 0,001 : 6.

Colesterina o fitosterina di	Piano di separazione dei due liquidi	Miscela dopo agitazione (1)	Miscela dopo agitazione e aggiunta successiva di cm³ 3 di alc. assoluto	Spettroscopia (estensione della banda d'assorbimento)
Ovo	rosso lampone	giallo paglierino	rosso lampone	da 68 a 75.2
Crisalidi. . .	"	giallo ranciato	"	" 68 a 75.2
Pomidoro . .	"	giallo roseo	"	" 68 a 75.2
Noci	"	giallo paglierino	rosso lampone pall.	" 68 a 75.2 (²)
Popone . . .	"	giallo roseo	"	" 68 a 75.2 (²)
Maiz	giallo roseo	giallo paglier. pall.	"	" 68 a 75.2 (³)

N. B. — La spettroscopia si riferisce sempre alle prove non diluite con alcool, eccetto che per la concentrazione 0,004 : 6. In questo caso, non avendo a disposizione scatolette di vetro che permettessero di esaminare i liquidi sotto uno strato di spessore inferiore ai mm 5, bisognò diluire le miscele con l'egual volume di alcool assoluto, per non avere l'assorbimento diffuso di quasi tutto lo spettro.

(¹) Appena s'incominciano ad agitare i due liquidi, si ha veramente colorazione rosso lampone, più o meno intensa; ma essa, specialmente per la concentrazione 0,001 : 6, cede quasi subito il posto all'altro colore che è stato segnato nella tabella. Questo, alla sua volta, suole permanere solo poche ore e poi virare definitivamente al rosso lampone.

(²) Per vedere la banda d'assorbimento bisogna usare uno strato di liquido di spessore quasi doppio di quello sufficiente per gli altri campioni della stessa serie.

(³) Solo aumentando notevolmente lo spessore dello strato di liquido, si riesce ad avere la banda caratteristica d'assorbimento, sebbene debolissima.

Chimica agraria. — *Sulla spontanea formazione della diciandiamide nei prodotti concimanti contenenti cianamide calcica.* Nota del dott. R. Perotti, presentata dal Socio E. Paternò.

Fino dall'anno 1903 mi si presentò l'occasione d'iniziare alcune ricerche su un nuovo concime azotato contenente come principio attivo la calciocianamide, conosciuto sotto il nome di « Kalkstickstoff » e che il prof. G. Cuboni potè procurarmi, per mezzo del R. Enotecnico italiano di Berlino, direttamente dalla « Cyanid-Gesellschaft ».

Il campione gentilmente inviatomi era alquanto abbondante, così che con esso potei lavorare per oltre due anni pur rimanendomene al presente una certa quantità. Fu appunto durante questo tempo, in cui a più riprese dovetti servirmi di esso, ch'ebbi agio di notare alcuni fatti per i quali mi si dimostrò che il prodotto, quale è posto in commercio, va soggetto a notevoli mutamenti della propria composizione, di alcuni dei quali non subito potei rendermi ragione.

Lasciando da parte la perdita di ammoniaca cui dà luogo il concime e che già feci notare, specialmente se esso non è conservato in ambiente secco, debbo ora limitarmi a segnalare un'alterazione cui il medesimo va incontro relativamente al contenuto in cianamide calcica, e che deve ritenersi di una molto maggiore importanza poichè, mentre alla perdita di ammoniaca è sempre possibile ovviare senza risentire temibili conseguenze, non può dirsi quali queste possano riuscire quando cambia il titolo in cianamide calcica del prodotto per il fatto della spontanea trasformazione di essa in diciandiamide come nella presente Nota vengo a dimostrare.

È noto come tenessi dietro al contenuto in calciocianamide del prodotto ed alle variazioni ch'essa potesse subire dosando con un nuovo metodo la calciocianamide stessa, precipitandola dalle soluzioni acquose con nitrato di argento centinormale in presenza di piccole quantità di ammoniaca [1]. Anzi, colgo la presente occasione per dire che in seguito ad ulteriori numerose determinazioni eseguite, debbo dichiararmi perfettamente soddisfatto del metodo stesso che ho trovato capace di fornirmi le migliori approssimazioni desiderabili.

Pienamente compreso quindi della sicurezza del processo analitico, potei ben presto assodare la circostanza che nel campione del concime il quale

[1] R. Perotti, *Dosaggio della cianamide ed applicazioni.* Gazz. chim. ital., t. XXXV, p. II, 1905.

formava oggetto del mio studio, con il progredire del tempo, andava continuamente scemando il titolo in CN_2Ca.

Infatti una serie di determinazioni eseguite in diverse epoche degli anni 1904 e 1905 su di esso, mi portò a dei risultati sui quali non poteva cadere dubbio e che qui appresso riassumo:

Per cento:

marzo	1904	CN_2Ca	=	14,60
maggio	»	»	=	13,30
ottobre	»	»	=	9,35
»	1905	»	=	0,87 0,80

Per essi si scorge quale diminuzione subisse la calciocianamide, la quale al presente non costituisce che una parte minima del peso dell'intero concime ed appena il 5,8 % della calciocianamide contenuta nel campione al principio delle ricerche.

Stabilito un tale fatto, per fare un primo passo verso la spiegazione di esso, tentai determinare se questa scomparsa della calciocianamide s'accordasse con una qualche perdita dell'azoto contenuto nel concime; ma eseguito il dosaggio dell'azoto totale di esso, col metodo Kyeldhal, ottenni:

Per cento:

$$N = \begin{cases} 12.63 \\ 12,20 \end{cases}$$

mentre originariamente il campione ne conteneva il 15,80 %; cosicchè, pur constatando una perdita di circa il 3,30 % di azoto, questa non poteva in alcun modo spiegarmi la notevole diminuzione della calciocianamide in parola.

Conclusi che dessa dovesse trasformarsi in altri composti.

E per intraprendere sistematicamente le ricerche atte a portarmi alla conoscenza di questi composti, incominciai dal preparare l'estratto alcoolico del concime, dal determinare la percentuale e dal fare con esso alcuni primi saggi.

In un palloncino tarato da gr. 250 pesai gr. 2,5 del mio campione di « Kalkstickstoff » e versai su di esso dell'alcool ad 80° fino al volume segnato. Dopo avere accuratamente agitato il tutto, lasciai in riposo il recipiente per 48 ore, trascorse le quali filtrai il liquido procurando di mantenerne costante il volume.

I. Cm^3 25,0 di questa soluzione svaporati a bagnomaria e seccati a 110° C dettero un residuo di gr. 0,0455;

II. Cm^3 50,0 della medesima soluzione svaporati e seccati come sopra, dettero un residuo di gr. 0,0885;

Per cento:

$$\text{estratto} = \begin{cases} 18,20 \\ 17,70 \end{cases}$$

Il residuo cristallizzato di queste e di altre successive svaporazioni, ripreso con acqua distillata, fornì una soluzione che, separata per filtrazione da una piccolissima quantità di sostanze insolubili, con nitrato d'argento in ambiente ammoniacale non dette alcun apprezzabile precipitato, che invece si ottenne con lo stesso reattivo acido per HNO_3, di color bianco, non alterabile alla luce e solubile in eccesso di NH_3.

Procedei ad una preparazione in grande della sostanza cristallina segnalata, operando l'estratto alcoolico con 100 gr. del concime in 200 cm^3 di alcool ad 80°: svaporando poi questo e depurando il residuo cristallizzandolo altre due volte dall'alcool ed infine una terza volta dall'acqua.

Ottenni per tal mezzo una bellissima sostanza unica cristallizzata che non tardai a riconoscere per diciandiamide.

Infatti la sostanza cristallizza dall'acqua e dall'alcool in cui non è molto solubile, in sottili tavole o fogliette trimetriche, riunite in grandi ciuffi cristallini, insolubili in etere.

Brucia completamente.

Fonde a 205° C precisi.

La soluzione acquosa precipita con nitrato di argento in aghi bianchi difficilmente solubili in acqua a freddo e contenente HNO_3; più facilmente a caldo.

Volli eseguire alcune determinazioni di azoto su una parte della sostanza nuovamente depurata ed essiccata nel vuoto.

I. Gr. 0,0842 di sostanza dettero cm^3 47,8 di azoto alla temperatura di 15,0° C ed alla pressione di 758 mm.

II. Gr. 0,0754 di sostanza dettero cm^3 44,2 di azoto alla temperatura di 19,0° C ed alla pressione di 749 mm.

Per cento:

	Trovato I	Trovato II	Calcolato per $C_2N_4H_4$
N =	66,31	66,39	66,66

Ma se tali analisi stabiliscono che la sostanza non possa essere cianamide calcica poichè l'azoto calcolato per CN_2Ca sarebbe $= 35,0\ \%$, lasciano il dubbio che essa possa avere una formola metà di quella calcolata ed essere semplicemente cianamide: CN_2H_2. Perciò, ad evitare qualsiasi obbiezione, ho voluto determinare il peso molecolare del composto valendomi della combinazione ch'esso forma con il nitrato di argento.

Specialmente per i lavori di F. Beilstein e di A. Geuther [1], si trovò fin da parecchio tempo fa che il composto ottenuto trattando la soluzione acquosa della diciandiamide con nitrato d'argento ha la formola:

$$C_2N_4H_4 . AgNO_3$$

ed esso può ottenersi puro con non molta difficoltà. Preparato quindi un tale composto, lavatolo con acqua fredda ripetute volte ed essiccatolo nel vuoto, procedetti alla determinazione in esso dell'argento mediante semplice calcinazione.

I. Gr. 0,2015 della sostanza calcinata in crogiuolo di porcellana dettero a costanza di peso gr. 0,0855 di argento metallico.

II. Gr. 0,1940 della medesima nello stesso modo trattati dettero gr. 0,0820 di argento metallico.

Per cento:

	Trovato I	Trovato II	Calcolato per $C_2H_4N_4.AgNO_3$
Ag =	42,4	42,2	42,5

Per la concordanza di queste cifre, nonchè per la genesi e per i caratteri fisici e chimici, rimane dimostrata la natura del derivato argentico così che, ponendo Ag = 108, la percentuale della sostanza con esso combinata, detratto il peso del gruppo NO_3, porta ad una cifra di 84 che rappresenta il peso molecolare della diciandiamide.

Quantunque il fatto della spontanea trasformazione della cianamide in diciandiamide fosse già noto, pure la dimostrazione del medesimo fatto verificantesi nel prodotto concimante posto in commercio e contenente calciocianamide — con la quale potrebbe forse ottenersi con una certa facilità, poichè alla tendenza della cianamide a polimerizzarsi, s'accoppierebbe la capacità dell'atomo di calcio a distaccarsi e ad idratarsi per azione dell'umidità ambiente — mi pare che debba essere preso in molta considerazione. E ciò non tanto per la circostanza che la conoscenza di esso viene a gettare una maggiore luce sulla composizione chimica e sulle proprietà del concime, il quale viene a presentarsi sempre sotto qualche punto di vista nuovo ed interessante, quanto anche perchè con esso è possibile ottenere la spiegazione di alcuni fatti dei quali finora non si poteva dire la ragione.

Accennerò a tal proposito ad una divergenza sorta tra i risultati degli studi miei e quelli del prof. A. Frank di Charlottenburg, l'illustre preparatore del prodotto artificiale concimante in questione.

[1] F. Beilstein u. A. Geuther, *Notiz über des Dicyandiamid*, Ann. 123, 241.

Questi, in una visita di cui recentemente onorò il laboratorio ove lavoro, mi fece notare come io avessi altra volta sostenuto che non tutto l'azoto contenuto nel « Kalkstickstoff » si trovasse sotto forma di calciocianamide, ma che solo una terza parte di esso appartenesse a questa combinazione. Deducevo ciò dalle concordanti titolazioni ottenute con nitrato d'argento ammoniacale centinormale sul campione del prodotto che era a mia disposizione e che avevano portato ad un contenuto in CN_2Ca del 14,60 %, mentre quello dell'azoto totale era del 15,80 %. Il Frank d'altra parte, preparando la calciocianamide per mezzo dell'estratto del concime, trovava l'azoto totale sensibilmente concordante con il peso di quella, e sosteneva in conseguenza che l'azoto del prodotto trovavasi esclusivamente sotto forma di cianamide calcica.

Ora, pur ammettendo che il metodo seguito dal Frank non potesse presentare qualche lato debole, dato quanto ho di sopra esposto circa la spontanea trasformazione della calciocianamide in diciandiamide, la quale non dà precipitato con nitrato di argento ammoniacale e che perciò non può venir dosata con il mio metodo come la calciocianamide quando si trova nelle soluzioni acquose, è facile mettere d'accordo i due modi di vedere. Il Frank possedendo campioni di recente fabbricazione, poteva benissimo trovare la quasi totalità dell'azoto sotto forma di CN_2Ca: io che avevo un campione già da parecchio tempo preparato, trovavo che la calciocianamide rappresentava solo una parte dell'azoto totale. Ho, difatti, sufficientemente illustrato come il tenore in calciocianamide del mio campione andasse con una certa rapidità scemando fino a divenire quasi nullo, così che l'azoto residuo nel campione per il 12,5 % viene sensibilmente a corrispondere a quello contenuto nell'estratto alcoolico che, aggirandosi intorno al 18 %, è dato quasi esclusivamente da diciandiamide.

Ma ben altro interesse presenta il fatto della spontanea trasformazione della calciocianamide in diciandiamide, per le conseguenze che possono derivarne in rapporto alla utilizzazione del prodotto nella pratica agricola.

Il concime si trasforma. In esso si produce con una certa facilità diciandiamide; così che molto difficilmente è possibile si dia il caso che in un campione non si trovi in quantità maggiori o minori questo composto. Ora, si deve constatare come in tutti gli studi — che ormai cominciano ad essere veramente numerosi — istituitisi con il « Kalkstickstoff », non si è tenuto affatto conto della diciandiamide e per un pezzo si è seguitato ad attribuire le proprietà fisiche, chimiche, fisiologiche e concimanti del prodotto soltanto alla calciocianamide o ad altri composti più o meno ipotetici quali l'azoturo di calcio. Si rende quindi palese la necessità d'invadere tutto un nuovo campo di ricerche, dalle quali per ora non si può dire che cosa potrà conseguire.

Se alla diciandiamide soltanto, od alla calciocianamide, od in quale mi-

sura all'una ed all'altra si debbano attribuire le proprietà venefiche del « Kalkstickstoff »; se alla prima anzichè alla seconda spetti un maggior valore concimante; quale ufficio la diciandiamide — che si forma come primo prodotto dell'azione dell'acqua sulla calciocianamide — compia nei processi di pratica trasformazione del prodotto; quale convenienza od altro possa eventualmente esservi nel favorire industrialmente lo spontaneo processo della trasformazione della calciocianamide in diciandiamide, ecc., sono tutti quesiti che io mi sono già proposti, ed ai quali spero di poter dare prossimamente una risposta sperimentale.

Fisiologia. — *Sul riflesso orbicolare delle palpebre nel pesecane* (*Scyllium*) [1]. Nota del dott. G. VAN RYNBERK, presentata dal Socio L. LUCIANI.

È noto quanta importanza la clinica neuropatologica attribuisce alle varie modalità del riflesso orbicolare delle palpebre nell'uomo [2]. Nel corso d'alcuni sperimenti sulla respirazione nei pescicani (*Scyllium catulus*) [3] ebbi l'agio di osservare alcuni fatti in riguardo a questo riflesso, che mi sembrarono interessanti, sicchè ne feci l'oggetto d'una piccola ricerca apposita, procedendo nel seguente modo.

Sospendeva uno Scillio orizzontalmente a fior d'acqua, mediante un laccio piuttosto lento intorno al tronco, subito dietro alle pinne toraciche, ed un altro, stretto, alla coda. Dopo pochi minuti di rabbiosa ribellione gli animali si adattano a questa posizione e si mantengono tranquilli, respirando regolarmente.

A questo punto io cominciava una serie di stimolazioni meccaniche in varie parti del corpo per vedere da quali punti ed in quali condizioni mi fosse dato osservare il riflesso. Come stimolo debole mi serviva una lunga spilla applicata colla punta o colla capocchia, per semplice contatto o per strisciamento. Come stimolo forte usava una pinza diritta, a punte acute, colla quale sollevava cautamente e stringeva una piccola piega di cute o di mucosa. I risultati di questi sperimenti sono i seguenti.

(1) Lavoro eseguito nella sezione di Fisiologia della Stazione Zoologica di Napoli durante l'estate 1905.

(2) Per la discussione critica dei fatti vedi U. Cerletti, *Sopra un nuovo riflesso del volto*. Annali dell'Istituto Psichiatrico della R. Università di Roma, vol. I, 1902; ed A. Zeri, *Del riflesso trigemino facciale o trigemino orbicolare delle palpebre*. Ibidem, vol. III, fasc. 2°, pag. 269-304, 1904; i quali autori danno pure per esteso la letteratura dell'argomento.

(3) Vedi le Note precedenti in questi Rendiconti, vol. XIV, 2° sem. 1905, fasc. 9, 10 e 12.

a. Chiusura certa, totale ed immediata dell'occhio si ottiene costantemente mediante la stimolazione meccanica anche lievissima della cornea.

b. Parimenti si ottiene costantemente la certa, totale ed immediata chiusura dell'occhio, mediante lievissima stimolazione meccanica della cute immediatamente intorno all'occhio, e specialmente di quella della palpebra inferiore, e dell'arcata orbitale, e di quella intorno allo sfiatatoio.

c. Chiusura spesso incerta, spesso non totale, nè immediata, si può ottenere con minor costanza dalla stimolazione meccanica leggera o mediocremente intensa della cute del lato equilaterale del capo entro un territorio limitato all' interno dalla linea mediana dorsale, in avanti e lateralmente da una linea che divide la faccia inferiore (bianca) del capo da quella superiore, pigmentata. All' indietro ho trovata la delimitazione più difficile e meno sicura. Talvolta non poteva, con stimoli di mediocre intensità (strisciare colla punta d'una spilla) ottener il riflesso dalla cute al livello della 1ª fessura branchiale.Talora invece ho visto con certezza che questo stimolo provocava il riflesso perfino dall'opercolo dell'ultima fissura branchiale. Più indietro di questo punto non l'ho ottenuto mai mai con questo stimolo.

d. Chiusura certa, totale ed immediata dell'occhio si ottiene con stimolo più forte (pinza) dalla cute della mascella inferiore.

e. Da tutto il resto della cute del corpo la stimolazione meccanica intensissima può provocare la chiusura dell'occhio, ma ciò non è costante, e la chiusura non è mai totale ma si riduce per lo più ad un lieve strizzamento.

f. La stimolazione meccanica lievissima della mucosa dell'apertura nasale produce costantemente la chiusura certa, totale ed immediata dell'occhio dello stesso lato.

g. La stimolazione meccanica della mucosa buccale, dello sfiatatoio e delle branchie, provoca chiusura dell'occhio soltanto quando ha luogo contemporaneamente il riflesso della violenta espulsione dell'acqua dalla cavità orale e dalle branchie. Infatti, la medesima stimolazione, applicata nei punti detti, quando si tiene l'animale fuori dell'acqua, non provoca quasi mai la chiusura dell'occhio, come non provoca quasi mai uno sforzo espulsivo, inutile in quelle condizioni.

Riassumendo, si può dire che una certa azione riflessa sulla chiusura dell'occhio si può esercitare da qualunque punto della superficie del corpo, ma che una determinata zona di cute e di mucosa nel capo è atta a ciò in modo speciale.

Le attuali conoscenze morfologiche assai scarse intorno all'esatta distribuzione periferica dei nervi encefalici dei selacei, ci permettono di dire poco di sicuro sul probabile sostrato anatomico dei fatti enunciati. È probabile però che le vie afferenti della zona ove il riflesso è più vivo, più pronto e più costante, decorrano tutte nel trigemino, il quale è anche negli Scilli un nervo potentissimo e che domina un territorio cutaneo esteso. Le vie efferenti

poi sono certamente costituite dal facciale, il quale è pure il nervo motore principale dei movimenti respiratorii, cui appartiene anche il riflesso espulsivo dell'acqua dalla cavità orale. La correlazione sopra notata tra questo riflesso e la chiusura dell'occhio si può dunque interpretare facilmente.

In base a quanto precede credo poter formulare, colle debite riserve ora espresse, le seguenti conclusioni.

1. Negli Scilli si può ottenere la chiusura riflessa dell'occhio, con stimoli meccanici relativamente leggeri da tutto il territorio di distribuzione cutanea del trigemino, e dalla mucosa nasale.

2. Dalla mucosa orale e branchiale invece il riflesso ha luogo soltanto in correlazione e subordinatamente a quello dell'espulsione dell'acqua dalle cavità respiratorie.

Biologia. — *Sulla distruzione degli oociti nelle regine dei Termitidi infette da Protozoi ed altre ricerche sull'ovario degli insetti.* Nota di G. Brunelli, presentata dal Socio B. Grassi.

1. Facendo seguito alla mia precedente Nota nella quale ho dimostrato che nelle regine dei Termitidi infette da Protozoi si ha un vero caso di castrazione parassitaria indiretta, io voglio qui esporre, come annunciai, quale sia lo stato attuale delle nostre conoscenze rispetto alla produzione della sterilità nelle caste neutre dei diversi insetti sociali.

Ormai, in generale, tutti sono d'accordo nell'ammettere che le caste dei neutri siano un'acquisizione secondaria nella vita sociale degli insetti (1).

A proposito della produzione della sterilità sono nate molte discussioni, e poichè si è parlato di una castrazione alimentare e nutriciale, sento qui l'obbligo di ricordare lo stato attuale della quistione, tanto più che le scoperte di Grassi sui Termiti hanno offerto argomento a coloro che di tale problema si sono occupati, a cominciare dallo stesso Spencer (2).

S'intende che io non voglio qui entrare nella discussione concernente la differenziazione di diverse forme nelle caste sterili, ma s'intende pure che il problema che riguarda l'origine della sterilità, si confonde col problema complesso del polimorfismo degli insetti sociali.

2. È noto che Weismann (3) con delle esperienze sulla *Calliphora* ha cercato di dimostrare che dalle larve male nutrite provengono degli individui

(1) Cope, E. D., *Heredity in the Social Colonies of the Hymenoptera.* Proc. Acad. N. Sc. Philadelphia, 1893, pag. 436-438; Plate, L., *Ueber die Bedeutung des Darwin'schen Selectionsprincips und Probleme der Artbildung.* 2. Aufl. Leipzig, 1903; Buttel-Reepen H. von, *Die Stammesgeschichtliche Entstehung des Bienenstaates.* Leipzig, 1903.

(2) Spencer, H., *Weismannism once more.* Contemp. Rev. V. 66. Oct. 1694, pag. 592-608, vedi pagg. 606-7.

(3) Weismann, A., *Vorträge über Deszendenztheorie.* 2. Aufl. 1. Bd. Jena, 1904.

sessualmente maturi, così rapidamente come dalle larve ben nutrite. Le conclusioni però che l'illustre autore ha tratto da questa esperienza, sembrano eccessive rispetto alla ipotesi che negli insetti sociali la nutrizione non influisca se non in quanto nel plasma germinativo esistono già i determinanti differenti per le caste neutre (1).

Come si sa, le due opposte teorie per spiegare la differenziazione in individui sterili e in individui fecondi sono offerte dai neo-Lamarckiani con Spencer e dai neo-Darwiniani con Weismann, anzi come dice lo Spencer (2), il cavallo di battaglia di Weismann contro il neo-lamarckismo è offerto dagli insetti sociali.

La teoria dello Spencer (Fütterungstheorie) ammette che l'influenza della nutrizione determini essenzialmente il dimorfismo e il polimorfismo degli insetti sociali.

Come è ben noto, a questa teoria si è opposto il Weismann, negli insetti sociali trovando facilmente a sostenere la non ereditarietà dei caratteri acquisiti per la sterilità delle operaie.

Spencer ha lasciato a sua volta facile presa ai Weismanniani sostenendo la ipotesi poco probabile che le caratteristiche delle operaie provengano loro da uno stato presociale.

Le celebri polemiche apparse nella The Contemporary Review (anni 1893-1894) ebbero un lungo seguito. I nuovi attacchi di Weismann (*Neu Gedanken zur Vererbungsfrage*. Jena, 1895) allo Spencer lasciarono l'argomento tutt'altro che soluto.

3. Secondo Weismann la selezione naturale ha prodotto nel plasma germinativo dei determinanti speciali per le operaie e per le regine, e questi determinanti sotto l'influenza di cause esterne agenti come stimoli (Entwicklungsreize) (3), possono essere spinti a svolgersi in modo indipendente prevalendo gli uni sugli altri, o per esprimerci col Wasmann (4), le differenziazioni sono blastogene nel loro abbozzo, e solo nella realizzazione somatogene.

(1) Lo stesso prof. Emery ha scritto: « Tant que des recherches plus nombreuses et plus exactes n'auront pas été faites sur l'influence de différentes qualités et quantités d'aliment sur le développement larvaire des organes sexuels, les résultats négatifs obtenus par M. Weismann, par la simple réduction quantitative de l'aliment sur les larves de Calliphora vomitoria, ne suffiront pas à exclure la possibilité d'une castration alimentaire chez des Insectes non sociaux, ni à prouver que, chez les Insectes sociaux, le germe doit renfermer des déterminants particuliers de stérilité pour la formation des neutres ». C. Emery., *Le polymorphisme des fourmis et la castration alimentaire*. C. R. 3e Congrès Zool. intern. Leyde, 1895, pag. 395-410.

(2) Spencer, H., *A rejoinder to Prof. Weismann*. Contemp. Rev. V. 64. Dec. 1893, pag. 893-912.

(3) Weismann, A., *Aüssere Einflusse als Entwickelungsreize*. Jena, 1894.

(4) Wasmann, E., *Die ergatogynen Formen bei den Ameisen und ihre Erklärung*. 15 Bd. 1895. N. 16 pag. 606-622. N. 17 pag. 625-646.

La teoria di Weismann però, come ricorda il Marchal [1], pecca nelle sue basi, secondo O. Hertwig e Delage, e nel caso speciale degli insetti sociali la complicazione del plasma germinativo ammessa da Weismann sembra poco probabile.

4. Il prof. Emery [2] partendo dal fatto esattamente provato che nelle Api e nelle Termiti (secondo la scoperta di Grassi) lo sviluppo della fecondità dipende dal nutrimento che ricevono le larve, ha supposto che lo stesso avvenga per le formiche, e che la formazione dei neutri in generale sia dovuta a una castrazione alimentare.

Diversi elementi somatogeni intervengono, secondo Emery, nel risultato definitivo e di essi essenzialmente è la nutrizione di cui la qualità determina la fecondità e la sterilità, e la quantità gli altri caratteri somatici differenziali (determinazione delle diverse caste dei neutri).

O. Hertwig ha creduto di poter rivolgere contro la teoria dei determinanti di Weismann e il principio della preformazione in generale, gli argomenti prima addotti dall'Emery, sostenendo che sotto diversi influssi esterni può lo stesso germe sviluppare diversi prodotti finali.

Emery [3] esprimendosi allora con maggior determinazione, ha rilevato che pur astraendo da ogni teoria toccante la struttura intima del plasma germinativo, è spinto ad ammettere che le forme degli Imenotteri polimorfi non siano soltanto di origine somatogena (risiedente nella qualità e quantità dell'alimento fornito alle larve, nella temperatura, ecc.), ma in parte blastogena per l'esistenza nel plasma germinativo di un elemento blastogeno in relazione con una capacità di assimilazione o di accrescimento determinata.

Si deve poi ricordare che il Forel ha cercato di negare l'importanza della nutrizione nella determinazione delle caste sterili delle formiche, dichiarando il fattore del nutrimento impotente a spiegare nelle formiche la produzione di quelle forme intermedie tra regine e operaie, che diconsi ergatogine. Da un altro punto di vista Forel, specialmente in base agli studî di Janet e di Wheeler (sulla impossibilità di una qualitativa distribuzione di alimento in certe formiche) è tornato [4] anche di recente ad opporsi all'Emery,

(1) Marchal, P., *La reproduction et l'évolution des guêpes sociales.* Arch. de Zool. exp. et gén. 3e sér., t. 4, 1896. Paris, pag. 1-100.

(2) Emery, C., *Die Enstehung und Ausbildung des Arbeiterstandes bei den Ameisen.* Biol. Cbl. 14. Bd. N. 2. 1894, pagg. 53-59.

(3) Emery, C.,, *Le polymorphisme des fourmis et la castration alimentaire.* C. R. 3e Congrès Zool. intern. Leyde, 1895, pagg. 395-410. Per le idee di Hertwig sui neutri degli insetti sociali si consultino: Hertwig, O., *Die Zelle und die Gewebe.* Grundzüge der allgemeinen Anatomie und Physiologie. Jena, 1893 e seg.; *Zeit- und Streitfragen der Biologie.* Heft 1: *Praeformation oder Epigenese?* Grundzüge einer Entwicklungstheorie der Organismen. Jena, 1894.

(4) Forel, A., *Ueber Polymorphismus und Variation bei den Ameisen.* Zool. Jahr.

Però le nostre cognizioni sulla evoluzione della vita sociale nelle formiche non sembrano sufficienti per giustificare l'opposizione del Forel, e il prof. Emery fece già notare che nei Termiti, benchè tanto diversi nella conformazione dalle api, non può negarsi l'importanza della nutrizione nei fenomeni che ci occupano.

5. La pura teoria di Weismann ha in ogni modo perduto terreno, e non si può negare che per le suddette idee la dottrina Spenceriana non abbia invece guadagnato. È importante notare che quelle speciali forme di ergatogine le quali secondo Weismann e Forel avrebbero una origine esclusivamente blastogena, hanno invece una causa somatogena, come ha posto in luce il Wasmann (1). Che questi poi, malgrado ciò, seguiti ad ammettere plasmi doppi e multipli di Weismann è un'altra quistione (Wasmann avverte che la espressione causa somatogena non è da lui usata nello stesso senso che per le variazioni occasionate nelle imagini dagli stimoli esterni, poichè la vita larvale è un prolungamento della vita embrionale!).

È noto che nei formicai della *Formica sanguinea* la *Lomechusa strumosa* e nella *Formica rufa* l'*Atemeles pubicollis*, usufruendo del nutrimento destinato alle larve delle formiche e divorando anche le larve stesse, costringono indirettamente alla sterilità altre larve che avevano cominciato a evolversi secondo il tipo sessuato; si originano così delle forme intermedie tra le regine, le operaie e le così dette pseudogine (Wasmann).

La Hemmungs-Lomechusa-Hypothese del Wasmann stabilita sui nominati fatti è molto importante, perchè fa vedere quale importanza abbia la nutrizione nei fenomeni di polimorfismo, di più poichè in fin dei conti è una « parasitische Hypothese » mostra come il Wasmann ha rilevato dei punti di contatto tra la sinfilia e il parassitismo. Sotto certi punti di vista i suddetti Coleotteri si comportano infatti da parassiti, e la produzione delle pseudogine in certo modo rientra nei fenomeni di castrazione parassitaria (2).

6. Marchal basandosi sui suoi studî relativi all'evoluzione delle Vespe

---

Suppl. 7. A. Weismann's Festschrift. pagg. 571-586, 1904. Sulle ricerche di Janet e di Wheeler vedi anche Buttel-Reepen, *Soziologisches und Biologisches von Ameisen und Bienenstaat. Wie ensteht eine Ameisenkolonie?* Archiv. f. Rassen und Gesellschafts-Biologie 2. Jahr. 1 Heft. 1905. Berlino, pag. 1-16.

(1) Wasmann, E., Mem. cit.,; vedi pure *Die Mirmekophilen und Termitophilen.* C. R. 3e Congrès. Zool. intern. Leyde, 1895, pag. 410-440; *Neue Bestätigungen der Lomechusa-Pseudogynentheorie.* Verh. Deutsch. Zool. Ges. 1902, pag. 98-108.

(2) Marchal, P., in Année biologique, 1 an. (1896) 1898. Chap. XVI, pag. 485. Si noti che un altro fenomeno di vero parassitismo ha importanza nelle formiche rispetto alla produzione del polimorfismo, alludo cioè alle modificazioni prodotte dal parassitismo dei *Mermis* nelle formiche americane. Wheeler, W. M., *The parasitic origin of macroergates among ants.* Amer. Nat. V. 35. 1901, pag. 877-886; Emery, C., *Zur Kenntniss des Polymorphismus der Ameisen.* Zool. Jahr. Suppl. 7. A. Weismann's Festschrift. 1904, pag. 587-610.

sociali, ammette che la sterilità nell'origine delle caste sociali sia dovuta a ciò che la regina fondatrice non poteva avere un nutrimento sufficiente per la prole troppo numerosa della prima generazione. Quindi gli ovarî delle giovani femmine non potevano arrivare a maturità: 1° per l'insufficienza dei materiali di riserva (tessuto adiposo) immagazzinati dalle larve; 2° perchè subito dopo la loro schiusa le giovani femmine debbono consacrarsi alle cure richieste da una numerosa colonia larvale. La funzione di nutrice alle quali le giovani femmine debbono consacrarsi ha preso dunque il sopravvento sulla funzione riproduttiva accentrata dalla regina.

Solo le ultime generazioni allevate verso la fine dell'anno (allevamento autunnale) nell'epoca nella quale la colonia adulta è estremamente numerosa, possono avere delle uova arrivanti a maturità. Ora è questo allevamento autunnale con uno speciale nutrimento che deve aver modificato il plasma germinativo primitivo della specie, essendo la generazione autunnale destinata a ricostituire nel nuovo anno la società.

L'uovo deposto dalla regina nella primavera contiene per ciò questo plasma germinativo modificato dal regime autunnale e in condizioni rispondenti dovrebbe dare origine a una femmina feconda, ma la larva che se ne schiude trova condizioni esterne (temperatura, nutrimento) diverse dalle autunnali, che tuttavia permettono un certo sviluppo dell'essere, per cui si origina l'operaia, una forma in certo modo teratologica e realizzante un caso di dicogenia sperimentale.

Per Marchal [1] se havvi una causa blastogena, questa risiede in ciò che la selezione ha dovuto intervenire per dare il vantaggio alle regine presentanti le particolarità del plasma germinativo le più proprie a questi casi di dicogenia.

Quindi, secondo il Marchal, si hanno due sorta di castrazioni influenti nella produzione degli sterili, la castrazione alimentare di Spencer e quella che l'autore denomina castrazione nutriciale, dovuta alle condizioni ricordate delle vespe e così denominata per la funzione in antitesi colla funzione riproduttiva, cioè la funzione di nutrici assunta dalle operaie.

7. Tenuto conto di ciò che si disse delle pseudogine e di ciò che io ho trovato nei Termitidi, devesi aggiungere anche la castrazione parassitaria tra le cause determinanti la sterilità, senza escludere che nei Termitidi intervengano sì la castrazione parassitaria che l'alimentare.

Mi sembra per ciò molta giusta l'opinione espressa da Buttel Reepen

[1] Marchal, P., op. cit. in Année biologique, 2 nn. (1896) 1898, chap. 10, pag. 251. Si accorda colla teoria del Marchal il fatto da me riscontrato nella stagione estiva di una continuata distruzione degli oociti nelle operaie della *Polistes gallica*. G. Brunelli, *Ricerche sull'ovario degli insetti sociali*, Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XIII, 1° sem. 1904, pag. 350-356.

che il modo come la sterilità si è prodotta nei diversi gruppi di insetti sociali è probabilmente diversa.

Hanno ragione i puri Weismanniani o i neo-Lamarckiani, o riguardo al caso speciale che ci occupa non è più giusta una via di mezzo? Io credo che altri fatti possano scaturire dallo studio dell'ovario degli insetti sociali e fornire nuovi argomenti per la dibattuta quistione.

Quello da me esposto, in quanto accenna a una influenza dei Protozoi sulla possibilità che hanno le uova di arrivare a maturazione, congiunto coll'altro fatto intimamente legato di un nutrimento speciale che nei Termitidi serve alla maturazione degli organi stessi, parlano in favore di una causa somatogena influente sulla sterilità.

Il Weismann (1) ha creduto di trovare un appoggio alle sue teorie negli studi di E. Bickford (2) sull'ovario delle formiche, poichè la Bickford nella *Formica rufa* che possiede diversi tubi ovarici non ha mai trovato uova, mentre che nel *Lasius* che ha un sol tubo ovarico ha trovato uova bene sviluppate, ed ha quindi concluso che la diminuzione della possibilità del funzionamento non è parallela alla regressione morfologica. Ma poichè in una operaia dove sono pochi tubi ovarici questi, appunto perchè sono in piccol numero, hanno la possibilità di funzionare anche quando l'alimento sarebbe insufficiente rispetto a un numero maggiore, noi ci troviamo dinanzi a un fatto che ci pone in un *circulus vitiosus* tra il puro reperto anatomico e la interpretazione fisiologica. Io ritengo, come altra volta ebbi a dire, non esaurienti le ricerche di E. Bickford.

8. Concludendo: Si sapeva che nei Termitidi havvi una relazione tra la scomparsa dei Protozoi e la maturazione degli organi genitali (Grassi); le mie ricerche seguitando quelle di Grassi e accordandosi con esse mostrano che la presenza dei Protozoi nell' intestino delle regine è accompagnata da una distruzione degli oociti. Questo fenomeno è molto chiaramente visibile nel *Calotermes flavicollis*, ma si verifica pure nel *Termes lucifugus*.

Il detto risultato insieme a quelli mirabilissimi di Grassi, parla in favore di una influenza somatogena nella produzione della sterilità.

È probabile che nella sterilità delle caste neutre dei Termitidi la presenza dei Protozoi abbia influito e influisca tuttora, essendo tali caste costantemente infette da Protozoi. Il fatto che un'alimentazione speciale serve nei Termitidi alla maturazione delle larve, secondo le scoperte di Grassi, non contrasta con la detta supposizione, poichè un primo effetto di questo alimento si ha nella scomparsa di Protozoi.

Negli insetti sociali si è ammessa una castrazione alimentare (Emery), una castrazione nutriciale (Marchal), ma il caso della produzione delle pseudogine per influenza dei Coleotteri sinfili (Wasmann) allude anche alla pre-

(1) Weismann, A., *Vorträge über Deszendenztheorie*, 2 Aufl., Jena 1904.

(2) Bickford, E., *Ueber Morphologie und Physiologie der Ovarien der Ameisen-Arbeiterinnen*, Zool. Jahrb. Abth. f. Syst. 9 Bd., 1895, pag. 558-561.

senza di una castrazione parassitaria, alla quale ancor più si avvicina secondo il mio vedere il fatto da me riscontrato nei Termitidi. In questi è verosimile che agiscano così la castrazione alimentare come la parassitaria.

9. *Appendice.* — Dal lato citologico mi interessa rilevare come la speciale formazione vitellogena da me descritta nei Termitidi e che per ora sembra caratteristica di questo gruppo, presenta un minore sviluppo ed è talora assente negli individui reali affetti da Protozoi. Quindi la sua importanza trofica risulta sempre più evidente, anzi è offerta una prova indiretta di essa che finora mancava anche per formazioni simili di altri organismi.

Anche la sostanza nucleolare assume un minore sviluppo, il che mi conferma sempre più nelle opinioni precedentemente espresse. Si può però domandare se la detta formazione vitellogena non si riscontri in forme ritenute affini ai Termitidi.

Io stesso ho cercato, nel miglior modo che ho creduto possibile, di esercitare una critica sulla mia conclusione che la formazione vitellogena sia in relazione da una parte colla grande prolificità dei Termitidi, dall'altra col possedere essi un ovario panoistico.

Ho per ciò intrapreso lo studio dell'ovario delle Embidine. Su questo argomento, come di recente ha avuto occasione di scrivere il Gross (1), manca ogni notizia. Le ricerche da me istituite dimostrano innanzi tutto che l'ovario delle Embidine si discosta per l'assenza di cellule nutrici dall'ovario dei Mallofaghi e dei Pediculidi.

D'altra parte le ricerche del Grassi tendono ad allontanare le Embidine dai Termitidi.

Io posso dire che l'oocite delle Embie si discosta da quello dei Termiti 1° per il minore sviluppo della formazione vitellogena, 2° per la diversa natura del nucleolo, 3° per la presenza nell'ooplasma di formazioni che per ora mi sembrano paragonabili a nuclei di Blochmann.

La presenza di tali nuclei allontanerebbe l'ovario delle Embidine anche da quello degli Ortotteri. Negli Ortotteri, infatti, nuclei di Blochmann si son detti esistere nella grillotalpa, ma le mie ricerche mi portano a metterne in dubbio l'esistenza, tanto più che anche in altri Ortotteri tali nuclei sono stati cercati invano (dal Giardina che cortesemente mi ha fornito tale notizia).

Nella grillotalpa è visibile una zona plasmatica nel senso di Giardina, che per ora non ho riscontrato nelle Embidine.

È molto probabile che i nuclei di Blochmann siano in rapporto coi fenomeni di nutrizione, la loro origine dall'epitelio, come nella *Polistes* io ho

(1) Gross, I., *Untersuchungen über die Ovarien von Mallophagen und Pediculiden*, Zool. Jahr. Abth. f. An. u. On. d. Th. 22. Bd. 1905, pag. 347-386.

determinata, togliendo ad essi ogni valore nei fenomeni della riduzione cromatica quantitativa, in relazione colla quale si sono supposti esistere.

Le sovraccennate notizie sull'ovario delle Embidine, giustificano l'opinione del Gross sopra un possibile smembramento del gruppo dei Corrodenti in base ai caratteri dell'ovario.

Patologia vegetale. — *Morìa di piantoni di gelso cagionata da Gibberella moricola (De Not.) Sacc.* Nota del dott. Vittorio Peglion, presentata dal Socio G. Ciamician.

Un impianto di circa 600 gelsi, eseguito nella scorsa primavera in un'azienda di S. Maria Maddalena (Rovigo) andò completamente a male in seguito ad uno speciale disseccamento del tronco. Le piante collocate a dimora, colle dovute cautele, dopo un inizio di vegetazione, non tardarono a disseccare. Trattavasi, secondo il solito di giovani piantine di 4 anni circa oriunde da seme, innestate con varietà gentile, ed era da escludersi nel modo più assoluto che il deperimento fosse dovuto a marciume delle radici, ovvero ad imperizia all'atto dell' impianto.

Le piante stesse portatemi in esame nel novembre, hanno la corteccia profondamente disorganizzata verso la regione del colletto, a tal segno che in alcune essa si riduce a brandelli inconsistenti. In tutte le piante esaminate, la regione del colletto, ed il fusto per un tratto variabile mostransi cosparsi da innumerevoli verruche nere, che l'esame microscopico dimostra essere i caratteristici periteci stromatici della *Gibberella moricola* (De Not.) Sacc. e da acervuletti di color rosso-mattone di *Fusarium lateritium.* In alcuni esemplari vi si associano i periteci immaturi di una *Nectria.*

Il nesso genetico che intercorre fra *Gibberella moricola* e *Fusarium lateritium* è stato chiaramente dimostrato dalle ricerche sperimentali di Briosi e Farneti. A questi stessi Autori spetta il merito di aver dimostrato che il cosidetto *avvizzimento* dei germogli del gelso è dovuto al parassitismo del *Fusarium lateritium* Nees., e che la *Gibberella moricola* sarebbe la forma autunnale alla quale si deve l' infezione delle gemme formatesi durante l'estate.

Prima che per merito degli Autori predetti fosse definita l'origine parassitaria del male, questi consideravasi come cagionato da agenti meteorici (nebbie, geli, sbalzi di temperatura), a cui ora può attribuirsi solo un effetto indiretto. È probabile cioè che questi agenti, al pari della sfogliatura cui è soggetto il gelso, predispongano la pianta all' infezione, tanto più che le lesioni conseguenti alla sfogliatura stessa possono fungere da vie aperte alla penetrazione dei conidi germoglianti. Nel caso da me osservato, ritengo

che la causa predisponente all' infezione sia stata data dalle condizioni meteoriche della scorsa primavera: le temperature rigide del marzo, epoca in cui avvenne l' impianto, la forte brinata della notte del 6-7 aprile, possono considerarsi come cagioni predisponenti le piante stesse all' infezione.

Di questa possibile correlazione di fatti è bene che tengano il dovuto conto i vivaisti ed in generale i produttori di piantine da commercio. È bene procrastinare quanto più sia possibile l'escavo delle piante destinate a viaggiare, e sarà prudente prima di porre le stesse a dimora di praticare non soltanto la consueta potatura, ma di integrare questa coll'asportazione di tutti gli organi offesi, disinfettando quindi tronco e radici mediante pennellature con soluzione di solfato di rame all'1 %, che sarà assai più efficace di certi trattamenti empirici (incalcinamento, biacca, sterco) che si sogliono praticare da taluni coltivatori.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

A. Cesaris Demel. *Sulla varia tingibilità e sulla differenziazione della sostanza cromatica contenuta in alcuni eritrociti.* Pres. dal Socio P. Foà.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio G. Struever, relatore, a nome anche del Corrispondente A. Sella, legge una Relazione sulla Memoria del dott. U. Panichi intitolata: *Sulle variazioni dei fenomeni ottici dei minerali, al variare della temperatura,* proponendo l'inserzione del lavoro negli Atti accademici.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci Bianchi L., Pascal, Lustig, von Baeyer. Fa inoltre particolare menzione di un volume dell'ing. C. Guidi, intitolato: *Le costruzioni in beton armato*; dell'altro volume del prof. F. Amodeo: *Gli Istituti Accademici di Napoli intorno al 1800*, e di due cospicui doni di pubblicazioni dell'Accademia delle scienze di Copenaghen e della Società olandese delle scienze di Harlem.

Il Presidente Blaserna presenta una Relazione dell'ing. E. Mancini sopra *L'Industria frigorifica in Italia* e ne parla.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Cerruti dà comunicazione degli elenchi dei lavori presentati per prender parte ai concorsi ai premi Reali e Ministeriali, scaduti col 31 dicembre 1905.

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio di S. M. il Re per la *Chimica*.

(Premio L. 10,000. — Scadenza 31 dicembre 1905).

1. Angeli Angelo. 1) « Azione dell'acido nitroso sopra le chetoammine » (st.). — 2) « Azione dell'acido nitroso sopra l'amminocanfora » (st.). — 3) Azione dell'acido nitroso sopra l'amminouracile » (st.). — 4) « Azione dell'acido nitroso sopra l'amminocanfora » (st.). — 5) « Sopra la formazione del sale AgN_3 » (st.). — 6) « Sopra l'esodiazoacetofenone » (in collab. con Piccinini) (st.). — 7) « Ricerche sopra alcuni composti dell'azoto » (st.). — 8) « Sopra una reazione delle ammine secondarie » (in collab. con Castellana) (st.). — 9) « Sopra la nitrazione delle ammine » (in collab. con Maragliano) (st.). — 10) « Una nuova reazione della biossiammoniaca » (Id.) (st.). — 11) « Sopra alcuni nitrosoindoli » (in collab. con Spica) (st.). — 12) « Sopra alcuni nitroindoli » (in collab. con Angelico) (st.). — 13) « Derivati del pirrolo » (in collab. con Angelico e Calvello) (st.). — 14) « Sopra i nitroderivati del pirrolo » (in collab. con Angelico) (st.). — 15) « Ricerche sopra i nitroindoli » (Id.) (st.). — 16) « Sopra i diazoindoli » (in collab. con D'Angelo) (st.).

2. Balbiano Luigi. 1) « Ricerche analitiche sull'acido canforico, con annesse le due Note: *a*) Brevi osservazioni sulla Nota dei signori Fr. Mahla e Jul. Tiemann « Zum abbon der comphat. saure ». *b*) « Sugli acidi lattonici isomeri derivati dall'acido metil.2.dimetil.3.ossi.2.4.pentandioico » (st.). — 2) « Sulla saponificazione della tribenzoina », comprendente due Note « Sulla teoria del processo della saponificazione » (st.). — 3) « Azione della soluzione acquosa di acetato mercurico sui composti olefinici » (st.).

3. Oddo Giuseppe. 1) « Eterificazione per mezzo dei sali inorganici » (st.). — 2) « Preparazione dell'etere n-propilico e sul processo d'eterificazione per mezzo dell'acido solforico » (st.). — 3) « Clorurazione diretta degli eteri semplici » (st.). — 4) « Sull'etere etilico triclorurato 1·2·2 » Note I-II (in collab. con Mameli) (st.). — 5) « Sull'etere n-propilico ed i suoi prodotti di clorurazione diretta » (in collab. con Cusmano) (st.). — 6) « Clorurazione dell'alcool propilico normale » (Id.) (st.). — 7) « Sugli eteri 1·2,

1·2·2′ e 1·2·1′·2′· n-propilici » (ms.). — 8) « Decomposizioni per mezzo dell'acido solforico » (ms.). — 9) Condensazioni aldeidiche per mezzo degli eteri clorurati » (ms.). — 10) « Sui 5-azoengenoli e la loro costituzione » (in collab. con Puxeddu) (st.). — 11) « Sul 5-aminoengenolo » (Id.) (ms.). — 12) « Riduzione degli ossiazocomposti in amino fenoli per mezzo della fenilidrazina » (Id.) (ms.). — 13) « Sui 5-azoengenoli e la loro costituzione » (Id.) (ms.). — 14) « Sintesi metallorganiche nel gruppo della canfora » (st.). — 15) « Sul dicanfochinone e l' isodicanfochinone » (ms.). — 16) « Sulla costituzione degli acidi che si formano nell'azione del sodio sulla bromocanfora o sulla canfora » (ms.). — 17) « Sulla solanina estratta dal *Solanum sodomaeum* Linn. » Memorie 3 (in collab. con Colombano) (st. e ms.). — 18) « L'ossicloruro di fosforo come solvente in crioscopia » (st.). — 19) « Sui due monocloruri di iodio » (st.). — 20) « Sul tricloruro di iodio » (st.). — 21) « Comportamento crioscopico dei composti alogenati in soluzione nell'ossicloruro di fosforo » (in collab. con Tealdi) (st.). — 22) « Sulle anidridi solforica e disolforica » (st.). — 23) » Ebullioscopio delle sostanze volatili » (st.). — 24) « Apparecchio e processo generale d'ebullioscopia » (st.). — 25) « Per la storia della costituzione della canfora » (st.). — 26) Sulla reazione di Kolbe in presenza di solventi indifferenti » (in collab. con Mameli) (st.). — 27) « Su un nuovo azotometro applicabile alla pompa Sprengel » (st.).

4. Santoro Raffaele. « Della formazione dell'acqua » (ms.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio di S. M. il Re per la *Matematica*.

(Premio L. 10,000. — Scadenza 31 dicembre 1905).

1. Arzelà Cesare. 1) « Sulle serie di funzioni (parte prima) » (st.). — 2) « Sulle serie di funzioni (parte seconda) » (st.). — 3) « Sulle serie di funzioni di variabili reali » (st.). — 4) « Sulle serie di funzioni egualmente oscillanti » (st.). — 5) « Sulle serie di funzioni analitiche » (st.). — 6) « Sulle funzioni di linee » (st.). — 7) Sull'esistenza degli integrali nelle equazioni differenziali ordinarie » (st.). — 8) Sulle integrabilità delle equazioni differenziali ordinarie » (st.). — 9) « Sul principio di Dirichlet » (st.). — 10) « Sul secondo teorema della media per gl'integrali doppi » (st.). — 11) « Sulla inversione di un sistema di funzioni » (st.).

2. Bonugli Emilio. « Nuove ipotesi sul Sistema Cosmico, ovvero Cilindro del Mondo » (ms.).

3. Capelli Alfredo. 1) « Sulla separazione delle radici delle equazioni mediante il calcolo delle differenze ». Nota I, II (st.). — 2) « Sull'uso delle progressioni ricorrenti nella risoluzione delle equazioni algebriche » (st.). — 3) « Sopra un principio generale di aritmetica ed una nuova dimostrazione

del teorema di Hilbert » (st.). — 4) « Estensione del teorema di Hilbert al caso di polinomii con infiniti termini » (st.). — 5) « Saggio sulla introduzione dei numeri irrazionali col metodo della classi contigue » (st.). — 6) « Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche » Note I, II, III (st.). — 7) « Le iperaritmetiche e l'indirizzo combinatorio dell'aritmetica ordinaria » (st.). — 8) « Sulla continuità delle funzioni di più variabili reali » (st.). — 9) « Lezioni sulla teoria delle forme algebriche » (lit.). — 10) « Istituzioni di Analisi Algebrica » (st.). — 11) « Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile e sul teorema di addizione ». Note I, II (st.). — 12) Nuova dimostrazione di una formola relativa alle operazioni di polare (st.). — 13) Intorno all'algoritmo di Euclide » (st.). — 14) « Sulle progressioni infinite di numeri reali » (st.). — 15) « Sull'arbitrarietà delle caratteristiche nelle formole di addizione delle funzioni ϑ di una variabile (st.). — 16) « Sulle formole generali di addizione delle funzioni ϑ di più argomenti » (st.). — 17) « Sulle progressioni infinite di numeri reali » Nota II. (st.). — 18) « Sull'inversione delle corrispondenze » Note I e II (st.). — 19) « Sopra la teoria delle funzioni algebriche di più variabili » (st.). — 20) « Sopra un'estensione dello sviluppo per polari delle forme algebriche a più serie di variabili » (st.). — 21) « Sopra la teoria degl'irrazionali algebrici » (st.). — 22) « Nuova dimostrazione del teorema sullo sviluppo per polari delle forme algebriche a più serie di variabili » (st.). — 23) « Sulla risoluzione generale delle equazioni ed in ispecie delle trinomie per mezzo di integrali definiti » (st.). — 24) « Sul sistema completo delle operazioni di polare permutabili con ogni altra operazione fra le stesse serie di variabili (st.). — 25) « Dell'impossibilità di Sizigie fra le operazioni fondamentali permutabili con ogni altra operazione fra le stesse teorie di variabili » (st.). —

4. Castelnuovo Guido. 1) « Sulla razionalità delle involuzioni piane » (st.). — 2) « Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili » (st.). — 3) « Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche » (st.). — 4) « Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellitiche » (st.). — 5) « Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica (st.). — 6) « Sulle superficie di genere zero » (st.). — 7) « Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica » (st.). — 8) « Sul genere lineare di una superficie e sulla classificazione a cui esso dà luogo » (st.). — 9) « Le trasformazioni generatrici del gruppo Cremoniano nel piano » (st.). — 10) « Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare » (st.). — 11) « Sulle superficie aventi il genere aritmetico negativo » (st.).

5. Cesàro Ernesto. 1) « Corso di Analisi algebrica, con introduzione al Calcolo infinitesimale » (st.). — 2) « Introduzione alla teoria matematica della Elasticità » (st.). — 3) Elementi di Calcolo infinitesimale » (st.). —

4) « Nuova contribuzione ai principii fondamentali dell'Aritmetica assintotica » (st.). — 5) « Sulla geometria intrinseca degli spazii curvi » (st.). — 6) « Le formule di Codazzi negli iperspazii » (st.). — 7) « Sulla geometria intrinseca delle congruenze » (st.). — 8) « Teoria intrinseca delle deformazioni infinitesime » (st.). — 9) « I numeri di Grassmann in Geometria intrinseca » (st.). — 10) « Sulle equazioni della elasticità negli iperspazii » (st.). — 11) « Sulla trattazione intrinseca delle questioni baricentriche » (st.). — 12) « Le deformazioni infinitesime degli iperspazii » (st.). — 13) « Sulla distribuzione dei numeri primi » (st.). — 14) « Sulle radici dell' hessiana d'una cubica in relazione con quelle della cubica stessa » (st.). — 15) « Sopra un'equazione funzionale trattata da Beltrami » (st.). — 16) « Sulle superficie isotermiche » (st.). — 17) « Formole per l'analisi intrinseca delle superficie e delle loro deformazioni infinitesime » (st.). — 18) « Sull'uso delle condizioni d'immobilità in Geometria intrinseca » (st.). — 19) « Sopra un modo di utilizzare, nella teoria intrinseca delle superficie, le condizioni d'immobilità dei punti » (st.). — 20) « Sulle deformazioni infinitesime delle superficie » (st.). — 21) « Intorno ad una limitazione di costanti nella teoria analitica del calore » (st.). — 22) « Analisi intrinseca delle eliche policoniche » (st.). — 23) « Per l'analisi intrinseca delle superficie rotonde » (st.). — 24) « Sulla rappresentazione intrinseca delle superficie » (st.). — 25) « Sui fondamenti della Geometria intrinseca non-euclidea » (st.). — 26) « Geometria intrinseca negli spazii di curvatura costante » (st.). — 27) Nuova teoria intrinseca degli spazii curvi » (st.). — 28) « Fondamento intrinseco della pangeometria » (st.). — 29) « Sulle immagini delle geodetiche nella rappresentazione piana delle superficie » (st.). — 30) « Per l'analisi intrinseca delle figure tracciate sopra una superficie » (st.). — « Sopra alcune proprietà delle traiettorie in un dato campo di forze » (st.).

6. Dalmasso Agnese. « Humilitas et simplicitas a majore charitate. P. II. Progetto degli edifici in accordo solenne tra Stato e Chiesa » (ms.).

7. Franchini Giuseppe. « Nuova verità matematica » (ms.).

8. Pegrassi Angelo. « Relazioni tra la Planimetria e la Stereometria » (ms.).

9. Plebani Benedetto. « Il *Latus rectum* della spirale archimedèa » (st.).

10. Rossi Raimondo. « Scomposizione di solidi geometrici » (ms. e modelli).

11. Ugolini Giulio. « Inscrizione dell' Ennagono regolare » (ms.).

12. Villani Nicola. « Saggio di una nuova teoria — Analisi indeterminata applicata ai numeri primi » (ms.).

13. Anonimo. (Col motto: « Vagliami il lungo studio e il grand'amore ») Manoscritto.

Elenco dei lavori presentati per concorrere ai premi del Ministero della P. I. per le *Scienze fisiche e chimiche.*

(Due premi del valore di L. 2,600. — Scadenza 31 dicembre 1905).

1. Platania Giovanni. 1) « I cavi telegrafici e le correnti sottomarine nello stretto di Messina » (st.). — 2) « Le librazioni del mare con particolare riguardo al Golfo di Catania » (st.). — 3) « I cavi telegrafici e le correnti sottomarine nello stretto di Messina » (st.). — 4) « Effets magnétiques de la foudre sur les roches volcaniques » (st.). — 5) « Sugli effetti magnetici prodotti dal fulmine » (in coll. con G. Platania) (st.).

2. Bonacini Carlo. 1) « Sulla cromofotografia per mezzo di sostanze cromoplastiche » (st.). — 2) « Ricerche sulla radioattività » (ms.). — 3) « Sull'origine dell'energia emessa dai corpi radioattivi » (st.). — 4) « Sul rilievo dei suoni nelle riproduzioni foniche. Stereofonografo » (st.). — 5) « Considerazioni sul timbro dei suoni » (ms.). — 6) « Sulle fotografie colorite » (st.). — 7) « La lastra fotografica nello studio delle radiazioni » (st.). — 8) « La fotografia dei colori nell'arte » (st.).

3. Corbino Orso Mario. 1) « La rotazione magnetica del piano di polarizzazione nell'interno di una riga d'assorbimento » (st.). — 2) « Sull'ineguale assorbimento delle vibrazioni circolari inverse per il passaggio attraverso a un vapore incandescente in un campo magnetico » (st.). — 3) « Sull'arco cantante e la sua osservazione stroboscopica » (st.). — 4) « Sulla possibilità di ricavare da un sistema di correnti trifasiche una differenza di potenziale rigorosamente costante » (st.). — 5) « Sul meccanismo di produzione delle correnti di Duddel » (st.). — 6) « Sulla magnetizzazione del ferro a frequenze elevate » (st.). — 7) « Su alcune applicazioni di una proprietà della dinamo in serie » (st.). — 8) « Sulla produzione di campi rotanti per mezzo di correnti di scarica sinusoidali o smorzate » (st.). — 9) « Funzionamento con correnti alternate dei motori in derivazione » (st.). — 10) « Sulla viscosità dielettrica dei condensatori » (st.). 11) « Coppie destate su una sfera conduttrice da un campo rotante » (st.). — 12) « Sull'osservazione spettroscopica della della luce di intensità periodicamente variabile » (st.).

4. Perotti Pierluigi. 1) « Nuovo interruttore microfonico di un rocchetto d'induzione » (st.). — 2) « Nuovo indicatore delle onde elettromagnetiche » (ms.). — 3) « Azione dell'organismo dello sperimentatore » (ms.). — 4) « Commutatore dimostrativo per lezione » (ms.).

CORRISPONDENZA

Il Presidente Blaserna presenta un piego suggellato trasmesso dal sig. N. Mataloni per esser conservato negli Archivi accademici.

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze e lettere di Copenaghen; l'Accademia delle scienze di Nuova York; la Società Reale di Vittoria; le Società geologiche di Washington e di Edinburgo; i Musei di storia naturale di Amburgo e di Nuova York: il Museo di scienze ed arti di Filadelfia; il Museo coloniale di Wellington; le Università di Cambridge Mass. e di St. Louis; gli Osservatorii di Arcetri, di San Fernando e di Cambridge Mass.

V. C.

CONCORSI A PREMI

Cerruti (Segretario). Comunica gli elenchi dei lavori presentati per concorrere ai premi Reali per la *Chimica* e *Matematica*, e a quelli del Ministero della P. I. per le *Scienze fisiche* e *chimiche*, del 1905 . . . . . Pag. 64

CORRISPONDENZA

Blaserna (Presidente). Presenta un piego, inviato dal sig. *N. Mataloni*, perchè sia conservato negli Archivi dell'Accademia . . . . . » 68

Cerruti (Segretario). Dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti . . . » 69

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 gennaio 1906.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Capellini. La Rovina delle Rocche di S. Pietro a Porto Venere . . . . . Pag. 3
Peano. Sulle differenze finite (*) . . . . . » 5
Pizzetti. Intorno al calcolo della rifrazione astronomica, senza speciali ipotesi sul modo di variare della temperatura dell'aria coll'altezza (*) . . . . . » 6
Viola. La trasformazione delle coordinate dei cristalli (*) . . . . . » »
Nielsen. Sur le développement en fraction continue de la fonction Q de M. Prym. (pres. dal Socio *Dini*) (*). . . . . » »
Magini. Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore (pres. dal Corrisp. *Battelli*). . . . . » »
Magri. Sulla radioattività dei fanghi termali depositati dalle acque degli Stabilimenti dei Bagni di Lucca (Toscana) (pres. *Id.*) (*). . . . . » 14
Monti. Sulla misura della velocità di propagazione delle perturbazioni sismiche in rapporto alla sismometria razionale (pres. *Id.*). . . . . » 15
Chistoni. Risultati pireliometrici ottenuti dal 22 agosto a tutto giugno 1903 al R. Osservatorio Geofisico di Modena (pres. dal Socio *Blaserna*) (*) . . . . . » 19
Minunni e *Lazzarini.* Su taluni derivati del pirazolo (pres. dal Socio *Paternò*) . . . . » »
Gallo. L'equivalente elettrochimico dell'Iodio (pres. *Id.*) . . . . . » 24
Peratoner e *Azzarello.* Eterificazione del γ-piridone con diazoidrocarburi grassi (pres. *Id.*) (*) » 35
Bargellini. Prodotti di condensazione dell'acido rodaninico colle aldeidi (pres. *Id.*). . . . » »
Ottolenghi. Su una nuova reazione colorata della colesterina (pres. dal Socio *Menozzi*) . » 44
Perotti. Sulla spontanea formazione della diciandiamide nei prodotti concimanti contenenti cianamide calcica (pres. dal Socio *Paternò*) . . . . . » 48
Van Rynberk. Sul riflesso orbicolare delle palpebre nel pescecane (Scyllium) (pres. dal Socio *Luciani*) . . . . . » 53
Brunelli. Sulla distruzione degli oociti nelle regine dei Termitidi infette da Protozoi ed altre ricerche sull'ovario degli insetti (pres. dal Socio *Grassi*) . . . . . » 55
Peglion. Moria di piantoni di gelsi cagionata da Gibberella moricola (De Not.) Sacc. (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . . » 62

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Cesaris Demel. Sulla varia tingibilità e sulla differenziazione della sostanza cromatica contenuta in alcuni eritrociti (pres. dal Socio *Foà*). . . . . » 63

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Struever (relatore) e *Sella.* Relazione sulla Memoria del dott. *U. Panichi* intitolata: Sulle variazioni dei fenomeni ottici dei minerali, al variare della temperatura . . . . . » »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Cerruti (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci *Bianchi L., Pascal, Lustig, von Baeyer,* dell'ing. *C. Guidi,* del prof. *F. Amodeo,* dell'Accademia delle scienze di Copenaghen e della Società olandese delle scienze di Harlem. » »
Blaserna (Presidente). Presenta una Relazione dell'ing. *E. Mancini* e ne parla . . . . » 64

(*Segue in terza pagina*)

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. *Roma 21 gennaio 1906.* **N. 2.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 *gennaio* 1906.

Volume XV.° — Fascicolo 2°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie pro priamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all'autore. - *d)* Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 gennaio 1906.

F. D'Ovidio, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle differenze finite.* Nota del Corrispondente G. Peano.

A note formule di calcolo differenziale e integrale corrispondono altre formule per le differenze finite, utili nelle applicazioni pratiche, e che qui esporrò rapidamente.

1. Sia a un numero intero, positivo o negativo, n un numero naturale, e b un intero maggiore di $a+n$. Indichiamo con f una funzione reale dei numeri interi compresi fra a e b. Allora il valore fb è espresso mediante fa, le sue successive differenze fino all'ordine n, e dalle differenze di ordine $n+1$ di f, pei valori da a a $b-n-1$ della variabile, dalla formula

$$fb = \Sigma[\mathrm{C}(b-a, r)\,\Delta^r fa \mid r, 0\cdots n] + \\ + \Sigma[\mathrm{C}(b-x-1, n)\,\Delta^{n+1} fx \mid x, a\cdots(b-n-1)].$$

I simboli hanno il valore conforme al « Formulario Matematico » (vedasi tomo V, pp. 131, 134). Esiste qualche varietà nelle notazioni usate dagli Autori nel calcolo delle differenze finite.

Il primo sommatorio, a cui si ridurrebbe la formula per $b=a+n$, è l'espressione del valore della funzione mediante le successive differenze, quale fu data dal Mercator nel 1668. Il secondo termine ne esprime il resto.

Tutta la formula è analoga a quella di Taylor, col resto sotto forma di integrale definito.

2. Nelle stesse ipotesi, la differenza fra fb e la somma dei primi $n+1$ termini dello sviluppo di Mercator, cioè il resto di cui sopra si parla, è della forma $C(b-a, n+1)$ moltiplicato per un valore medio fra quelli assunti da $\Delta^{n+1} fx$, per x intero compreso fra a e $b-n-1$.

Risponde alla formula di Taylor, col resto di Lagrange.

3. Avendo a, b, f il significato precedente, e $b > a+1$, se x è un intero compreso fra a e b, allora la differenza fra fx, e

$$fa + (x-a)(fb-fa)/(b-a),$$

funzione di primo grado che per $x=a$ ed $x=b$ assume i valori fa e fb, vale

$$(x-a)(x-b)/2$$

moltiplicato per un valore medio fra quelli assunti da $\Delta^2 fx$, variando x da a a $b-2$ (per valori interi).

È analogo al teorema di calcolo differenziale che esprime l'errore nell'interpolazione di primo grado mediante la derivata seconda (Formulario, pag. 290).

4. Nelle ipotesi 3, la somma dei valori di fx, quando x varia per valori interi da a a b, è per approssimazione eguale al loro numero $b-a+1$, moltiplicato per la media aritmetica dei due valori estremi. L'errore in questa approssimazione si può esprimere colle differenze seconde, e si ha:

$$\Sigma(f, a \cdots b) = (b-a+1)(fa+fb)/2 - \\ - \Sigma[(x-a)(b-x)\Delta^2 f(x-1) \mid x, (a+1) \cdots (b-1)]$$

analoga alla formula di calcolo, che esprime un integrale definito colla formula dei trapezî, più un resto sotto forma di integrale.

5. Il resto nell'approssimazione precedente è riduttibile alla forma: $-C(b-a+1, 3) \times$ valore medio di $\Delta^2 fx$, quando x varia da a a $b-2$, diviso per 2.

Le formule precedenti si possono dimostrare come le corrispondenti di calcolo, con opportune variazioni. Mi sono occorse in calcoli su rendite vitalizie; e non mi fu dato di incontrarle nelle pubblicazioni ordinarie.

Astronomia. — *Intorno al calcolo della rifrazione astronomica, senza speciali ipotesi sul modo di variare della temperatura dell'aria coll'altezza.* Nota del Corrispondente P. Pizzetti.

Il modo di variare della densità atmosferica secondo l'altezza ha, come è noto, una influenza relativa assai piccola sul calcolo della rifrazione astronomica, fino a che la distanza zenitale del raggio luminoso non si approssima all'angolo retto. Così una ipotesi, qual'è quella di Bessel, la quale tanto vivamente contrasta coi dati dell'osservazione, da supporre un gradiente termico verticale minore di $0^g,12$ nella temperatura centesimale dell'aria (per 100 metri di elevazione a partire dal livello del mare), conduce tuttavia, nel calcolo della rifrazione, a risultati teorici dei quali l'applicazione pratica è stata, per comune esperienza degli astronomi, riconosciuta soddisfacente nella maggior parte dei casi.

Le speciali ipotesi intorno alla costituzione fisica dell'atmosfera e i laboriosi sviluppi di calcolo cui esse danno luogo, rappresentano quindi, per così dire, un lavoro perduto, ed è invece naturale ed opportuno, sia dal punto di vista didattico, sia rispetto alla discussione critica dei risultati dell'osservazione, il ricercare *con quale grado di approssimazione si possa calcolare la rifrazione astronomica quando si rinunci a particolari ipotesi intorno al modo di variare della temperatura dell'aria coll'altezza.*

La ricerca che qui ci proponiamo non è nuova. Del determinare la rifrazione supponendo soltanto che la temperatura *non cresca* coll'altezza, si occupò diffusamente Ossian Bonnet, nella sua *Théorie de la réfraction Astronomique* (1), ma essendosi egli proposto a priori di risolvere il problema per mezzo di una serie procedente secondo le potenze di tang z (z = distanza zenitale iniziale) ha ottenuto un grado di approssimazione minore di quello che si può in realtà raggiungere.

Il sig. Andoyer nella sua Nota (2): *Sur la théorie de la réfraction* ha dato una formola estremamente semplice e indipendente da ipotesi sulla

(1) Nouvelles Annales de Mathematiques, VI, 1887. Anche il sig. Radau nella ben nota sua Memoria: *Recherches sur la théorie des refractions astronomiques* (Annales de l'Obs. de Paris, t^e XVI) dà lo sviluppo della rifrazione per le potenze di tang z, e pone in evidenza come taluni importanti elementi di questo sviluppo siano indipendenti dalla costituzione dell'atmosfera. Il sig. Bemporad nella sua recente Memoria: *Sulla teoria della refrazione astronomica* (Mem. Soc. Spettroscopisti, vol. XXXIV) dà una formola del tipo $A \operatorname{tang} z + B \operatorname{tang}^2 z$, la quale è indipendente dal modo di decremento della temperatura coll'altezza. Egli fa vedere come, fino a 75° di distanza zenitale, il calcolo numerico di questa formola fornisca per la rifrazione dei valori che presentano differenze trascurabili da quelli calcolati colla formola di Bessel.

(2) Bulletin Astronomique, octobre 1905.

costituzione dell'atmosfera, pel caso di distanze zenitali non superiori a 75°. Ma anche per questa formola si parte dallo sviluppo per le potenze di tang z; e non è poi assegnato un limite superiore dell'errore cui la formola stessa è soggetta [1].

Mi propongo di risolvere qui il problema sopraenunciato e precisamente di trattare le quistioni seguenti:

1° con quale precisione è possibile calcolare la rifrazione astronomica quando (ammessa, al solito, la distribuzione regolare per strati sferici di egual densità) si faccia, *riguardo alla temperatura dell'aria, la sola ipotesi che essa non cresca coll'altezza*;

2° qual'è l'errore massimo cui può dar luogo il non verificarsi di questa ipotesi, il fatto cioè di *una inversione della temperatura*;

3° di quanto cresce la precisione, *quando si supponga, in base alla osservazione, conosciuta la legge di variazione della temperatura, dal livello del mare fino ad una certa altezza.*

Restano, naturalmente, escluse dai calcoli che seguono le distanze zenitali molto vicine a 90°, ma d'altra parte è chiaro a priori, e ben confermato dall'esperienza, come l'andamento delle visuali prossime all'orizzonte sia tanto strettamente legato alle condizioni degli strati bassi dell'aria, da render vano ogni tentativo di esatta ricerca a priori.

2. Stabiliamo alcune formole preliminari. Chiamiamo p, ϱ, t, n la pressione, la densità, la temperatura assoluta e l'indice di rifrazione dell'aria alla distanza r dal centro della Terra, e segnamo coll'indice 0 queste lettere quando si riferiscano al luogo d'osservazione. E intendiamo, salvo avviso contrario, che gli integrali che figurano nelle formole seguenti siano sempre estesi dal luogo d'osservazione fino al limite superiore dell'atmosfera.

Avremo

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \frac{t}{t_0} \tag{1}$$

e posto

$$\frac{r_0}{r} = 1 - s\,, \tag{2}$$

$$dp = -g\varrho \cdot dr = -g_0 r_0 \varrho \cdot ds \tag{3}$$

ove g e g_0 sono le accelerazioni della gravità alle distanze r ed r_0 risp. dal centro terrestre.

[1] La Memoria del sig. Andoyer contiene pure una pregevole trattazione relativa al caso di distanze zenitali superiori a 75°. La formula da lui adottata corrisponde ad un modo di variare della temperatura che concorda coi dati dell'osservazione *per quanto riguarda il valore iniziale del gradiente termico verticale.*

Posto

$$\beta = \frac{p_0}{g_0 r_0 \varrho_0}, \tag{4}$$

le (1) e (3) danno

$$\beta \frac{dp}{p_0} = -\frac{\varrho}{\varrho_0} ds. \tag{5}$$

D'altra parte

$$n = 1 + \alpha \frac{\varrho}{\varrho_0}, \quad n_0 = 1 + \alpha, \tag{6}$$

dove $\alpha = 0{,}0002927$ se ϱ_0 è la densità corrisp. a 760^{mm} di barometro e a 0° di temperatura centigrada. Quindi posto

$$\frac{n_0}{n} = y, \tag{7}$$

sarà, tenuto conto della (5):

$$(y - n_0)\, ds = -\alpha y \frac{\varrho}{\varrho_0} ds = \alpha\beta y \frac{dp}{p_0}, \tag{8}$$

L'integrazione per parti dà quindi:

$$\begin{aligned} \int s^q \cdot dy = \int s^q \cdot d(y - n_0) &= -q \int (y - n_0)\, s^{q-1}\, ds \\ &= -q\alpha\beta \int y s^{q-1} \frac{dp}{p_0} \end{aligned} \tag{9}$$

poichè la s si annulla al limite inferiore, la $y - n_0$ al superiore. Con una nuova integrazione per parti (supposto $q > 1$)

$$-\int y s^{q-1} \frac{dp}{p_0} = \int \frac{p}{p_0} s^{q-1} \cdot dy + (q-1) \int \frac{p}{p_0} s^{q-2}\, y \cdot ds \tag{10}$$

giacchè p si annulla al limite superiore. Poichè t non cresce coll'altezza, la (1) dà

$$\frac{p}{p_0} \leq \frac{p}{p_0};$$

quindi la (5):

$$\frac{p}{p_0} ds \leq -\beta \frac{dp}{p_0}.$$

L'ultimo termine, nel secondo membro della (10), è dunque tutt'al più uguale a

$$-(q-1)\beta \int y s^{q-2} \frac{dp}{p_0},$$

ovvero, in grazia della (9) ove si cangi q in $q-1$, tutt'al più uguale a

$$\frac{1}{\alpha}\int s^{q-1}\cdot dy\,.$$

Quanto al primo termine nel secondo membro della (10), esso è evidentemente minore di

$$\int s^{q-1}\cdot dy\,.$$

Quindi dalle (9) (10) deduciamo:

$$\int s^{q}\cdot dy < \beta(q\alpha+q)\cdot\int s^{q-1}\cdot dy\,. \tag{11}$$

Abbiamo poi

$$\int s\cdot dy = -\int (y-n_0)\,ds = -\alpha\beta\int y\,\frac{dp}{p_0}\,;$$

e poichè la variabile y è compresa fra 1 ed $n_0 = 1+\alpha$ e siccome

$$\int \frac{dp}{p_0} = -1$$

sarà

$$\alpha\beta < \int s\cdot dy < \alpha(1+\alpha)\,\beta\,, \tag{12}$$

La (10) dà poi

$$\int s^2\cdot dy < 2\beta^2\alpha(1+\alpha)^2\,, \tag{13}$$

$$\int s^3\cdot dy < 6\beta^3\alpha(1+\alpha)^3\,,$$

ecc. ecc.

Si ha pure $(q>1)$

$$\int (n_0-y)^q\,ds = -\alpha\beta\int y\,(n_0-y)^{q-1}\,\frac{dp}{p_0}\,.$$

E poichè il massimo valore di y è n_0, il massimo di n_0-y è $n_0-1=\alpha$, sarà

$$\int (n_0-y)^q\cdot ds < \alpha\beta n_0(n_0-1)^{q-1} = \alpha^q\beta(1+\alpha)\,. \tag{14}$$

Queste formole son poco differenti da quelle delle quali ha fatto uso il sig. Andoyer nella citata Memoria.

3. Procediamo al calcolo approssimato della rifrazione, partendo dalla nota espressione

$$R = \int \frac{\frac{r_0}{r} \cdot d\frac{n_0}{n}}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 z - \left(\frac{z_0 n_0}{z n}\right)^2}}$$

ove z è la distanza zenitale osservata. Colle nostre notazioni

$$R = \int \frac{(1-s)\, dy}{\sqrt{c^2 - y^2 (1-s)^2}} \tag{15}$$

ove si è posto $c = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$. Supporremo in tutti i calcoli che seguono $c^2 > n_0^2$ che è il massimo valore del prodotto $y^2(1-s)^2$. Col valore di α dato più sopra, ciò equivale a supporre

$$z < 88°.36'.50''.$$

Posto

$$F = \frac{1-s}{\sqrt{c^2 - y^2 (1-s)^2}}$$

abbiamo, collo sviluppo di Taylor per potenze di s:

$$F = \frac{1}{\sqrt{c^2 - y^2}} - \frac{c^2 \cdot s}{(c^2 - y^2)^{3/2}} + E \tag{16}$$

dove

$$E = \frac{3}{2} \frac{c^2 y^2 s^2 (1 - s')}{[c^2 - y^2 (1 - s')^2]^{5/2}}; \qquad (0 < s' < s)$$

(si osservi che s nel caso nostro è sempre compreso fra 0 ed 1). Quindi

$$E < \frac{3}{2} \frac{c^2 y^2 s^2}{(c^2 - y^2)^{5/2}}.$$

Le (15) (16) danno pertanto

$$R = \int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} - c^2 \int \frac{s \cdot dy}{(c^2 - y^2)^{3/2}} + \varepsilon \tag{17}$$

dove

$$\varepsilon = \int E \cdot dy < \frac{3}{2} c^2 \int \frac{y^2 \cdot dy \cdot s^2}{(c^2 - y^2)^{5/2}} < \frac{3}{2} \frac{c^2 n_0^2}{(c^2 - n_0^2)^{5/2}} \int s^2 \cdot dy.$$

E ricordando la (13)

$$\varepsilon < \frac{3 c^2 (1+\alpha)^4 \beta^2 \alpha}{(c^2 - n_0^2)^{5/2}} = 3 \beta^2 \alpha (1+\alpha)^4 \frac{\operatorname{sen}^3 z}{(1 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)^{5/2}}. \tag{18}$$

Il primo termine nel secondo membro della (17) è, essendo 1 ed n_0 i valori limiti della y,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - c^2}} = \text{arc} \cdot \text{sen}(n_0 \,\text{sen}\, z) - z_0 .$$

È questa l'espressione che si otterrebbe, quando le superficie di egual densità fossero piani orizzontali. In tal caso, com' è notissimo, il modo di variare della densità non ha alcuna influenza sul calcolo della rifrazione, la quale resta determinata dalla semplice applicazione della legge di Cartesio, pel passaggio dal mezzo il cui *indice* è n_0 a quello di *indice* 1.

Veniamo al secondo termine nel secondo membro della (17). Esso può scriversi, colla integrazione per parti

$$(19) \qquad -c^2 \int \frac{s \cdot dy}{(c^2 - y^2)^{3/2}} = c^2 \int \frac{(y - n_0)\, ds}{(c^2 - y^2)^{3/2}} + 3c^2 \int \frac{y(y - n_0)\, s \cdot dy}{(c^2 - y^2)^{5/2}} .$$

L'ultimo termine che indicheremo con ζ è minore, in valore assoluto, di

$$\frac{-3c^2 n_0}{(c^2 - n_0^2)^{5/2}} \int (y - n_0)\, s \cdot dy$$

e, integrando per parti:

$$\zeta < \frac{3c^2 n_0}{2(c^2 - n_0^2)^{5/2}} \int (y - n_0)^2\, ds < \frac{3\alpha^2 \beta (1 + \alpha)^2 c^2}{2(c^2 - n_0^2)^{5/2}}$$

[vedi formola (14)]. Quindi finalmente

$$(20) \qquad \zeta < \frac{3\alpha^2 \beta (1 + \alpha)^2 \,\text{sen}^3 z}{2(1 - n_0^2 \,\text{sen}^2 z)^{5/2}} .$$

Il primo termine nel secondo membro della (19) può scriversi ricordando la (8)

$$(21) \qquad c^2 \int \frac{(y - n_0)\, ds}{(c^2 - y^2)^{3/2}} = c^2 \alpha\beta \int \frac{y}{(c^2 - y^2)^{3/2}} \frac{dp}{p_0} .$$

E poichè y è compreso fra 1 ed n_0, questa espressione sarà compresa fra

$$(22) \qquad \frac{-c^2 \alpha\beta}{(c^2 - 1)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \frac{-c^2 \alpha\beta n_0}{(c^2 - n_0^2)^{3/2}} .$$

Assumendo pertanto, come valore approssimato della espressione (21), la media aritmetica delle (22), commetteremo un errore δ il quale sarà, in valore assoluto, minore di metà della differenza

$$c^2 \alpha\beta \left[\frac{n_0}{(c^2 - n_0^2)^{3/2}} - \frac{1}{(c^2 - 1)^{3/2}} \right] .$$

Ricordando che $n_0 = 1 + \alpha$, si trova, con un'ovvia applicazione dello sviluppo di Taylor, che questa differenza è, in ogni caso, minore di

$$\frac{c^2 \alpha^2 \beta (c^2 + 2n_0^2)}{(c^2 - n_0^2)^{5/2}} .$$

Quindi, in valore assoluto,

$$\delta < \frac{\alpha^2 \beta \operatorname{sen} z (1 + 2n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)}{2(1 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)^{5/2}} . \tag{23}$$

Sicchè finalmente, se calcoliamo la rifrazione colla formola

$$R = \operatorname{arc\,sen}(n_0 \operatorname{sen} z) - z_0 - \frac{\alpha\beta \operatorname{sen} z}{2} \left[\frac{1}{\cos^3 z} + \frac{n_0}{(1 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)^{3/2}} \right] \tag{24}$$

l'errore commesso sarà uguale alla somma dei tre errori indicati con ε, ζ, e δ, dei quali i limiti superiori sono rispettivamente dati dalle formole (18) (20) e (23). Ma è da osservare che l'errore indicato con ε è, in ogni caso, positivo, mentre quello denotato con ζ è negativo, e che di più, nelle ordinarie condizioni atmosferiche, il limite superiore del valore assoluto di ζ è inferiore a quello di ε [1], sicchè $\varepsilon + \zeta$ sarà in ogni caso minore, in valore assoluto, del limite superiore di ε. Quindi, finalmente, il limite superiore dell'errore cui è soggetta la formola (24) è minore di

$$|\varepsilon_{max}| + \delta_{max}|$$

dove i due massimi sono espressi dai secondi membri delle (18) e (23) rispettivamente.

Per le applicazioni numeriche, giova ricordare che per $t_0 = 273$, $p_0 = 760^{mm}$ i valori di α e β sono

$$\alpha_0 = 0{,}0002927 \ , \ \beta_0 = 0{,}001254$$

e che variando t_0, p_0, r_0, si ha con molta approssimazione

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\varrho_0}{\varrho_0'} = \frac{p_0}{p_0'} \frac{t_0'}{t_0} \quad ; \quad \frac{\beta}{\beta'} = \frac{p_0}{p_0'} \frac{r_0}{r_0'} \frac{\varrho_0'}{\varrho_0} = \frac{r_0}{r_0'} \frac{t_0}{t_0'} \tag{25}$$

quindi

$$\alpha = 0{,}0002923 \frac{p_0}{760} \frac{277}{t_0} \quad ; \quad \beta = 0{,}001254 \frac{r_0}{6370} \cdot \frac{t_0}{253} ,$$

[1] Il rapporto fra il secondo membro della (18) e quello della (20) è

$$\frac{\beta}{\alpha} (1 + \alpha)(1 + 2\alpha).$$

Per $t_0 = 273°$, $p_0 = 760^{mm}$, questo rapporto è $= 4{,}28\ldots$ Variando t_0 e p_0 il rapporto diventa prossimamente

$$\left(\frac{t_0}{273}\right)^2 \left(\frac{760}{p^0}\right) 4{,}28\ldots$$

Per $t_0 = 253°$, $p_0 = 790^{mm}$ esso si riduce quindi a 3,54 circa.

dove r_0 è contato in kilometri. Coi valori dati di α_0 β_0, si ottiene

$z =$	45°	60°	75°
$\varepsilon_{max} =$	0″,0006	0″,006	0″,23
$\delta_{max} =$	0″,00015	0″,0009	0″,009.

4. Cerchiamo ora quali modificazioni subiscano i calcoli precedenti nella ipotesi di una *inversione* della temperatura, ossia quando si ammetta che dal luogo di osservazione fino ad una certa altezza la temperatura varii in guisa da raggiungere un massimo $t_m > t_0$.

In questo caso, posto

$$\tau = \frac{t_m}{t_0},$$

alla diseguaglianza $\frac{p}{p_0} \leq \frac{\varrho}{\varrho_0}$ si dovrà nel paragrafo 3 sostituire la

$$\frac{p}{p_0} \leq \frac{\varrho}{\varrho_0} \tau$$

con che la disuguaglianza (11) si muta nella

$$(11') \qquad \int s^q \cdot dy < \beta(q\alpha + \tau q) \int s^{q-1} \cdot dy$$

le (13) e (18) nelle

$$\int s^2 \cdot dy < 2\beta^2\alpha(1 + \alpha)(\tau + \alpha)$$

$$(18') \qquad \varepsilon < 3\beta^2\alpha(1 + \alpha)^3 (\tau + \alpha) \frac{\operatorname{sen}^3 z}{(1 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 z)^{5/2}}.$$

Attesa la piccolezza di α, si può dedurre dal paragone delle (18) (18′) che per effetto dell'inversione della temperatura, il limite superiore dell'errore ε cresce, circa, nel rapporto da 1 a τ ossia da t_0 a t_m. Supposto un massimo di 15° per la differenza $t_m - t_0$, e posto $t_0 = 273$ si ha $\frac{t_m}{t_0} = 1{,}055$ circa. L'effetto dell'inversione della temperatura (entro i limiti in cui questo fatto può praticamente verificarsi), può dunque ritenersi trascurabile per quanto riguarda il grado di precisione nel calcolo della rifrazione.

5. Vediamo finalmente di quanto possa crescere questo grado di precisione pel fatto della conoscenza empirica della costituzione dell'atmosfera a partire dal suolo fino ad una certa altezza.

Indichiamo con l_0, l_1, l_2 rispettivamente la superficie di livello del luogo di osservazione, quella che limita superiormente la regione esplorata dell'atmosfera, e la superficie limite esteriore. Possiamo allora esprimere la rifrazione totale colla somma

$$R = R_1 + R_2,$$

ove R_1 esprime l'integrale nel secondo membro della (15) esteso fra i limiti l_0, l_1, mentre R_2 è lo stesso integrale fra l_1 ed l_2. Poichè la costituzione dell'atmosfera è nota fra l_0 ed l_1, si possono supporre calcolati i valori numerici dell'indice n per i valori di r entro questi limiti, epperò l'integrale R_1 può supporsi calcolato con una quadratura meccanica, con quanta approssimazione si vuole.

Quanto al rimanente integrale R_2 non c'è altro a fare che applicare al calcolo di esso la formola approssimativa (24) dove però i valori delle costanti iniziali r_0, p_0, t_0, n_0, siano quelli relativi alla superficie l_1 limite superiore della regione esplorata e la distanza zenitale z è quella della trajettoria luminosa nel punto in cui essa attraversa la superficie l_1. Trascurando tuttavia, il che qui è lecito di fare, la variazione di z e di n_0 sen z e tenendo conto delle (25) si vede facilmente che, dette, come sopra, p_0, t_0, r_0 le costanti relative al luogo di osservazione, p'_0, t'_0, r'_0 le cose analoghe per la superficie l_1, la conoscenza dello stato dell'atmosfera nello strato l_0 l_1 ci dà modo di far diminuire i limiti di errore indicati con ε_{max} e δ_{max} nel rapporto

$$(26)\qquad \begin{cases} 1 : \dfrac{p'_0}{p_0}\,\dfrac{t'_0}{t_0}\left(\dfrac{r'_0}{r_0}\right)^2 & \text{per } \varepsilon_{max}, \\[2ex] 1 : \left(\dfrac{p'_0}{p_0}\right)^2 \dfrac{t_0}{t'_0}\,\dfrac{r'_0}{r_0} & \text{per } \delta_{max}. \end{cases}$$

Supposto che si conosca la costituzione dell'atmosfera fino all'altezza di 10 km., ed ammesso, in conformità,

$$\begin{array}{lll} p'_0 = 220^{\text{mm}} & t'_0 = 225^\circ & r'_0 = 6380 \text{ km} \\ p_0 = 760 & t_0 = 280 & r_0 = 6370 \end{array}$$

i due rapporti ora detti diventano rispettivamente

$$1 : 0{,}232 \qquad 1 : 0{,}104;$$

Si ridurrebbe dunque a *meno di un quarto* il limite superiore dell'errore teorico nel calcolo della rifrazione.

È poi chiaro che la sola conoscenza del *valore iniziale del gradiente termico verticale* dell'aria può accrescere di poco o nulla la precisione nel calcolo della rifrazione. Infatti poichè, per concorde risultato delle osservazioni recenti [1] la variazione di temperatura da 1 a 2 km. d'altezza è già notevolmente differente di quella da 0 a 1 km., è chiaro che la conoscenza di quel valore iniziale equivale all'assegnare lo stato dell'atmosfera per una altezza non superiore a 1 km.; nel qual caso i rapporti (26) vengono a differire ben poco dall'unità.

[1] Vedi p. es. De Marchi, *Meteorologia generale*, pag. 113 e segg. (Milano, 1905).

Fisica tecnologica. — *Circa alle influenze della temperatura, delle vibrazioni, della umidità, dell'elettrolisi, e della untuosità, sull'adesione e sull'attrito nello sfregamento fra vari corpi, e sul lavoro di alcuni aratri; riassunto di appunti sperimentali.* Nota del Socio ANTONIO PACINOTTI.

Con lo scopo di trovar modo di diminuire un poco il lavoro occorrente nella trazione di arnesi aratorii, ho fatto qualche misura di coefficienti di attrito e di adesione fra alcuni corpi, e specialmente fra il ferro ed alcune terre, cercando di riconoscere se tali coefficienti possano diminuirsi col fare intervenire circostanze convenienti. Ho anche alquanto cercato di misurare direttamente il volume del terreno lavorato da un aratro e da un coltro, ed il corrispondente lavoro meccanico occorso, tanto stando nelle ordinarie condizioni della lavorazione del terreno, quanto adoprando influenze favorevoli alla diminuzione della trazione. Sebbene molto tuttora rimanga da fare sia per estendere le prove, sia per aumentarne l'accuratezza, tuttavia cerco di raccogliere succintamente diversi risultati conseguiti, e di presentarli come una prima approssimazione.

Un resoconto sufficientemente particolareggiato della massima parte delle prove fino ad ora fatte, si va stampando pel volume XXII delle Memorie della Società toscana di Scienze naturali; di tal resoconto presento all'Accademia una copia manoscritta, perchè in esso possono riscontrarsi parecchi particolari che per brevità tralascio in questo riassunto dei risultati principali ottenuti.

Nei capitoli 1, 3, 15 di quel resoconto sono riferite misure dell'angolo limite per lo scorrimento prodotto dal peso di una piccola slitta sopra un piccolo piano inclinato, alla temperatura ambiente ed alla alta temperatura generata dalla fiammella di un bruciatore di gaz posto sotto al piano inclinato; dalle quali misure in diversi casi sono conseguiti i valori del coefficiente d'attrito fra il piano inclinato e la slitta.

Dicendo P il peso della slitta, α la inclinazione con l'orizzonte del piano su cui appoggia, s la superficie del vero appoggio, f il coefficiente di attrito, λ il coefficiente di adesione; allorchè α sia il minimo angolo mantenente la discesa sul piano inclinato; si ha $f \mathrm{P} \cos\alpha + \lambda s = \mathrm{P} \operatorname{sen}\alpha$ e posson bastare due prove, nelle quali si sappia che f e λ rimangono invariati e P ed s abbiano valori ben conosciuti non del tutto uguali nelle due prove, per conseguire due relazioni che assegnino separatamente il valore di f e quello di λ.

Se si adopra una medesima slitta differentemente carica nelle due prove, e che la slitta ed il piano inclinato siano sufficientemente rigidi in modo da poter considerare invariata la estensione s del vero appoggio della slitta

sul piano di scorrimento, qualora nelle due prove si consegua lo stesso valore α dell'angolo limite di scorrimento, si può ritenere essere $\lambda = 0$ ed $f = \text{tang}\,\alpha$. Allora l'angolo α si dice angolo limite di attrito.

Dalle misure dell'angolo limite di attrito sono risultati, in diversi casi, a temperature elevate coefficienti di attrito più grandi che a bassa temperatura; giacchè si è avuto:

Pel ferro limato scorrevole sulla superficie divenuta violetta dell'acciaio
alla temperatura bassa dell'ambiente $f = \text{tang}\,13°30' = 0{,}2400$;
ed a circa 390°, $f = \text{tang}\,23°10' = 0{,}4279$.

Per l'ottone non lucente sulla superficie divenuta violetta dell'acciaio
alla temperatura ambiente $f = \text{tang}\,19°30' = 0{,}3541$;
ed a circa 390°, $f = \text{tang}\,23° = 0{,}4245$.

Pel platino sopra il platino
alla temperatura ambiente di 11°, $f = \text{tang}\,18° = 0{,}3249$;
ed a circa 165°, $f = \text{tang}\,23°30' = 0{,}4348$.

Per una terra sciolta secca, sulla superficie leggermente ossidata dell'acciaio
alla temperatura ambiente, $f = \text{tang}\,29° = 0{,}5543$;
e verso 390°, $f = \text{tang}\,31° = 0{,}6008$.

Per terra argilla asciutta sull'acciaio abbrunito da leggera ossidazione
alla temperatura ambiente $f = \text{tang}\,21° = 0{,}3838$;
ed a circa 390°, $f = \text{tang}\,30°30' = 0{,}5891$.

Avvertiamo che nel caso del ferro a temperatura molto elevata esposto all'aria, si ha aumento di ossidazione al quale è attribuibile l'aumento dell'attrito.

Ma per i corpi che rimangono inalterati si può considerare come regola generale che l'attrito diminuisca coll'aumentare della temperatura. con alluminio sopra alluminio a 131° ho ottenuto $f = \text{tang}\,25°15 = 0{,}4716$ e dopo il lento ritorno alla temperatura ambiente 11°, $f = \text{tang}\,28°45' = = 0{,}5486$.

Il cristallo sopra cristallo ha somministrato
alla temperatura 11°, $f = \text{tang}\,14° = 0{,}2493$;
ed a 125° circa, $f = \text{tang}\,8°20' = 0{,}1465$.

Il platino sul cristallo pure ha somministrato
alla temperatura 11°, $f = \text{tang}\,12° = 0{,}2125$;
ed a 125° circa, $f = \text{tang}\,8°20' = 0{,}1465$.

Il cristallo finamente spulito sopra cristallo finamente spulito ha dato
alla temperatura 9° circa $f = \text{tang}\,19°30' = 0{,}3541$;
e con 125° circa, $f = \text{tang}\,14°30' = 0{,}2586$.

Mica sopra mica in lamine trasparenti non colorate
a 9° circa $f = \text{tang}\,19°35' = 0{,}3558$;
ed a 125° circa, $f = \text{tang}\,13° = 2308$.

Per non riconoscere la diminuzione dell'attrito con l'aumentare della temperatura se si volesse sottilizzare, potremmo nel caso dell'alluminio avvertire che il leggerissimo strato di ossidazione prodotto dall'innalzamento di temperatura darà luogo ad un poco di adesione, e non resterà rigido durante lo scorrimento; e nel caso del cristallo si potrebbe dubitare che la maggior resistenza allo scorrimento ottenuta a bassa temperatura, quando il fornello era spento, fosse da attribuirsi ad attrazione elettrica fra una carica per lo sfregamento presa dalla capsulina che faceva da slitta, ed una carica di nome contrario lasciata sul camino percorso sul cristallo; avvertendo che tali cariche non si produrranno quando, acceso il fornello, la lastretta di cristallo è lambita dai gaz caldi della combustione, e tenuta da essi in comunicazione col suolo. Ma queste sottigliezze non valgono a sufficienza. Ho avvicinato al piatto di un elettroscopio a foglie d'oro la lastretta di cristallo, e non solo la ho trovata scarica quando era calda e da poco stata lambita dai prodotti della fiamma; ma anche quando essendo alla temperatura ambiente la avevo appositamente, molto ripetutamente, sfregata con la capsulina di platino, o con quella di cristallo. E l'elettroscopio adoprato era assai sensibile, giacchè una bacchetta di cristallo sfregata fortemente con panno lano ed avvicinata ad esso, ne faceva divergere le fogliette enormemente.

Del resto, son tornato recentemente a guardare l'angolo limite d'attrito fra la piccola slitta di ferro ed il piccolo piano inclinato di acciaio a varie temperature, con l'avvertenza di non spingere l'inalzamento di temperatura oltre ai 100^{c} onde non avvenga sensibile ossidazione; e fino a tal limite, ho visto che l'attrito diminuisce col crescere della temperatura, e quando le superficie di ferro e acciaio sono metalliche, e quando sono rivestite di ossidazione che le rende violette.

Soltanto il platino sembra fare eccezione alla regola; ma quando anche ciò si confermasse, non vi sarebbe incompatibilità nel crescere l'attrito col crescere della temperatura se lo sfregamento avviene fra platino e platino, ed invece decrescere se lo sfregamento avviene sul cristallo; soltanto questa diversa influenza delle vibrazioni calorifiche nella modificazione che l'aumento della loro ampiezza apporta sulla resistenza di attrito, può far pensare che si producano con lunghezze d'onda estremamente piccole vibrazioni concordanti nel cristallo, ed invece frà loro discordanti fra platino e platino.

Si può vedere qualche influenza alquanto analoga delle vibrazioni acustiche sull'attrito. Sopra una lastra sonora di ottone, avvitata sul centro ad una colonnetta di un lungo banchetto che porta similmente altre cinque lastre, ho posato un piccolo parallelepipedo di legno; e sottoponendo ad una estremità del banchetto un sostegno inalzabile, ho trovato occorrere prossimamente l'angolo 35°30′ fra la lastra e l'orizzonte per ottenere che continuasse la discesa del pezzetto di legno sulla lastra allorchè veniva un poco smosso in discesa. La superficie della lastra è leggermente ossidata; la sua forma

è quadrata con 20 centimetri di lato, e con grossezza poco minore a due millimetri. Il parallelepipedo di legno pesa 4 grammi; è lungo centimetri 3,1, largo 1,6, alto 1,2; esso non parte da sè in discesa sebbene la lastra sia inclinata a 35°30′, quando la lastra è in quiete: ma se con l'archetto di crini si sfrega leggermente uno spigolo della lastra in modo da farla un poco suonare, avviene la discesa rapida del pezzetto di legno.

Ho abbassato il sostegno in modo che l'inclinazione della lastra con l'orizzonte era ridotta a 20°, ed era di gran lunga insufficiente a mantenere la discesa del prismetto di legno anche dopo il di lui smovimento. Il prismetto di legno essendo posto presso il canto diagonalmente opposto alla punta della lastra che fra l'indice ed il pollice della mano sinistra stringevo onde facilitare la formazione delle linee nodali diagonali; quando ho attaccato con l'archetto il mezzo del lato in modo che corrispondentemente alle linee nodali diagonali, la lastra suonasse il sol_3, avveniva decisamente la discesa del prismetto. Ma se appoggiando sul lembo della lastra le dita indice e medio della sinistra sfregavo con l'archetto fra esse interposto, in modo che la lastra anche intensamente producesse un suono acuto corrispondente a piccoli compartimenti vibranti, il prismetto di legno trovava subito qualche luogo da cui non discendeva, dove copriva due compartimenti di inversa fase.

Analoghi risultati si ottengono con soli due gradi di inclinazione, e specialmente con lastre più grosse.

Per esprimere come le vibrazioni calorifiche discordanti possano aumentare l'attrito, ed invece le vibrazioni calorifiche concordanti lo possano diminuire; avverto che l'appoggio della slitta in ogni caso si fa sopra un gran numero di minimi compartimenti vibranti, e che se le vibrazioni si suppongono discordanti nell'insieme non risulta da esse una impulsione sulla slitta, ma soltanto per l'inalzamento di temperatura le superficie d'appoggio divengono più scabrose di scabrosità minime varianti che possono accrescerne gli addentellamenti particellari e l'attrito; mentre invece se le vibrazioni calorifiche si suppongono concordanti, in modo che due compartimenti contigui posti ai due lati di una medesima linea nodale siano in opposizione di fase, non solo contemporaneamente alcuni compartimenti presenteranno il massimo di avvallamento ed altrettanti il massimo di rilievo, ma anche contemporaneamente torneranno tutti insieme a ricostituire la superficie nella sua posizione di equilibrio; e da tal posizione di equilibrio durante il tempo di mezza vibrazione semplice la slitta verrà spinta in fuori normalmente alla superficie, a disimpegnare le sue rugosità, talmente che l'attrito ne resulterà diminuito.

Nello sfregamento del ferro dell'aratro con la terra alquanto umida non è trascurabile la adesione, e per apprezzarne il coefficiente separatamente dal coefficiente d'attrito, bisognerebbe anche osservare e misurare precisamente la estensione s della superficie veramente appoggiata ed aderente della slitta; cosa non sempre tanto facile, e che per ora nelle prove fatte col metodo

del piano inclinato non ho nemmeno approssimativamente realizzato. Tuttavia la misura dell'angolo limite di scorrimento α, e del peso P della slitta fa conoscere la resistenza complessiva risultante dalla adesione e dallo attrito $P \operatorname{sen} \alpha$, e non è inutile lo apprezzare come questa varia col variare della temperatura.

Per la terra sciolta un poco umida trovai come angolo limite sull'acciaio leggermente spontaneamente ossidato, alla temperatura ambiente l'angolo di 41 gradi, ed invece verso 390° ebbi 28°39′. E giacchè $\frac{\operatorname{sen} 28°30'}{\operatorname{sen} 41°} = 0{,}7273$, pel riscaldamento la resistenza complessiva era ridotta a circa tre quarti.

Per un parallelepipedo di argilla un poco umida, pesante $P = 0^k{,}026$ con circa il 12 per cento in peso di acqua facilmente evaporabile, la cui faccia rivolta contro l'acciaio misurava centimetri quadrati 9,88, ebbi alla temperatura ambiente come angolo limite 71°, e portata la lastretta d'acciaio verso 390° la discesa del parallepipedo fumante avvenne colla inclinazione di soli 12 gradi; e giacchè $\frac{\operatorname{sen} 12°}{\operatorname{sen} 71°} = 0{,}22$ pel riscaldamento a circa 390° la resistenza complessiva atteso lo sprigionarsi del vapor d'acqua fra l'acciaio caldo ed il prismetto di argilla umida era ridotta a meno di un quarto.

Sulla lastretta calda avendo lasciato asciugare il parallelepipedo di argilla, l'angolo limite ad alta temperatura è salito a 30°30′; e considerando come nulla la adesione della argilla secca contro l'acciaio caldo, si può considerare come coefficiente d'attrito fra questi corpi ad alta temperatura $f = \operatorname{tang} 30°30' = 0{,}5891$. Siccome i punti veramente sfreganti della argilla sulla lastra calda saranno divenuti quasi subito asciutti, si può ammettere che anche mentre fumava e scorreva con $\alpha = 12°$ il prismetto avesse per coefficiente d'attrito $f = 0{,}5891$, e si può valutare la forza F che il vapore faceva contro tutta la faccia del prismetto sotto la quale si sviluppava con l'avvertire che tal forza diminuiva la pressione $P \cos \alpha$ che sarebbe stata data dal peso, e che la adesione si poteva supporre nulla, in modo che si avesse la relazione $(P \cos \alpha - F) f = P \operatorname{sen} \alpha$ dalla quale si ricava $F = \frac{f P \cos \alpha - P \operatorname{sen} \alpha}{f}$. Nella quale espressione ponendo i valori numerici del caso riferito, si ottiene $F = 0^k{,}01625$ sopra tutti i 9,88 centimetri quadrati della faccia appoggiata del prismetto; ossia in media sopra ciascun centimetro quadrato grammi 1,645. E tenendo 13,59 grammi come peso di un centimetro cubico di mercurio, l'eccesso della pressione del vapore che si produceva sotto il prismetto sulla pressione atmosferica, avrebbe eguagliato la pressione data da una colonna di mercurio alta $1{,}645 : 13{,}59 = 0{,}12$ centimetri; ossia 1,2 millimetri.

La resistenza allo sfregamento del marmo sul marmo, che si trovava cresciuta dopo di aver riscaldato il marmo oltre 200° e di averlo lasciato

tornare lentamente alla temperatura ambiente, e che durante il raffreddamento andava crescendo col diminuire della temperatura, potrebbe supporsi influenzata da incipiente decomposizione chimica sulle superficie sfreganti e calde. Lo sviluppo di acido carbonico non avrebbe dovuto produrre sotto la slitta di marmo quasi a 100° nella prova considerata che l'aumento di pressione misurato da 2,2 millimetri di colonna di mercurio.

Come è riferito nel capitolo 4 della relazione, per procedere più speditamente nel riconoscimento delle resistenze allo scorrimento, presi a misurarle mediante la indicazione di un piccolo dinamometro con il quale tiravo orizzontalmente il prismetto di argilla posato sopra una lastra orizzontale di ferro o d'acciaio.

Dicendo R la trazione in chilogrammi indicata dal dinamometro, P il peso in chilogrammi della slitta compresa la carica sopra di essa aggiunta, S la superfice in metri quadrati della faccia d'appoggio, ed ε la frazione di tal superficie che veramente appoggia nello scorrimento ed aderisce; dicendo λ il coefficiente di adesione, ed f il coefficiente d'attrito si ha

$$Pf + S\varepsilon\lambda = R.$$

Cosicchè con due o più prove nelle quali f e λ restino invariati, e le altre quantità siano ben conosciute e diano coefficienti di f e λ non in tutte le prove i medesimi, si posson valutare i valori di f e di λ.

Per qualche prova nella quale non era stato osservato il valore di ε, ho tentato di considerare $\varepsilon\lambda$ come coefficiente di adesione apparente su tutta la superficie S; ma qui non riporto i coefficienti apparenti di adesione e di attrito per pressioni crescenti considerati nei capitoli 4 e 5 per l'argilla specialmente se alquanto plastica per l'umidità, perchè sono teoricamente inesatti, sebbene possano praticamente servire a rappresentare e talora a valutare approssimativamente la resistenza complessiva incontrata dalla argilla nello sfregamento.

Nel § 13 onde evitare, per quanto è possibile, che per la plasticità della argilla la estensione della superficie in contatto crescesse nelle prove successive, e poterne apprezzare approssimativamente il valore dalla ispezione della parte divenuta lustrata sulla faccia d'appoggio, ho incominciato con la maggiore delle cariche nella prima prova; e siccome il velo argilloso lasciato nello sfregamento sulla superficie dell'acciaio accresce fino ad un certo limite la adesione, ho ripetuto i passaggi del prismetto d'argilla un poco plastica sullo acciaio fino a conseguire che la trazione più non cambiasse sensibilmente; e tenendo conto soltanto delle trazioni occorrenti per lo scorrimento della argilla sul velo argilloso già formato, ho cercato di avvicinarmi al riconoscimento dei coefficienti assoluti di attrito e di adesione

nelle condizioni che si produrranno ordinariamente nella coltratura di terreno molto argilloso dotato di circa il 17 per cento di acqua spontaneamente evaporabile, ottenendo

$$f = 0{,}4992 \text{ con } \lambda = 1344{,}7 \text{ chilogrammi per metro quadrato.}$$

Nel § 12 il prismetto trascinato sulla lastra d'acciaio netta lucente essendo di argilla secca, sfrega su pochi piccoli appoggi che dopo molti passaggi si son coperti di ossido di ferro dando luogo ad $f_0 = 0{,}567$ con $\lambda_0 = 1377$ quando il prismetto non vibra; perchè vibrando andrebbe con trazioni assai minori.

Nel § 9. Dalla faccia d'appoggio del prismetto d'argilla un poco umida di circa 7 centimetri quadrati di superficie passava alla lastra d'acciaio una corrente elettrica di circa un decimo di ampère, e per l'acqua alcalina che essa portava sulla lastra d'acciaio era molto diminuita la resistenza allo scorrimento, e si aveva $f' = 0{,}1666$ con $\lambda' = 17{,}5$.

Nel § 11. Per l'aggiunta di acqua sulla superficie dello acciaio pulita, l'argilla vi ha mostrato i coefficienti $f_1 = 0{,}3333$ con $\lambda_1 = 32{,}9$. E se l'acqua aggiunta sulla lastra d'acciaio pulita conteneva il 10 per cento di potassa si aveva $f'' = 0{,}0666$ con $\lambda'' = 119{,}2$.

Nel § 14. Sull'acciaio pulito reso leggerissimamente untuoso con minima quantità d'olio d'oliva riasciugato con tela pulita, la argilla un poco umida scorre assai facilmente, e somministra $f_u = 0{,}2294$ con $\lambda_u = 205{,}7$.

§§ 2, 10. Ad un piccolo aratro in ferro conosciuto con la denominazione Sack da vigne corpo C, ho costruito nell'interno un fornello, nel quale può avvenire combustione di carbone che riscalda tutto il corpo di aratro. Tale aratro con la interposizione di un dinamometro venendo tirato da due uomini mediante un argano ad assolcare terra sciolta ed umida, richiese, allorchè il suo fornello era acceso, soltanto quattro quinti del lavoro che a parità di solco occorsegli quando il suo fornello era spento.

§ 10. La corrente elettrica stradale passava con piccola intensità andando dalla terra sciolta al piccolo aratro, sebbene la terra fosse umida; tuttavia si conseguiva a parità di volume scavato nel solco, il risparmio di quasi un decimo del lavoro occorso senza l'azione elettrolitica.

§ 16. La terra sciolta che veniva solcata essendo troppo poco umida, pochissima untuosità stesa sulle guance dell'aratrino non produsse che il cinque per cento di risparmio sul lavoro da esso richiesto; ed anche dopo l'aggiunta del riscaldamento, il risparmio del lavoro non superò il dodici per cento.

§§ 6, 7, 8. Un coltro Mélotte n. 2 nel quale è stato costruito un fornello interno per poterne scaldare l'orecchione ed alquanto il vomere, a parità di volume lavorato in terreno argilloso umido un poco più del consueto,

richiese dai bovi allorchè il suo fornello era acceso soltanto tre quarti del lavoro che occorsegli quando il suo fornello era spento; ma il vantaggio prodotto dal riscaldamento del coltro diminuì assai col diminuire della umidità del terreno.

§ 16. In terreno argilloso, contenente il 17 per cento in peso di acqua spontaneamente evaporabile, un pocolino di untuosità distesa su tutta la superficie sfregante del coltro ha prodotto il risparmio di oltre un quarto del lavoro senza di essa occorso, a parità di volume di terreno coltrato. La piccola spesa per la poca untuosità produrrebbe anche diminuzione nel logoramento del coltro.

Cristallografia. — *La trasformazione delle coordinate dei cristalli.* Nota del Corrispondente C. Viola.

Il problema della trasformazione delle coordinate non trova spesso applicazione in cristallografia, perchè l'orientamento dei cristalli durante la misura e lo studio di centinaia di individui offre già da sè il sistema di coordinate più indicato. La trasformazione delle coordinate è nondimeno talvolta necessaria; ed è indispensabile quando si voglia aggruppare i cristalli delle varie simmetrie in una unica figura fondamentale (Grundgestalt). È noto che il problema della trasformazione delle coordinate è ormai esaurito in seguito a vari lavori originali, come quelli di A. T. Kupffer 1826, W. H. Miller 1839, C. Fr. Naumann 1856, Q. Sella 1857, Th. Liebisch 1881, R. Panebianco, G. La Valle ecc., e che perciò poco o nulla rimane a dirne di nuovo. Ma il presente problema è suscettibile di ricevere più luce e semplicità; ciò si vuol dimostrare in questa Nota.

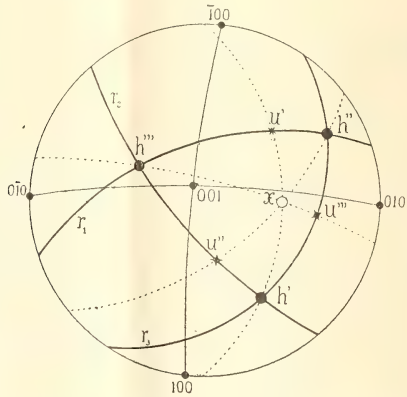
Sono date tre faccie del cristallo, figura annessa, che vogliamo denominare con h', h'', h''', i cui simboli nel vecchio sistema delle coordinate siano rispettivamente $(h'_1\, h'_2\, h'_3)$, $(h''_1\, h''_2\, h''_3)$, $(h'''_1\, h'''_2\, h'''_3)$. Con queste tre faccie sono date anche le tre zone r_1, r_2, r_3, le quali esse determinano; e cioè r_1 la zona della coppia di faccie $h''\, h'''$, r_2 della coppia $h'''\, h'$ ed r_3 della coppia $h'\, h''$. Siano $[r'_1\, r''_1\, r'''_1]$, $[r'_2\, r''_2\, r'''_2]$, $[r'_3\, r''_3\, r'''_3]$ i rispettivi simboli delle dette tre zone in rispetto al vecchio sistema delle coordinate, e determinati con le regole note.

Il problema di cui qui si tratta è questo: il vecchio sistema delle coordinate rispetto al quale si trova riferito il cristallo, ha da essere trasformato in un nuovo, le cui faccie fondamentali sono h', h'', h'''. Allora i nuovi assi del cristallo saranno quelli delle tre zone r_1, r_2, r_3, e le faccie del cristallo acquistano nuovi simboli. E, per esempio, quale simbolo riceverà nel nuovo sistema la faccia x, il cui simbolo nel vecchio sistema è dato ed è $(x_1\, x_2\, x_3)$?

Si osservi che chiamando con y_1, y_2, y_3 tre numeri, si può sempre esprimere i tre indici di una faccia qualsiasi x nel modo seguente, salvo un fattore di proporzionalità:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = y_1 h_1' + y_2 h_1'' + y_3 h_1''', \\ x_2 = y_1 h_2' + y_2 h_2'' + y_3 h_2''', \\ x_3 = y_1 h_3' + y_2 h_3'' + y_3 h_3'''; \end{cases}$$

dove i tre numeri y_1, y_2, y_3 sono indipendenti dal sistema delle coordinate, che si assume. Questo si dimostra elementarmente con un tratto di penna.



Si moltiplichi le equazioni (1) successivamente per r_1', r_1'', r_1''' e si sommino; si avrà dopo questa operazione:

$$x_1 r_1' + x_2 r_1'' + x_3 r_1''' = y_1(h_1' r_1' + h_2' r_1'' + h_3' r_1'''),$$

osservando che

$$h_1'' r_1' + h_2'' r_1'' + h_3'' r_1''' = 0$$

e

$$h_1''' r_1' + h_2''' r_1'' + h_3''' r_1''' = 0,$$

poichè le due faccie h'' e h''' sono nella zona r_1.

Si farà in seguito analoga operazione con i tre indici r_2', r_2'', r_2''' e poscia con gli indici r_3', r_3'', r_3''', e si otterranno ancora le due espressioni:

$$x_1 r_2' + x_2 r_2'' + x_3 r_2''' = y_2(h_1'' r_2' + h_2'' r_2'' + h_3'' r_2'''),$$
$$x_1 r_3' + x_2 r_3'' + x_3 r_3''' = y_3(h_1''' r_3' + h_2''' r_3'' + h_3''' r_3''').$$

Ma i tre trinomi

$$(2)\qquad \begin{cases} h'_1\ r'_1 + h'_2\ r''_1 + h'_3\ r'''_1 = \Delta_1, \\ h''_1\ r'_2 + h''_2\ r''_2 + h''_3\ r'''_2 = \Delta_2, \\ h'''_1\ r'_3 + h'''_2\ r''_3 + h'''_3\ r'''_3 = \Delta_3, \end{cases}$$

sono fra di loro eguali, epperò le tre espressioni precedenti si semplificano così:

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1 = x_1 r'_1 + x_2 r''_1 + x_3 r'''_1, \\ y_2 = x_1 r'_2 + x_2 r''_2 + x_3 r'''_2, \\ y_3 = x_1 r'_3 + x_2 r''_3 + x_3 r'''_3; \end{cases}$$

dalle quali si vede che dato x_1, x_2, x_3 e le tre faccie h', h'', h''', sono anche determinabili i tre numeri y_1, y_2, y_3, i quali introdotti nelle (1) dànno gli indici x_1, x_2, x_3. Ora ci rimane a dare la prova che questi tre numeri sono indipendenti dal sistema di coordinate che si assume. A tale uopo si scrivano le equazioni (1) nella forma:

$$(1)_a\qquad \begin{cases} x_1 - y_1\ h'_1 = y_2\ h''_1 + y_3\ h'''_1 = u'_1, \\ x_2 - y_1\ h'_2 = y_2\ h''_2 + y_3\ h'''_2 = u'_2, \\ x_3 - y_1\ h'_3 = y_2\ h''_3 + y_3\ h'''_3 = u'_3. \end{cases}$$

È evidente che (u'_1, u'_2, u'_3) è il simbolo di una faccia u', vedi (figura annessa), la quale è comune alla zona $h''\ h'''$ e alla zona $x\ h'$. Ed è noto che se una faccia trovasi in una zona, i due numeri che la determinano, qui y_2 e y_3, ovvero 1 e $-y_1$, sono indipendenti dal sistema delle coordinate che si assume. Dunque risulta che la faccia u' trovantesi nella zona r_1 data dalla coppia $h''\ h'''$, determina con la faccia h' una zona, per la quale passa anche la faccia x; e i numeri y_2 e y_3 che fissano la posizione di questa faccia u', sono indipendenti dal sistema delle coordinate che si assume.

Nella medesima maniera si troverà una faccia u'' la quale è contenuta nella zona r_2 data dalla coppia $h'''\ h'$, e determina nella faccia h'' una zona, per la quale passa la faccia x; e qui pure i due numeri y_3, y_1 che fissano la posizione di questa faccia u'', sono indipendenti dal sistema delle coordinate che si assume, ecc. Epperò è definitivamente dimostrato che i tre numeri y_1, y_2, y_3 dell'equazioni (1) sono indipendenti dal sistema delle coordinate, che si assume.

Dimostrato ciò, sarà lecito cambiare il sistema delle coordinate, senza cambiare i numeri y_1, y_2, y_3 nelle equazioni (1). Per avvicinarci al nostro problema, si eseguisca il cambiamento delle coordinate in guisa che i simboli delle faccie h', h'', h''' divengano rispettivamente (100), (010), (001), ossia che le dette tre faccie siano i nuovi piani fondamentali del sistema.

Con ciò cambierà anche il simbolo di una qualsiasi faccia x. Faremo dunque nelle (1)

$$\begin{aligned} h'_1 &= 1 \;, & h'_2 &= 0 \;, & h'_3 &= 0 \,, \\ h''_1 &= 0 \;, & h''_2 &= 1 \;, & h''_3 &= 0 \,, \\ h'''_1 &= 0 \;, & h'''_2 &= 0 \;, & h'''_3 &= 1 \,, \end{aligned}$$

e chiamando con x'_1, x'_2, x'_3, i nuovi indici della faccia x avremo dalle (1):

$$(1)_b \qquad x'_1 = y_1 \;, \quad x'_2 = y_2 \;, \quad x'_3 = y_3 \,.$$

Dunque i tre numeri y_1, y_2, y_3 denotano gli indici della faccia x, quando essa si immagini riferita al sistema delle coordinate che ha per piani fondamentali h', h'', h''', e per assi r_1, r_2, r_3.

Il nostro problema è pertanto risoluto. Infatti dalle $(1)_b$ e dalle (3) abbiamo:

$$(3)_a \qquad \begin{cases} x'_1 = x_1 r'_1 + x_2 r''_1 + x_3 r'''_1 \,, \\ x'_2 = x_1 r'_2 + x_2 r''_2 + x_3 r'''_2 \,, \\ x'_3 = x_1 r'_3 + x_2 r''_3 + x_3 r'''_3 \,. \end{cases}$$

Le espressioni (1) e le espressioni (3) hanno una grande analogia fra di loro; anzi le une non sono che le reciproche delle altre. Ciò risulterà più chiaro dalle considerazioni che ora faremo.

Allorchè le trasformazioni delle coordinate sono state eseguite col sistema dei trinomi $(3)_a$ sarà possibile determinare gli indici che i vecchi piani fondamentali ricevono per rispetto al nuovo sistema delle coordinate. Trattandosi per esempio del vecchio piano fondamentale (100), per avere il suo nuovo simbolo si farà nelle $(3)_a$ $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; con ciò i nuovi indici della faccia (100) saranno:

$$x'_1 = r'_1 \;, \quad x'_2 = r'_2 \;, \quad x'_3 = r'_3 \,.$$

E analogamente il simbolo del vecchio piano fondamentale (010) per rispetto al nuovo sistema delle coordinate sarà $(r''_1\, r''_2\, r''_3)$; ed $(r'''_1\, r'''_2\, r'''_3)$ sarà il nuovo simbolo del piano (001).

Mentre dunque $(h'_1\, h'_2\, h'_3)$, $(h''_1\, h''_2\, h''_3)$, $(h'''_1\, h'''_2\, h'''_3)$ rappresentano i simboli dei nuovi piani fondamentali per rispetto al vecchio sistema delle coordinate, rappresenteranno $(r'_1\, r'_2\, r'_3)$, $(r''_1\, r''_2\, r''_3)$, $(r'''_1\, r'''_2\, r'''_3)$ i simboli dei vecchi piani fondamentali per rispetto al nuovo sistema delle coordinate.

E del pari come $[r'_1\, r''_1\, r'''_1]$, $[r'_2\, r''_2\, r'''_2]$, $[r'_3\, r''_3\, r'''_3]$ sono i simboli dei nuovi assi per rispetto al vecchio sistema delle coordinate, così $[h'_1\, h''_1\, h'''_1]$, $[h'_2\, h''_2\, h'''_2]$, $[h'_3\, h''_3\, h'''_3]$ saranno i simboli dei vecchi assi per rispetto al nuovo sistema delle coordinate.

Gli sviluppi fin qui fatti possono essere brevemente e sinteticamente riassunti nel modo che segue.

In tutti questi sviluppi apparisce sempre un trinomio della forma

$$x_1 r' + x_2 r'' + x_3 r''',$$

il quale è maneggevole e noto ai cristallografi pratici.

Esso indica, ove si annulla, che la faccia dal simbolo $(x_1 x_2 x_3)$ giace nella zona dal simbolo $[r' r'' r''']$.

E ove questo trinomio non si annulla, il suo valore, nel problema della trasformazione, dà l'indice nuovo della faccia dal vecchio simbolo $(x_1 x_2 x_3)$ per rispetto ad un nuovo asse il cui simbolo è $[r' r'' r''']$.

Operando la trasformazione dei simboli delle faccie di un cristallo mercè i trinomi $(3)_a$ si introduce insieme un nuovo piano unitario. La nuova faccia unitaria avrà per simbolo (111) per rispetto al nuovo sistema delle coordinate. Per sapere quale è il simbolo di questo nuovo piano unitario per rispetto al vecchio sistema delle coordinate, avremo da fare nelle equazioni (1) $y_1 = y_2 = y_3 = 1$; chiamando gli indici di questa faccia con z_1, z_2, z_3 le (1) ci dànno

$$(4) \qquad \begin{cases} z_1 = h'_1 + h''_1 + h'''_1, \\ z_2 = h'_2 + h''_2 + h'''_2, \\ z_3 = h'_3 + h''_3 + h'''_3. \end{cases}$$

D'altra parte il vecchio piano unitario nel vecchio sistema delle coordinate, cioè (111), cambierà di simbolo nel nuovo sistema delle coordinate. Vogliamo chiamare con $(a'_1 a'_2 a'_3)$ questo nuovo simbolo. I suoi indici ci saranno dati dalle equazioni $(3)_a$, facendo quivi $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Avremo dunque:

$$(5) \qquad \begin{cases} a'_1 = r'_1 + r''_1 + r'''_1, \\ a'_2 = r'_2 + r''_2 + r'''_2, \\ a'_3 = r'_3 + r''_3 + r'''_3. \end{cases}$$

Tutte le indeterminatezze che possono sorgere per effetto di un fattore di proporzionalità dai trinomi (1) e rispettivamente $(3)_a$, cadono di fronte alla determinazione della faccia unitaria, facendo uso degli stessi trinomi. Sia ad esempio dato nel problema della trasformazione che il vecchio piano unitario rimanga piano unitario anche nel nuovo sistema delle coordinate, non potremo allora prendere per indici nuovi i numeri x'_1, x'_2, x'_3 o rispettivamente i loro rapporti $x'_1 : x'_2 : x'_3$ ma bensì i rapporti seguenti:

$$(6) \qquad \frac{x'_1}{a'_1} : \frac{x'_2}{a'_2} : \frac{x'_3}{a'_3}.$$

Se poi si volesse generalizzare il problema della trasformazione delle coordinate, e stabilire cioè che non la vecchia faccia unitaria, ma una qualsiasi data faccia, diventi faccia unitaria nel nuovo sistema, avremo da procedere presso a poco come dianzi. Sia $(e_1\, e_2\, e_3)$ il simbolo per rispetto al vecchio sistema delle coordinate di quella qualsivoglia faccia, che deve divenire faccia unitaria nel nuovo sistema delle coordinate; in tale caso i nuovi indici della faccia data x non staranno nei rapporti $x'_1 : x'_2 : x'_3$ ma bensì nei rapporti seguenti:

$$\frac{x'_1}{e'_1} : \frac{x'_2}{e'_2} : \frac{x'_3}{e'_3}\,; \tag{7}$$

essendo determinati gli indici e'_1, e'_2, e'_3 mercè le equazioni $(3)_a$ poichè $(e'_1\, e'_2\, e'_3)$ deve essere il simbolo della faccia $(e_1\, e_2\, e_3)$ per rispetto al nuovo sistema delle coordinate. E questi nuovi indici sono:

$$\left\{\begin{aligned} e'_1 &= e_1\, r'_1 + e_2\, r''_1 + e_3\, r'''_1\,, \\ e'_2 &= e_1\, r'_2 + e_2\, r''_2 + e_3\, r'''_2\,, \\ e'_3 &= e_1\, r'_3 + e_2\, r''_3 + e_3\, r'''_3\,. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Esempi. — Come primo esempio vogliamo eseguire una trasformazione semplice, vale a dire cambiare un solo degli assi delle coordinate. Il nuovo asse che deve sostituire [100] sia dato dal simbolo [211]. Per questa trasformazione e per cercare il nuovo simbolo di una qualsivoglia faccia x il cui simbolo dato è $(x_1\, x_2\, x_3)$, avremo da calcolare il valore del trinomio

$$x_1\, r'_1 + x_2\, r''_1 + x_3\, r'''_1\,,$$

essendo $[r'_1\, r''_1\, r'''_1] = [211]$.

Il valore del dato trinomio è

$$2\, x_1 + x_2 + x_3\,;$$

epperò i nuovi indici della faccia x saranno

$$\begin{aligned} x'_1 &= 2\, x_1 + x_2 + x_3\,, \\ x'_2 &= x_2\,, \\ x'_3 &= x_3\,. \end{aligned}$$

Questa trasformazione è subordinata a una determinata faccia unitaria, il cui simbolo nel vecchio sistema delle coordinate si ottiene, facendo nelle ultime equazioni $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 1$. Il simbolo di questa nuova faccia unitaria è dunque $(z_1\, z_2\, z_3) = (\bar{1}22)$.

La vecchia faccia unitaria cambia di simbolo nel nuovo sistema delle

coordinate. I suoi indici si ottengono facendo nelle ultime equazioni $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Questi indici sono dunque:

$$a'_1 = 2 + 1 + 1 = 4,$$
$$a'_2 = 1,$$
$$a'_3 = 1.$$

Volendo che nella trasformazione delle coordinate rimanga come faccia unitaria la vecchia faccia unitaria (111), si dovranno prendere come nuovi indici della faccia qualsiasi x i rapporti seguenti:

$$\frac{2x_1 + x_2 + x_3}{4} : \frac{x_2}{1} : \frac{x_3}{1},$$

ossia

$$2x_1 + x_2 + x_3 : 4x_2 : 4x_3.$$

Il simbolo della faccia x che deriva da questi rapporti si trova dunque riferito al sistema degli assi [211], [010], [001], laddove il simbolo della stessa faccia x cioè $(x_1 x_2 x_3)$ è in rapporto col sistema degli assi (100), (010), (001) essendo in ambidue i sistemi la stessa faccia unitaria.

Come secondo esempio considereremo la trasformazione delle coordinate nei *feldispati*.

Questa importante specie minerale fu oggetto di molte ricerche sperimentali e teoriche. La sua comune orientazione è questa che la zona M l T rimane verticale, e la sfaldatura perfetta P guarda sopra verso l'osservatore. Secondo questa orientazione e avendo di mira la simmetria monoclina e triclina, risulta che faccie analoghe e analogamente sviluppate ricevono denominazione diversa, sicchè la figura fondamentale ne rimane incerta. Vari cristallografi si sono occupati di togliere questo inconveniente. Già Chr. S. Weiss considerò l'ortoclasio come pseudodimetrico. Mallart, Wallerant e altri ritennero, come ancora ritengono, i feldispati come pseudomonometrici. Anche Fedorow è di questo avviso osservando che la zona M P è pseudodimetrico-isotropa e la zona M T l è pseudoesagono-isotropa [1]. In una Memoria posteriore Fedorow osserva che i feldispati sono dimetricaloidi ed esagonaloidi [2]; e in una Nota recente assegna ai feldispati la struttura ottaedrica [3].

Nella mia cristallografia [4] io feci vedere che lo sviluppo delle faccie predominanti avviene attorno agli elementi di una figura fondamentale tertetraedica (drei- und vierzählige), e che principalmente le zone del dodecaedro sono quelle che predominano. Come figura fondamentale dodecaedrica appa-

(1) Zeit. f. Kr. *35*, 50; *39*, 411.
(2) Zeit. f. Kr. *39*, 360.
(3) Zeit. f. Kr. *40*, 543.
(4) C. M. Viola, *Grundzüge der Kristallographie*. Leipzig, 1904, pag. 109.

riscono le 4 zone MTl , lPp , TPo , Mop meglio ed uniformemente sviluppate; onde si assumeranno quali faccie fondamentali $n(0\bar{2}1)$, $e(021)$, $y(\bar{2}01)$ anzichè h, M, P. Tali faccie appariscono fondamentali anche seguendo il sistema di posizione del sig. Fedorow.

I feldispati ci offrono dunque un bello e ricco esempio di trasformazione delle coordinate.

Il problema della trasformazione si riduce a questo: di assumere come nuove faccie fondamentali:

$$\begin{aligned} h' &\ldots (h'_1\ h'_2\ h'_3) = (0\bar{2}1), \\ h'' &\ldots (h''_1\ h''_2\ h''_3) = (021), \\ h'''_1 &\ldots (h'''_1\ h'''_2\ h'''_3) = (\bar{2}01). \end{aligned}$$

In primo luogo si determinano nel modo solito le tre zone fondamentali:

$$\begin{aligned} r_1 &\ldots |h''\ h'''| \ldots [r'_1\, r''_1\, r'''_1] = [1\bar{1}2], \\ r_2 &\ldots |h'''\ h'\ | \ldots [r'_2\, r''_2\, r'''_2] = [\bar{1}12], \\ r_3 &\ldots |h'\ h''\ | \ldots [r'_3\, r''_3\, r'''_3] = [\bar{2}00] \ (^1). \end{aligned}$$

E per avere gli indici di qualsivoglia faccia x, il cui simbolo nell'orientazione monoclina o triclina è noto $(x_1\, x_2\, x_3)$, applicheremo le relazioni $(3)_a$. Esse ci dànno come indici del nuovo simbolo:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - x_2 + 2\,x_3, \\ x'_2 &= x_1 + x_2 + 2\,x_3, \\ x'_3 &= -2\,x_1. \end{aligned}$$

È evidente che la faccia unitaria (111) nel monoclino o triclino, non rimarrà faccia unitaria dopo eseguita la trasformazione con le ultime equazioni. Infatti facendo in queste equazioni $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, si avrà, come nuovi indici a'_1, a'_2, a'_3 di questa vecchia faccia unitaria, i seguenti:

$$\begin{aligned} a'_1 &= 1 - 1 + 2 = 2, \\ a'_2 &= 1 + 1 + 2 = 4, \\ a'_3 &= -2. \end{aligned}$$

Dunque la vecchia faccia unitaria nel monoclino o triclino avrà nella posizione pseudododecaedrica il nuovo simbolo $(12\bar{1})$.

All'opposto, facendo nelle precedenti equazioni $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 1$, si otterranno gli indici vecchi z_1, z_2, z_3 di quella faccia, la quale nella orientazione pseudododecaedrica diviene faccia unitaria, ammesse le equazioni di trasformazione sopra indicate; questi vecchi indici saranno dunque:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 + 0 - 2 = \bar{2}, \\ z_2 &= -2 + 2 + 0 = 0, \\ z_3 &= +1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

(1) $[\bar{2}00]$ in luogo del simbolo comune $[100]$ per soddisfare alla condizione $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$; vedi equazioni (2).

Ossia la faccia che nella posizione monoclina o triclina ha per simbolo $(\bar{2}03)$ diviene nella posizione dodecaedrica la faccia unitaria (111).

Ecco ora qui appresso i simboli delle principali coppie di faccie dei feldispati prima e dopo la voluta trasformazione:

Faccie	Simboli nella orientazione monoclina e triclina.	Simboli nella orientazione dodecaedrica.	
M	(010)	$(\bar{1}10)$	$\}110\{$
l	(110)	$(01\bar{1})$	
T	$(1\bar{1}0)$	$(10\bar{1})$	
P	(001)	(110)	
o	$(\bar{1}11)$	(011)	
p	$(\bar{1}\bar{1}1)$	(101)	
n	$(0\bar{2}1)$	(100)	$\}100\{$
e	(021)	(010)	
y	$(\bar{2}01)$	(001)	
h	(100)	$(11\bar{2})$	$\}1\bar{2}1\{$
f	(130)	$(1\bar{2}1)$	
z	$(1\bar{3}0)$	$(\bar{2}11)$	
q	$(\bar{2}03)$	(111)	$\}111\{$
v	$(\bar{2}\bar{4}1)$	$(1\bar{1}1)$	
	(201)	$(\bar{1}11)$	
w	$(\bar{2}41)$	$(\bar{1}\bar{1}1)$	

ecc. ecc.

Ognun vede che la nuova denominazione, oltre che essere più semplice della vecchia, dà l'impronta della vera figura fondamentale dei feldispati, secondo quanto l'esperienza è venuta fin qui a stabilire.

Se nella eseguita trasformazione si fosse partiti dai simboli $(0\bar{2}1)$, (021), $(\bar{4}02)$, il risultato sarebbe assolutamente identico. Infatti in tale caso si avrebbe per simboli delle zone r_1, r_2, r_3 risp. $[1\bar{1}2]$, $[112]$, $[\bar{1}00]$ in luogo di $[\bar{2}00]$ come precedentemente; e quindi per indici nuovi della faccia x i seguenti:

$$x_1'' = x_1 - x_2 + 2x_3,$$
$$x_2'' = x_1 + x_2 + 2x_3,$$
$$x_3'' = -x_1.$$

Ma allora come faccia unitaria dopo la trasformazione sarà $(\bar{1}01)$. Volendo che, come dianzi, la faccia unitaria sia $(\bar{2}03)$, bisognerà trovare il nuovo sim-

bolo di questa, facendo uso delle ultime equazioni di trasformazione. Si avrà come nuovo simbolo di quest'ultima (221); epperò come indici nuovi della faccia x si prenderanno i rapporti:

$$\frac{x_1''}{2} : \frac{x_2''}{2} : \frac{x_3''}{1}$$

vale a dire:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 : x_1 + x_2 + 2x_3 : -2x_1$$

che sono identici a quelli trovati sopra, cioè $x_1' : x_2' : x_3'$.

Vedremo in un'altra Nota come le regole per la trasformazione degli indici di una faccia sono suscettibili in pratica di una magiore semplicità.

Antropologia. — *Cranî preistorici del Foro Romano.* Nota del Socio A. Mosso.

Questo lavoro sarà pubblicato nelle *Notizie degli Scavi.*

Matematica — *Sur le développement en fraction continue de la fonction* Q *de M. Prym.* Nota di Niels Nielsen, presentata dal Socio U. Dini.

Il est très connu que Laplace [1] a trouvé *formellement*, en transformant une série divergente, une fraction continue que représente la fonction transcendante entière

$$\text{(1)} \qquad L(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt$$

qui a été étudiée par Kramp [2] aussi, tandis que Soldner [3] a appliqué la même méthode illégitime pour développer en fraction continue le logarithme-intégral, savoir la fonction

$$\text{(2)} \qquad li(e^{-x}) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

Plus tard Jacobi [4] a démontré rigoureusement la formule de Laplace, tandis que celle de Soldner n'a été démontrée pas encore, à ce que je crois.

(1) *Mécanique céleste*, t. IV, livre 10.
(2) *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres.* Strasbourg, 1799.
(3) *Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante.* Munich, 1809.
(4) Journal de Crelle, t. 12, pp. 316-347, 1834.

Or, il est bien remarquable, ce me semble, qu'il est très facile de rendre rigoureuse la méthode illégitime appliquée par Laplace et Soldner et cela d'un point de vue général qui nous permet de déduire immédiatement des résultats analogues trouvés en détournant des difficultés considérables par Legendre [1], Laguerre [2] et M. Tannery [3].

A cet effet, nous avons à démontrer un théorème, nouveau je crois, concernant la méthode que Gauss [4] a appliquée dans ses recherches sur la série hypergéométrique, savoir le théoreme:

Appliquons formellement sur la série hypergéométrique toujours divergente:

$$\lim_{k=\infty} F(\nu, \varrho, k, -kx) \tag{3}$$

la méthode de Gauss, nous aurons une fraction continue qui est certainement convergente pour des valeurs finies réelles de ν et ϱ, pourvu que x soit une quantité positive et finie.

Quant à la démonstration de ce théorème, prenons pour point de départ l'intégrale définie

$$U^{\nu,\varrho}(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\, t^{\nu-1}}{(1+t)^\varrho}\, dt \tag{4}$$

qui a un sens, pourvu que les parties réelles de x et de ν soient positives; le chemin d'intégration coïncide avec l'axe des nombres positifs.

Appliquons ensuite la série de Taylor

$$(1+t)^{-\varrho} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{-\varrho}{s} \cdot t^s + R_n,$$

nous avons ce développement asymptotique [5]

$$U^{\nu,\varrho}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\binom{-\varrho}{s} \cdot \Gamma(\nu+s)}{x^{\nu+s}} + R'_n, \tag{5}$$

ce qui nous conduira précisément à la série divergente (3), abstraction faite d'un simple facteur.

Cela posé, une intégration par parties donnera immédiatement, en vertu de (4), si nous y mettons $\nu+1$ au lieu de ν, cette équation fonctionnelle

$$x \cdot U^{\nu+1,\varrho}(x) = \nu \cdot U^{\nu,\varrho}(x) - \varrho \cdot U^{\nu+1,\varrho+1}(x), \tag{6}$$

(1) *Traité des fonct. ellipt. et des intégrales eulériennes*, t. II, pag. 509, Paris, 1826.

(2) Bull. de la Soc. Math. de France, t. 7, pp. 72-81, 1879. Oeuvres, t. I, pp. 428-437.

(3) Comptes Rendus, t. 94, pp. 1698-1701; t. 95, pag. 75, 1882.

(4) Comment. Gotting., t. 2, pag. 13, 1812. Oeuvres, t. III, pag. 134.

(5) Voir mon Mémoire: *Sur une intégrale définie*, inséré dans les Mathematische Annalen, t. 59, pp. 89-102, 1904.

d'où, après une légère transformation:

$$(7)\qquad \left\{ \frac{U^{\nu+1,\rho}(x)}{U^{\nu,\rho}(x)} = \cfrac{\nu}{x + \cfrac{\varrho}{\cfrac{U^{\nu+1,\rho}(x)}{U^{\nu+1,\rho+1}(x)}}} \right. ;$$

appliquons ensuite l'identité évidente:

$$t^{\nu+1}(1+t)^{-\rho-1} = t^{\nu}(1+t)^{-\rho} - t^{\nu}(1+t)^{-\rho-1},$$

il résulte de même, en vertu de (4)

$$U^{\nu+2,\rho+1}(x) = U^{\nu+1,\rho}(x) - U^{\nu+1,\rho+1}(x),$$

d'où, à l'aide de (7), la fraction continue cherchée

$$(8)\qquad \left\{ \frac{U^{\nu+1,\rho}(x)}{U^{\nu,\rho}(x)} = \cfrac{\nu}{x + \cfrac{\varrho}{1 + \cfrac{U^{\nu+2,\rho+1}(x)}{U^{\nu+1,\rho+1}(x)}}} \right. .$$

dont la loi est évidente.

Supposons maintenant *positive* la variable x et *réels* les paramètres ν et ϱ, les quantités $\nu + n$ et $\varrho + n$ finissent toujours par être *positives*, et c'est la même chose avec le terme complémentaire

$$U^{\nu+n+1,\rho+n}(x) : U^{\nu+n,\rho+n}(x),$$

ce qui nous conduira précisément au théorème que nous venons d'énoncer.

Cela posé, mettons dans (3) $\varrho = 1$, puis introduisons la fonction

$$(9)\qquad Q(x, \nu) = \int_x^\infty e^{-t}\, t^{\nu-1}\, dt,$$

il est évident que cette fonction est une transcendante entière de ν, pourvu que x soit une quantité finie différente de zéro. M. Mellin [1] a indiqué cette autre formule intégrale

$$(10)\qquad \Gamma(\nu)\, e^{x} \cdot Q(x, 1-\nu) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}\, t^{\nu-1}}{1+t}\, dt,$$

où il faut admettre que les parties réelles de x et de ν soient positives, ce qui donnera

$$(11)\qquad U^{\nu,1}(x) = \Gamma(\nu)\, e^{x}\, Q(x, 1-\nu).$$

Appliquons ensuite dans (9) l'intégration par parties, il résulte

$$\nu \cdot Q(x, \nu) = Q(x, \nu+1) - e^{-x} \cdot x^{\nu},$$

[1] Voir mon *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, pag. 211, Leipzig, 1906, chez B-G. Teubner.

d'où, en vertu de (11),

$$\frac{U^{\nu,1}(x)}{U^{\nu-1,1}(x)} = \frac{(\nu-1)\,Q(x\,,1-\nu)}{Q(x\,,2-\nu)} = -1 + \frac{e^{-x}\cdot x^{1-\nu}}{Q(x\,,2-\nu)}\,.$$

Mettons ensuite dans (8) $\varrho = 1$, puis introduisons $1-\nu$ au lieu de ν, il résulte la fraction continue de Legendre

$$(12)\qquad \left\{ Q(x\,,\nu) = \cfrac{e^{-x}\,x^{\nu}}{x + \cfrac{1-\nu}{1 + \cfrac{1}{x + \cfrac{2-\nu}{1 + \cfrac{2}{x + \cfrac{3-\nu}{1 + \cfrac{3}{x + \cdots}}}}}}} \right.$$

qui est certainement convergente, pourvu que ν soit *réel*, tandis que x doit être *positif*.

Cela posé, appliquons ces deux identités évidentes

$$(13)\qquad li(e^{-x}) = -Q(x\,,0)\quad,\quad L(x) = \tfrac{1}{2}\,.\,Q(x^2\,,\tfrac{1}{2}),$$

nous aurons de (12), en y mettant $\nu = 0$, la fraction continue de Soldner

$$(14)\qquad \left\{ -e^{x}\,li(e^{-x}) = \cfrac{\frac{1}{x}}{1 + \cfrac{\frac{1}{x}}{1 + \cfrac{\frac{1}{x}}{1 + \cfrac{\frac{2}{x}}{1 + \cfrac{\frac{2}{x}}{1 + \cfrac{\frac{3}{x}}{1 + \cfrac{\frac{3}{x}}{1 + \cdots}}}}}}} \right.$$

tandis que l'hypothèse $\nu = \frac{1}{2}$ donnera de même la fraction continue de

Laplace

$$(15)\quad \left\{ e^{x^2}\,\mathrm{L}(x) = \cfrac{\frac{1}{2x}}{1+\cfrac{\frac{1}{2x^2}}{1+\cfrac{\frac{2}{2x^2}}{1+\cfrac{\frac{3}{2x^2}}{1+\cfrac{\frac{4}{2x^2}}{1+\cdots}}}}} \right.$$

Étudions ensuite les réduites de la fraction continue de Legendre ou, ce qui revient au même, de celle-ci:

$$\frac{e^{-x}\,x^{\nu-1}}{\mathrm{Q}(x\,,\,\nu)} = 1+\cfrac{\frac{1-\nu}{x}}{1+\cfrac{\frac{1}{x}}{1+\cfrac{\frac{2-\nu}{x}}{1+\cfrac{\frac{2}{x}}{1+\cdots}}}},$$

désignons par

$$\frac{f_0\left(\frac{1}{x}\right)}{g_0\left(\frac{1}{x}\right)}\,,\quad \frac{f_1\left(\frac{1}{x}\right)}{g_1\left(\frac{1}{x}\right)}\,,\quad \frac{f_2\left(\frac{1}{x}\right)}{g_2\left(\frac{1}{x}\right)},\ldots$$

ces réduites, nous aurons

$$f_0\left(\frac{1}{x}\right)=1\quad,\quad f_1\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1-\nu}{x}$$

$$g_0\left(\frac{1}{x}\right)=1\quad,\quad g_1\left(\frac{1}{x}\right)=1\,,$$

et il est évident que les numérateurs et les dénominateurs de nos réduites ultérieures doivent satisfaire à ces équations fonctionnelles

$$(16)\qquad \mathrm{F}_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)=\mathrm{F}_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{n}{x}\cdot\mathrm{F}_{2n-2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(17)\qquad \mathrm{F}_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\mathrm{F}_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{n+1-\nu}{x}\cdot\mathrm{F}_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

où nous avons posé pour abréger $\mathrm{F}_n=f_n$ ou bien $\mathrm{F}_n=g_n$.

Cela posé, la conclusion ordinaire de n à $n+1$ donnera sans peine pour les numérateurs ces expressions générales:

$$(18)\quad f_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)=1+\sum_{s=1}^{s=n}\binom{n}{s}\cdot\frac{(n+1-\nu)(n-\nu)\ldots(n-s+2-\nu)}{x^s}$$

$$(19)\quad f_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=1+\sum_{s=1}^{s=n+1}\binom{n+1}{s}\cdot\frac{(n+1-\nu)(n-\nu)\ldots(n-s+2-\nu)}{x^s},$$

tandis qu'il ne semble pas possible de donner sous simple forme l'expression générale du dénominateur g_n. Le cas particulier de (18) qui correspond à $\nu=0$ a été connu par Laguerre.

Éliminons maintenant de (16) la fonction F_{2n-1}, ce qui s'effectuera en appliquant (17), puis traitons de la même manière la formule nouvelle ainsi obtenue, il résulte cette autre équation fonctionnelle

$$(20)\quad F_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{2n-\nu}{x}\right)F_{2n-2}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{(n-1)(n-\nu)}{x^2}\cdot F_{2n-4}\left(\frac{1}{x}\right),$$

tandis que (17) donnera par le même procédé cette formule analogue

$$(21)\quad F_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{2n+1-\nu}{x}\right)F_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{n(n-\nu)}{x^2}\cdot F_{2n-3}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cela posé, mettons pour abréger

$$(22)\qquad x^n\cdot g_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\varphi_{n+1}(x)\quad,\quad x^{n+1}f_{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)=\psi_{n+1}(x),$$

nous aurons

$$(23)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)}=\lim_{n=\infty}\frac{\frac{1}{x}\,g_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{f_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}=e^x\,x^{-\nu}\cdot Q(x,\nu);$$

combinons ensuite les deux formules (21) et (22), il résulte ces deux équations fonctionelles:

$$\varphi_{n+1}(x)=(x+2n+1-\nu)\,\varphi_n(x)-n(n-\nu)\,\varphi_{n-1}(x)$$
$$\psi_{n+1}(x)=(x+2n+1-\nu)\,\psi_n(x)-n(n-\nu)\,\psi_{n-1}(x),$$

d'où sans peine, en vertu de (23), cette fraction continue

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} Q(x,\nu)=\dfrac{e^{-x}x^\nu}{x+1-\nu-\dfrac{1\cdot(1-\nu)}{x+3-\nu-\dfrac{2\cdot(2-\nu)}{x+5-\nu-\dfrac{3\cdot(3-\nu)}{x+7-\nu-\cdots}}}} \end{array}\right.$$

qui est certainement convergente pour x *positif* et ν *réel.*

Mettons dans (24) $x = 1$, il résulte la fraction continue de M. J. Tannery, tandis que l'hypothèse $\nu = 0$ nous conduira à celle que Laguerre a déduite pour le logarithme-intégral. Remarquons encore que l'hypothesè $\nu = \frac{1}{2}$ donnera immédiatement la fraction continue pour la fonction $L(x)$ mentionnée par Laguerre.

Posons ensuite

$$(25) \qquad x^n g_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi'_n(x) \quad , \quad x^{n+1} f_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) = \psi'_n(x),$$

il résulte cette valeur limite

$$(26) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\varphi'_n(x)}{\psi'_n(x)} = e^x x^{-\nu} \cdot Q(x, \nu),$$

tandis que la formule (20) donnera ces deux autres

$$\varphi'_n(x) = (x + 2n - \nu)\, \varphi'_{n-1}(x) - (n-1)(n-\nu)\, \varphi'_{n-2}(x)$$
$$\psi'_n(x) = (x + 2n - \nu)\, \psi'_{n-1}(x) - (n-1)(n-\nu)\, \psi'_{n-2}(x),$$

d'où cette autre fraction continue

$$(27) \quad \left\{ Q(x, \nu) = \cfrac{e^{-x} \cdot x^\nu}{x + \cfrac{(1-\nu)x}{x + 1 - \cfrac{1 \cdot (2-\nu)x}{x + 2 - \nu - \cfrac{2 \cdot (3-\nu)}{x + 4 - \nu - \cfrac{3 \cdot (4-\nu)}{x + 6 - \nu - \cdots}}}}} \right.$$

qui semble être nouvelle.

Il est évident que la fraction continue (27), convergente pour ν *réel* et x *positif*, nous permet de déduire immédiatement des fractions continues pour les deux fonctions $L(x)$ et $li(e^{-x})$, analogues à celle de Laguerre.

Meccanica. — *Sulla deformazione di un ellissoide elastico.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Corrispondente C. Somigliana.

In questa Nota espongo un procedimento assai semplice per determinare, nel campo racchiuso da un ellissoide, tre funzioni che verificano un certo sistema di tre equazioni indefinite di secondo ordine, e di tre equazioni ai limiti di primo ordine.

Come casi particolari si ottiene l'integrazione delle equazioni dell'equilibrio di un ellissoide elastico, soggetto a tensioni date, agenti sul contorno, nel caso in cui le componenti delle tensioni siano il prodotto di polinomi di un grado qualunque, per la distanza del centro dell'ellissoide dal piano

tangente; ovvero l'integrazione delle equazioni di un ellissoide elastico, soggetto a riscaldamento, supponendo che il riscaldamento sia rappresentato da un polinomio.

1. Consideriamo il campo S racchiuso dall'ellissoide σ di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \tag{1}$$

e denotiamo con P la distanza del centro di σ dal piano tangente in un punto qualunque (x, y, z) di σ, con n la normale a σ diretta all'interno di S.

Indichiamo poi, per brevità, genericamente con Δ_{rs} un'operazione differenziale lineare, omogenea di 2° ordine, della forma:

$$\Delta_{rs}=a_{rs}\frac{d^2}{dx^2}+b_{rs}\frac{d^2}{dy^2}+c_{rs}\frac{d^2}{dz^2}+h_{rs}\frac{d^2}{dx\,dy}+k_{rs}\frac{d^2}{dx\,dz}+l_{rs}\frac{d^2}{dy\,dz},$$

ove $a_{rs}, b_{rs}\ldots l_{rs}$ sono coefficienti costanti conosciuti, e con D_{rs} un'espressione lineare, omogenea di 1° ordine della forma:

$$D_{rs}=\alpha_{rs}\frac{d\xi}{dx}+\alpha'_{rs}\frac{d\xi}{dy}+\alpha''_{rs}\frac{d\xi}{dz}+\beta_{rs}\frac{d\eta}{dx}+\beta'_{rs}\frac{d\eta}{dy}+\beta''_{rs}\frac{d\eta}{dz}+$$
$$+\gamma_{rs}\frac{d\zeta}{dx}+\gamma'_{rs}\frac{d\zeta}{dy}+\gamma''_{rs}\frac{d\zeta}{dz},$$

in cui $\alpha_{rs}, \alpha'_{rs}, \ldots, \gamma''_{rs}$ sono coefficienti costanti dati e ξ, η, ζ funzioni incognite.

Ciò posto, cerchiamo tre funzioni ξ, η, ζ, regolari in S, che verifichino in S le equazioni indefinite:

$$\begin{cases}\Delta_{11}\xi+\Delta_{12}\eta+\Delta_{13}\zeta=0\\ \Delta_{21}\xi+\Delta_{22}\eta+\Delta_{23}\zeta=0\\ \Delta_{31}\xi+\Delta_{32}\eta+\Delta_{33}\zeta=0,\end{cases} \tag{2}$$

e nei punti di σ le equazioni ai limiti:

$$\begin{cases}D_{11}\dfrac{dx}{dn}+D_{12}\dfrac{dy}{dn}+D_{13}\dfrac{dz}{dn}=F\cdot P\\ D_{21}\dfrac{dx}{dn}+D_{22}\dfrac{dy}{dn}+D_{23}\dfrac{dz}{dn}=G\cdot P\\ D_{31}\dfrac{dx}{dn}+D_{32}\dfrac{dy}{dn}+D_{33}\dfrac{dz}{dn}=H\cdot P,\end{cases} \tag{3}$$

ove F, G, H sono funzioni regolari date.

Supporremo ancora che le costanti $a_{rs}, \ldots, l_{rs}, \ldots, \alpha_{rs}, \ldots, \gamma''_{rs}$ siano tali che i sistemi (2), (3) non ammettano più di una soluzione, cioè, in altri termini, che se le funzioni F, G, H sono nulle in ogni punto di σ, le funzioni ξ, η, ζ siano identicamente nulle in ogni punto di S.

E noto intanto che i coseni degli angoli che la normale interna all'ellissoide fa cogli assi coordinati sono dati da:

$$(4) \qquad \frac{dx}{dn} = -\frac{x}{a^2}\,\mathrm{P}\ , \quad \frac{dy}{dn} = -\frac{y}{b^2}\,\mathrm{P}\ , \quad \frac{dz}{dn} = -\frac{z}{c^2}\,\mathrm{P},$$

perciò dalle (3) si ha:

$$\begin{cases} \mathrm{D}_{11}\dfrac{x}{a^2} + \mathrm{D}_{12}\dfrac{y}{b^2} + \mathrm{D}_{13}\dfrac{z}{c^2} = -\mathrm{F} \\ \mathrm{D}_{21}\dfrac{x}{a^2} + \mathrm{D}_{22}\dfrac{y}{b^2} + \mathrm{D}_{23}\dfrac{z}{c^2} = -\mathrm{G} \\ \mathrm{D}_{31}\dfrac{x}{a^2} + \mathrm{D}_{32}\dfrac{y}{b^2} + \mathrm{D}_{33}\dfrac{z}{c^2} = -\mathrm{H}\,. \end{cases}$$

Queste equazioni sussistono nei punti di σ, per conseguenza, nel campo S, si può porre:

$$(5) \quad \begin{cases} \mathrm{D}_{11}\dfrac{x}{a^2} + \mathrm{D}_{12}\dfrac{y}{b^2} + \mathrm{D}_{13}\dfrac{z}{c^2} = -\mathrm{F} + \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1\right)\cdot\lambda(x,y,z) \\ \mathrm{D}_{21}\dfrac{x}{a^2} + \mathrm{D}_{22}\dfrac{y}{b^2} + \mathrm{D}_{23}\dfrac{z}{c^2} = -\mathrm{G} + \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1\right)\cdot\mu(x,y,z) \\ \mathrm{D}_{31}\dfrac{x}{a^2} + \mathrm{D}_{32}\dfrac{y}{b^2} + \mathrm{D}_{33}\dfrac{z}{c^2} = -\mathrm{H} + \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1\right)\cdot\nu(x,y,z), \end{cases}$$

essendo λ, μ, ν tre funzioni regolari nei punti di S.

2. Supponendo ora che F, G, H siano polinomi di grado m, cioè siano esprimibili mediante le formole:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathrm{F} = \sum\limits_0^m{}_{r,s,t}\, \mathrm{A}_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \\ \mathrm{G} = \sum\limits_0^m{}_{r,s,t}\, \mathrm{B}_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \qquad (r+s+t \leq m) \\ \mathrm{H} = \sum\limits_0^m{}_{r,s,t}\, \mathrm{C}_{r,s,t}\, x^r y^s z^t\,, \end{cases}$$

le A, B, C essendo coefficienti costanti dati, è facile dimostrare che anche le funzioni ξ, η, ζ saranno polinomi di grado m.

Infatti esprimiamo ξ, η, ζ colle formole:

$$(7) \quad \begin{cases} \xi = \sum\limits_0^m{}_{r,s,t}\, a_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \\ \eta = \sum\limits_0^m{}_{r,s,t}\, b_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \qquad (r+s+t \leq m) \\ \zeta = \sum\limits_0^m{}_{r,s,t}\, c_{r,s,t}\, x^r y^s z_t\,, \end{cases}$$

ove a, b, c sono coefficienti costanti da determinarsi, ed assumiamo λ, μ, ν, che saranno in conseguenza polinomi di grado $m-2$, sotto la forma:

$$\begin{cases} \lambda = \sum_{0}^{m-2}{}_{r,s,t}\, \alpha_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \\ \mu = \sum_{0}^{m-2}{}_{r,s,t}\, \beta_{r,s,t}\, x^r y^s z^t \qquad (r+s+t \leq m-2) \\ \nu = \sum_{0}^{m-2}{}_{r,s,t}\, \gamma_{r,s,t}\, x^r y^s z^t, \end{cases}$$

le α, β, γ indicando altri coefficienti da determinarsi.

Sostituendo i valori precedenti nelle (2), (5) si hanno tre equazioni di grado m, e tre equazioni di grado $m-2$ nelle variabili x, y, z; perciò identificando nei due membri di ognuna di esse i coefficienti dei termini simili si hanno complessivamente:

$$\mathrm{N} = 3\binom{m+3}{3} + 3\binom{m+1}{3}$$

equazioni lineari fra i coefficienti $a_{r,s,t}, \ldots, \alpha_{r,s,t}, \ldots, \gamma_{r,s,t}$, che in tutto sono evidentemente pure in numero di N.

Abbiamo dunque un sistema $\sum$ di N equazioni lineari con N incognite: queste equazioni saranno poi compatibili, cioè il determinante dei loro coefficienti sarà certamente diverso da zero; poichè, nel caso contrario, attribuendo alle costanti A, B, C il valore zero (ossia, a tenore delle (6), ritenendo nulle le funzioni F, G, H) le equazioni di $\sum$ diventerebbero omogenee, e allora sarebbero soddisfatte da valori non tutti nulli delle incognite, e perciò esisterebbero tre funzioni ξ, η, ζ, non nulle in S, e che verificherebbero le (2), (3) nel caso in cui $\mathrm{F} = \mathrm{G} = \mathrm{H} = 0$: e ciò contraddice all'ipotesi fatta nel § 1 circa i sistemi (2), (3).

Dal sistema $\sum$ potremo dunque ricavare le incognite $a_{r,s,t}, \ldots, \gamma_{r,s,t}$, e in tal modo risulteranno note, mediante le (7), le funzioni ξ, η, ζ che risolvono la questione proposta.

È chiaro che il precedente metodo d'integrazione può applicarsi al caso di quante si vogliano variabili, e anche nell'ipotesi che l'equazione dell'ellissoide, anzichè sotto la forma (1), sia data sotto la forma più generale.

3. Supponiamo ora che lo spazio S sia occupato da un corpo elastico isotropo, sul contorno del quale agiscano delle tensioni, le cui componenti siano date da:

$$\mathrm{F} \cdot \mathrm{P} \quad , \quad \mathrm{G} \cdot \mathrm{P} \quad , \quad \mathrm{H} \cdot \mathrm{P},$$

ove F, G, H sono polinomi noti di grado m.

Indicando con ξ, η, ζ le componenti dello spostamento di un punto qualunque di S, dovranno essere soddisfatte in S le equazioni indefinite:

$$(8)\qquad \begin{cases} \Delta_2 \xi + \dfrac{1}{1-2\varkappa}\dfrac{d\theta}{dx} = 0 \\ \Delta_2 \eta + \dfrac{1}{1-2\varkappa}\dfrac{d\theta}{dy} = 0 \\ \Delta_2 \zeta + \dfrac{1}{1-2\varkappa}\dfrac{d\theta}{dz} = 0, \end{cases} \qquad \left(\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \\ \theta &= \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} \end{aligned} \right)$$

e sopra σ le equazioni ai limiti:

$$(9)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{2\varkappa}{1-2\varkappa}\theta + 2\dfrac{d\xi}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{d\eta}{dx} + \dfrac{d\xi}{dy}\right)\dfrac{dy}{dn} + \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{d\xi}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dx}\right)\dfrac{dz}{dn} = -\dfrac{2(1+\varkappa)}{E}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{P} \\ \left(\dfrac{d\eta}{dx} + \dfrac{d\xi}{dy}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{2\varkappa}{1-2\varkappa}\theta + 2\dfrac{d\eta}{dy}\right)\dfrac{dy}{dn} + \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{d\zeta}{dy} + \dfrac{d\eta}{dz}\right)\dfrac{dz}{dn} = -\dfrac{2(1+\varkappa)}{E}\,\mathrm{G}\cdot\mathrm{P} \\ \left(\dfrac{d\xi}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{d\zeta}{dy} + \dfrac{d\eta}{dz}\right)\dfrac{dy}{dn} + \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{2\varkappa}{1-2\varkappa}\theta + 2\dfrac{d\zeta}{dz}\right)\dfrac{dz}{dn} = -\dfrac{2(1+\varkappa)}{E}\,\mathrm{H}\cdot\mathrm{P}, \end{cases}$$

ove $\varkappa$, E sono costanti.

Dalle (8), (9) si deduce facilmente, com'è noto, che debbono essere soddisfatte le equazioni, che esprimono del resto condizioni d'equilibrio:

$$(10)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\sigma \mathrm{FP}\,d\sigma = \int_\sigma \mathrm{GP}\,d\sigma = \int_\sigma \mathrm{HP}\,d\sigma = 0, \\ \displaystyle\int_\sigma (y\mathrm{F} - x\mathrm{G})\,\mathrm{P}d\sigma = \int_\sigma (z\mathrm{F} - x\mathrm{H})\,\mathrm{P}d\sigma = \int_\sigma (z\mathrm{G} - y\mathrm{H})\,\mathrm{P}d\sigma = 0\,. \end{cases}$$

Poichè le (8), (9) sono un caso particolare delle (2), (3) ed è inoltre soddisfatta la condizione della unicità della soluzione, si conclude che per determinare le funzioni ξ, η, ζ basterà applicare il procedimento esposto nei paragrafi precedenti [1], e così si avrà la deformazione dell'ellissoide considerato [2].

[1] Le funzioni ξ, η, ζ risultano notoriamente determinate a meno di *sei* costanti, le quali corrispondono ad una traslazione e ad una rotazione del corpo, e poichè pure *sei* sono le equazioni (10), si conclude che nel sistema di equazioni lineari, corrispondente al sistema Σ, potremo omettere *sei* equazioni.

[2] Dal risultato ora stabilito appare l'utilità — mi dice il prof. Somigliana — di indagare se, e sotto quali condizioni, sia possibile rappresentare delle tensioni, date arbi-

La deformazione di un ellissoide nel caso in cui sul contorno si conoscono gli spostamenti, che siano espressi da polinomi, trovasi determinata in una mia Nota precedente [1]; nel caso di un ellissoide di rotazione, e per spostamenti qualunque, la deformazione è stata determinata dal professore Tedone [2].

4. Supponiamo ora che il solido elastico isotropo S venga deformato per effetto del calore, e che inizialmente esso sia soggetto in ogni punto alla stessa temperatura.

Considerando allora un punto qualunque (x, y, z) di S e chiamando u, v, w le componenti dello spostamento di esso e Φ il riscaldamento a cui, in quel punto, si assoggetta il solido, dovranno essere soddisfatte, nei punti di S, le equazioni indefinite [3]:

$$(11)\qquad \begin{cases} \Delta_2 u + (1+2\varkappa)\dfrac{dp}{dx} = \varkappa'\dfrac{d\Phi}{dx} \\ \Delta_2 v + (1+2\varkappa)\dfrac{dp}{dy} = \varkappa'\dfrac{d\Phi}{dy} \\ \Delta_2 w + (1+2\varkappa)\dfrac{dp}{dz} = \varkappa'\dfrac{d\Phi}{dz}, \end{cases} \qquad \left(p = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right),$$

ove $\varkappa, \varkappa'$ sono costanti che dipendono dalla natura del solido.

Sulla superficie σ devono poi essere verificate le equazioni ai limiti:

$$(12)\qquad \begin{cases} \left(p' + 2\dfrac{du}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(\dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx}\right)\dfrac{dz}{dn} = 0 \\ \left(\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{du}{dy}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(p' + 2\dfrac{dv}{dy}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\right)\dfrac{dz}{dn} = 0 \\ \left(\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{dw}{dy} + \dfrac{dv}{dz}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(p' + 2\dfrac{dw}{dz}\right)\dfrac{dz}{dn} = 0 \end{cases}$$

ove:

$$p' = 2\varkappa p - \varkappa'\Phi.$$

---

trariamente sul contorno dell'ellissoide, nella forma di somme di polinomi moltiplicati per il fattore P.

[1] Boggio, *Sopra alcune funzioni armoniche o biarmoniche*, ecc. (Atti del R. Istituto Veneto, t. LX, parte 2ª, a. 1901).

[2] Tedone, *Sul problema dell'equilibrio elastico di un ellissoide di rotazione* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIV, 1° sem. 1905).

[3] Cfr. Borchardt, *Gesammelte Werke*, pag. 250 (Berlin, a. 1888), ovvero: Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della Elasticità*, cap. XV (Torino, a. 1894).

Conviene ridurre le (11) a forma omogenea. Poniamo perciò:

$$(13)\qquad \begin{cases} u = \xi + \dfrac{d\mathrm{F}}{dx} \\ v = \eta + \dfrac{d\mathrm{F}}{dy} \\ w = \zeta + \dfrac{d\mathrm{F}}{dz}\,, \end{cases}$$

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\,,$$

ove ξ, η, ζ, F sono funzioni da determinarsi; le (11) diventano allora:

$$(11')\qquad \begin{cases} \Delta_2 \xi + (1+2\varkappa)\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[\varkappa'\Phi - 2(1+\varkappa)\Delta_2 \mathrm{F}\right] \\ \Delta_2 \eta + (1+2\varkappa)\dfrac{d\theta}{dy} = \dfrac{d}{dy}\left[\varkappa'\Phi - 2(1+\varkappa)\Delta_2 \mathrm{F}\right] \\ \Delta_2 \zeta + (1+2\varkappa)\dfrac{d\theta}{dz} = \dfrac{d}{dz}\left[\varkappa'\Phi - 2(1+\varkappa)\Delta_2 \mathrm{F}\right], \end{cases}$$

e se poi si determina la F in modo che sia verificata l'equazione:

$$(14)\qquad \Delta_2 \mathrm{F} = \frac{\varkappa'}{2(1+\varkappa)}\Phi$$

e sia regolare in S, le (11′) si ridurranno alla forma omogenea:

$$(15)\qquad \begin{cases} \Delta_2 \xi + (1+2\varkappa)\dfrac{d\theta}{dx} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Eseguendo la sostituzione (13) le (12) diventano:

$$\begin{cases} \left(2\varkappa\theta + 2\dfrac{d\xi}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{d\xi}{dy} + \dfrac{d\eta}{dx}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(\dfrac{d\xi}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dx}\right)\dfrac{dz}{dn} = \\ \qquad = (\varkappa'\Phi - 2\varkappa\Delta_2 \mathrm{F})\dfrac{dx}{dn} - 2\left(\dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx^2}\dfrac{dx}{dn} + \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}\dfrac{dy}{dn} + \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dz}\dfrac{dz}{dn}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

od ancora, ricordando la (14) e le (4):

$$(16)\qquad \begin{cases} \left(2\varkappa\theta + 2\dfrac{d\xi}{dx}\right)\dfrac{dx}{dn} + \left(\dfrac{d\xi}{dy} + \dfrac{d\eta}{dx}\right)\dfrac{dy}{dn} + \left(\dfrac{d\xi}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dx}\right)\dfrac{dz}{dn} = \\ \qquad = \left[\left(2\dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx^2} - \dfrac{\varkappa'}{1+\varkappa}\Phi\right)\dfrac{x}{a^2} + 2\dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dy}\dfrac{y}{b^2} + 2\dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx\,dz}\dfrac{z}{c^2}\right]\mathrm{P} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Supponendo ora che il riscaldamento Φ sia un polinomio dato di grado m, potremo determinare un polinomio F, di grado $m+2$, che verifichi la (14) [1], e allora nelle (16) le espressioni entro le parentesi quadre risultano polinomi di grado $m+1$, perciò la ricerca delle funzioni ξ, η, ζ, che saranno pure polinomi di grado $m+1$, si può fare col procedimento adoperato per i sistemi (8), (9).

5. Come è già stato detto, le considerazioni dei §§ 1, 2 valgono per un numero qualunque di variabili: in particolare, per 2 variabili, permettono di determinare la deformazione di una piastra elastica, isotropa, piana, infinitamente sottile, non soggetta a forze di massa, e il cui contorno sia sollecitato da tensioni date, agenti nel piano della piastra, supponendo che le componenti di dette tensioni siano eguali al prodotto di un polinomio, di un grado qualunque m, per la distanza del centro dell'ellisse dalla tangente nel punto considerato.

Questa questione può però esser trattata, togliendo anche la restrizione ora posta circa le componenti della tensione, con un altro procedimento: infatti essa equivale [2] a quella di costruire la funzione biarmonica U nell'area considerata, conoscendo sul suo contorno i valori della U e della sua derivata normale. E poichè la determinazione della funzione U, nel caso dell'ellisse, si sa fare [3], si conclude che si saprà anche determinare la deformazione della piastra ellittica.

Fisica. — *Sulla radioattività dei fanghi termali depositati dalle acque degli Stabilimenti dei Bagni di Lucca (Toscana)* [4]. Nota del dott. G. Magri, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

In questa Comunicazione riporto i risultati ottenuti dallo studio della radioattività dei fanghi e delle acque termali dei Bagni di Lucca. Lo studio fu già cominciato sul luogo, ove mi recai per incarico del prof. Ubaldo Antony. Al prof. Antony vadano quindi i miei ringraziamenti; così pure vadano al cav. dott. Adriano Bastiani per aver messo a mia disposizione il locale ed il materiale di studio. Degli stabilimenti da me visitati ricordo:

(1) Di questi polinomi ne esistono infiniti; si può ad esempio assumere quello che si annulla su σ e che si può ottenere facilmente come è mostrato nella mia Nota dell'Istituto Veneto già citata.

(2) Boggio, *Sulla deformazione delle piastre elastiche cilindriche di grossezza qualunque* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIII, 2° sem. (1904); Lauricella, *Sulle equazioni della deformazione delle piastre elastiche cilindriche* (Id., vol, XIV, 1° sem. 1905).

(3) Boggio, *Integrazione dell'equazione* $\Delta_2 \Delta_2 = 0$ *in un'area ellittica* (Atti del R. Istituto Veneto, t. LX, parte 2ª, a. 1901).

(4) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica della R. Università di Pisa.

lo stabilimento dei « Bagni caldi », delle « Docce basse », « Bernabò » e della « Villa ».

Le acque che alimentano questi stabilimenti sgorgano da numerose sorgenti e sono in parte termali; queste ultime, che raggiungono alte temperature (fino a 54° 1), costituiscono la ricchezza degli stabilimenti. Esse contengono disciolti sali diversi [1] e depositano sul loro percorso ed in vasti serbatoi, appositamente costruiti, dei fiocchi leggieri, varianti dal color marrone al rosso e al giallo, i quali, raccogliendosi al fondo, costituiscono un « fango » molto apprezzato come uso terapeutico. Dalle scaturigini delle sorgenti termali dei vari stabilimenti non si sviluppano affatto dei gas, talchè le mie ricerche si dovettero limitare allo studio della radioattività dell'aria nelle vicinanze dello stabilimento principale (Bagni caldi), delle acque di questo stesso stabilimento e dei vari depositi ferruginosi delle sorgenti surricordate. Di questi depositi si occuparono già: incidentalmente il Moscheni in un interessante *Trattato dei Bagni di Lucca* (1792) e più tardi Davy, il quale ne fece il primo studio con una breve Comunicazione alla R. Accademia di Scienze di Napoli. Or non è molto il prof. Antony esaminando tali fanghi, potè riconoscere del manganese in quello del Doccione. Ho rivolto specialmente la mia attenzione a questi depositi che, come si vedrà più avanti, presentano un' attività molto notevole ed interessante.

Per lo studio questi fanghi venivano stacciati ancora molli per uno staccio a maglie non troppo strette e ciò non tanto per liberarli subito dai più grossi residui calcarei che si staccano dalla roccia su cui scorre l'acqua, quanto anche per raccoglierli come là si usa. Così stacciati e mantenuti sotto la propria acqua, i fanghi rimangono stabili e quando si vogliono esaminare non resta altro che seccarli prima a b. m. poi in stufa a secco fra 80° e 90°, stacciandoli poi nuovamente per uno staccio fine e prendendo la polvere. Ciò che rimane sullo staccio è ancora un po' attivo. Si capisce come la composizione di questi fanghi sia varia essendo essi mescolanze di idrati ossidi di ferro e di silice in rapporti abbastanza costanti, ma ancora in modo vario, di tutto ciò che può eventualmente trascinare l'acqua con sè. Sicchè la presa del campione è sempre incerta, ed è ben difficile poterne prendere due che si corrispondano perfettamente. Io ho distinto i fanghi in *aderenti*, quelli cioè che si depositano là ove scorre l'acqua e che richiedono un certo sforzo per essere staccati; ed in depositi soffici o *non aderenti*, quelli che si depositano al fondo ove l'acqua ristagna. Sembra che i depositi aderenti siano quelli che più degli altri si corrispondono campione a campione, a meno che non venga fatto, nel distaccarli, di portar via dei pezzi di roccia, come più volte mi è accaduto. Mi preme far notare subito che questi depositi aderenti

[1] *Relazione dell'analisi chimica dell'acqua del Doccione dei Bagni caldi.* U. Antony, 1904, Lucca, cart. e tipo-lit. Amedei.

sono i più attivi, sia perchè più vecchi, ma può darsi anche perchè meno inquinati da sostanze inerti.

Metodo di misura.

Ho studiato l'attività di tali fanghi misurando coi soliti sistemi la caduta in Volta del potenziale di carica di un elettroscopio. L'apparecchio che ho costruito è rappresentato sotto due forme nelle figure 1 e 2 (1). In sostanza

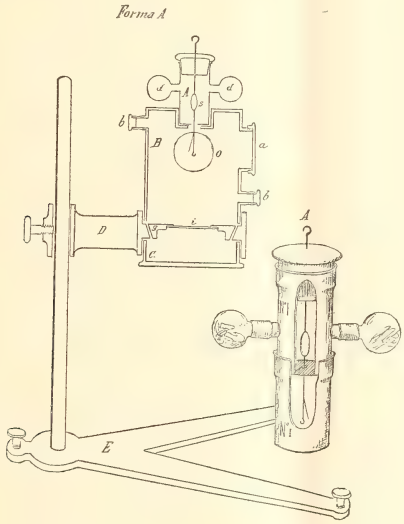


Fig. 1.

esso è un solo apparecchio cui si possono dare due disposizioni, sia che si voglia usare l'elettroscopio solo, sia che si voglia ad esso adattare un dispersore. Nella fig. 1 in basso è rappresentato l'elettroscopio costruito sul modello di quelli del Righi, cui ho dato la disposizione là raffigurata. L' isolante dell'elettroscopio è racchiuso in un piccolo ambiente, il quale non ha quasi scambio di gas coll'esterno ed è tenuto costantemente asciutto per mezzo di due ampolline di vetro laterali contenenti del sodio.

(1) Fu costruito dal meccanico dell'Istituto di Fisica di questa Università, Orfeo Di Nasso.

L'asticella cui è attaccata la foglia d'oro passa al di sotto del fondo del cilindro per un piccolo foro centrale; e siccome non è facile poter attaccare tutto ad un sistema rigido, data la difficoltà di costruire bene imperniato il filo che tiene lo zolfo, lo zolfo e l'asticella dell'elettroscopio, così il tappo superiore del cilindro è di sughero, e quando i vari pezzi si facciano con cura si può comodamente e facilmente centrare nel foro, l'asticella dell'elettroscopio. Nella fig. 1 è rappresentato l'astuccio che si applica per salvaguardare

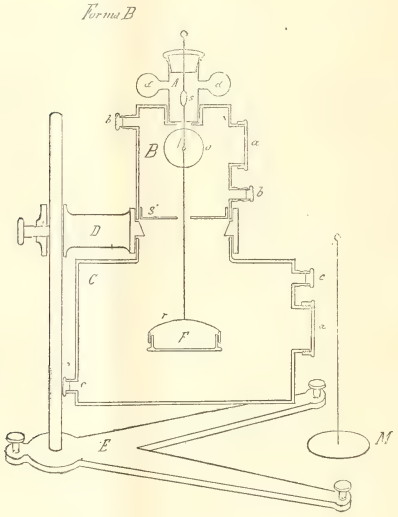


Fig. 2.

la foglia d'oro e rendere l'elettroscopio trasportabile. Il resto dell'apparecchio si comprende facilmente dalla sezione: la parte *A* che costituisce l'elettroscopio va a sfregamento e a tenuta al di sopra di una campana di ottone della capacità di circa cm³ 200. Questa campana porta due aperture opposte *o* che sono ricoperte da lastre di vetro e che servono per leggere, mediante un cannocchiale munito di micrometro oculare, gli spostamenti della fogliolina. L'apertura chiusa con un tappo a vite *a* serve per caricare l'elettroscopio, i due cannelli *b*, *b* per immettere dei gas nella campana od attaccarvi delle ampolline con sodio. La campana *B* per mezzo di due attacchi

che penetrano in due gole a baionetta si può fissare su di un anello *D* sorretto da un piede *E*. Una riparella di cuoio serve a rendere la chiusura perfetta. Al di sotto dell'anello penetra un coperchio di scatola *C*, pur esso attaccato nel modo suddetto e che serve per la sostanza in esame.

L'anello *D* porta inoltre un foro centrale tagliato ad imbuto, cui va a sfregamento un diaframma di ottone *g* che nel mezzo porta una sottile lamina circolare di alluminio in foglia *i* sorretta da due pezzi di rete a larghe maglie. Così l'ambiente in cui si trova l'elettroscopio resta perfettamente chiuso, separato dall'esterno, separato anche dalla camera ove si trova la sostanza radioattiva.

Si può anche usare l'apparecchio in un'altra maniera, qual'è quella rappresentata nella forma *B* della fig. 2. In questo caso al posto del coperchio *C* della fig. 1 si sostituisce la scatola cilindrica d'ottone *C* della fig. 2 imperniata nell'anello al solito modo. È tolto il diaframma di alluminio *i* descritto precedentemente, ed a questo ne è sostituito un altro *g'* che va a sfregamento nella campana *B* e che porta un foro di mm. 5 di diametro.

All'elettroscopio si unisce un dispersore formato da una scatola *F*, costituita da un piattello unito coi soliti attacchi ad un anello sormontato da una rete metallica a maglie abbastanza strette *r*. A questa rete è saldato un filo di ottone che sorregge tutta la scatola e che nella parte superiore è ricurvo e si attacca per il piccolo gancio all'asta dell'elettroscopio. La cassa grande *C* è munita di due tubicini *c c* per far circolare quando si voglia dei gas nella campana, e di un tappo a vite *a'* che serve volendo per caricare l'elettroscopio.

Per ricerche di radioattività indotta al cestello *F*, sostituivo dei dischi di argento simili a quelli disegnati in *M* (fig. 2).

Quest'elettroscopio, quando sia scelta con cura la fogliolina d'oro, si presta a dare letture precise, specialmento usando, come ho fatto io per questo scopo, un cannocchiale munito di micrometro oculare; cosicchè misure successive fatte sullo stesso fango danno resultati molto concordanti. Inoltre la quantità di sostanza necessaria per le misure è pochissima ed io non ho mai oltrepassato i 5 gr.: le misure qui riportate furono eseguite sempre su tale quantità di fango. Gli isolanti di zolfo presentano sempre un ottimo stato di isolamento.

Per avere la misura della radioattività della sostanza, caricavo negativamente il piccolo elettroscopio con una pila Zamboni attraverso l'apposita apertura, mediante un sottile filo metallico attaccato ad un estremo della pila.

Il massimo di deviazione dell'elettroscopio corrispondeva a 250 Volta. Poi determinavo successivamente la caduta del potenziale di carica dell'elettroscopio, prima e dopo aver posto la sostanza nel piattello *C*, riferendola al minuto primo.

Nelle mie determinazioni di rado spinsi la scarica dell' elettroscopio al di sotto di 100 Volta; ad ogni modo anche pei materiali più attivi mi mantenni sempre ad un potenziale sufficientemente elevato per non scendere al di sotto della corrente di saturazione. Questo lo dimostravano evidentemente le curve della dispersione dell' elettroscopio che erano molto vicine ad una retta, tranne qualche volta in cui col diminuire del potenziale aumentava un pochino la dispersione in virtù di una leggerissima attivazione che assumeva l'elettroscopio. Per questo la misura dell'attività mi veniva data senz'altro dalla dispersione in Volta per un minuto primo, corretta naturalmente della dispersione iniziale dell'elettroscopio.

Coll'elettroscopio della forma *B* operavo nello stesso modo. Interponevo almeno quattro ore fra una lettura e l'altra, perchè i valori della dispersione iniziale fossero sempre gli stessi e le osservazioni sui fanghi non fossero influenzate dalla leggiera attivazione che qualche volta acquistava l'elettroscopio. In generale ho sperimentato coll'apparecchio della forma *A* più comodo per queste ricerche; però ho osservato valori concordanti tra loro, usando sia l'una sia l'altra forma.

Sarebbe troppo lungo il descrivere singolarmente le diverse sorgenti dalle quali furono tolti i campioni dei fanghi; mi limiterò a ricordare che:

1. Nello stabilimento « Bagni caldi » si trovano due sorgenti: quella del « Doccione » e quella che alimenta il « Bagno dei poveri ».

2. Alimentano lo stabilimento delle « Docce basse » le sorgenti « Rossa », « Disperata », « Coronale », « Maritata », « Trastullina » e la « Gialla »; di quest'ultima non potei prendere campioni perchè era otturata.

3. Nello stabilimento « Bernabò » si trova una sorgente termale.

4. Lo stabilimento « alla Villa » pur esso è alimentato da un'unica sorgente termale.

Queste acque ricordate sono tutte termali, variando le temperature dall'una all'altra; io non misurai direttamente queste temperature, credendo di trovarle registrate nelle relazioni chimiche di tali acque che furono fatte a più riprese; disgraziatamente non tutte le sorgenti sono ricordate, specialmente nelle relazioni più recenti, talchè ho dovuto prendere le temperature in gradi Réaumur che dà il Moscheni.

Esperienze.

Nel seguente prospetto, ove raduno i risultati delle mie osservazioni, nella colonna delle temperature sotto R riporto quelle date dal Moscheni, e sotto C i gradi centigradi registrati dall'Antony [1].

[1] Relazione citata.

	FANGHI		Temperatura R	Temperatura C	Tempo	Grammi	Dispersione in Volta all'ora
Stabilimento dei Bagni Caldi	Sorgente Doccione	aderente	43	54,1	16 giorni	5	322,44
		non aderente			16 id.	5	283,08
		id.			più di 1 anno	5	280,10
	Sorgente del Bagno dei Poveri	aderente	43	44,5	16 giorni	5	143,74
		non aderente			16 id.	5	139,08
Stabilimento delle Docce Basse	Sorgente Rossa	aderente	38	41,5	17 giorni	5	1062,70
		non aderente			id.	5	259,36
	Sorgente Disperata	aderente	36		id.	5	488,13
		non aderente			id.	5	422,82
	Sorgente Coronale	aderente	35		18 giorni	5	668,88
		non aderente			id.	5	306,78
	Sorgente Maritata	aderente	35		id.	5	496,98
		non aderente			id.	5	875,30
	Sorgente Trastullina	aderente	29,5		19 giorni	5	281,52
Stabil. Bernabò	Sorgente Bernabò	non aderente	35	40	19 giorni	5	120,36
Stabilimento della Villa	Sorgente della Villa	aderente	33 3/4	39	19 giorni	5	1695,94
		non aderente			id.	5	836,28
	Campione di Pechblenda dell'Istituto di Chimica					0,20	1655,5

Dando uno sguardo alla tabella, ci possiamo facilmente convincere che i depositi *aderenti* sono in generale più attivi dei non aderenti; un'eccezione è presentata dal fango della sorgente « Maritata ».

I fanghi mantengono inalterata la loro attività anche col volger del tempo; campioni sperimentati successivamente diedero sempre lo stesso numero, e nella tabella è riportato un fango del « Doccione » il quale dopo più di un anno presenta sempre la stessa attività.

Quasi sempre si nota che i fanghi più attivi sono quelli deposti dalle acque a più bassa temperatura; e non solo col variare della temperatura cambia l'attività, ma cambiano ancora gli altri caratteri chimici e fisici: così il colore dei fanghi dal rosso-bruno pei « Bagni caldi » (54°,1) va al rosso-ocraceo della « Villa » e « Bernabò » (39° a 40°) fino al giallo-chiaro

dell'acqua « Gialla » (38°), mentre l'idrazione va aumentando via via che la temperatura si abbassa. Per altro da questa legge si scosta il fango « dei poveri » che dovrebbe dare dei valori un poco maggiori del « Doccione » e il fango « Bernabò »: però questi due depositi sono diversi da tutti gli altri per l'aspetto fisico almeno. Così pure un valore molto elevato si trova nel numero del fango aderente dell'acqua « Rossa ».

Queste divergenze in meno si potrebbero spiegare col fatto dell'impurità del campione e che il deposito della « Rossa » aderente abbia soggiornato molto tempo nei crepacci della roccia. Certo si è che da un minimo di 322 per i « Bagni caldi » si va salendo sino ad un massimo di 1695 di dispersione per la « Villa » e che il « Doccione » ha una temperatura molto più elevata di questa.

In fondo alla tabella è posto il valore ricavato dallo stesso apparecchio per due decigrammi di un vecchio campione di *Pechblenda* esistente nel nostro laboratorio; ciò feci allo scopo di poter fare dei confronti fra la grandezza della radioattività dei fanghi studiati e quella già nota della *Pechblenda*. Questa fu finamente polverizzata e distribuita nel piattello in modo che occupasse la maggiore superficie possibile.

Esaminai inoltre la radioattività indotta in oggetti di argento posti sia nell'aria della grotta a vapore, nell' acqua e nei fanghi dei « Bagni caldi »; e questa si mostrò molto evidente; così pure si mostrò molto maggiore l'attivazione acquistata da due piattelli d'argento caricati contemporaneamente ad uno stesso potenziale negativo e di cui uno nell'aria della grotta, l'altro nell'aria esterna dello stabilimento.

A queste ricerche eseguite coll'elettroscopio, corrispondono le proprietà dei fanghi di impressionare le lastre fotografiche. Le prove furono eseguite su lastre Lumière delle dimensioni 9×12 involte in carta nera. Su questa, dalla parte corrispondente alla gelatina, ponevo delle lettere di piombo grandi e spesse e poi spargevo da 20 a 25 gr. di fango bene asciutto sulle lettere e sulla carta nera ponendo tutto in scatole ben chiuse. Con pose varianti da 10 a 15 giorni si ottengono dei fotogrammi ben netti.

Esperienze di confronto eseguite con fanghi debolmente attivi di altre regioni, diedero dei risultati negativi.

Da tutto ciò che ho esposto si può tirare una conclusione importante: la grande radioattività che presentano i fanghi dei Bagni di Lucca. Per quanto io abbia letto sulle relazioni di autori diversi intorno all'attività dei fanghi termali, non ho visto rammentato alcun deposito che presenti in maniera così ragguardevole la radioattività che si riscontra nei fanghi da me studiati. Dato un prodotto così attivo, non deve essere impossibile il cercare di concentrare con qualche frazionamento sistematico la materia attiva, e conoscere così se questa debba ascriversi a Radio o piuttosto ad uno degli altri elementi radioattivi. Di questo studio stiamo occupandoci attualmente il prof. Antony ed io.

Fisica. — *Misura del coefficiente di attrito interno dell'aria a basse temperature* [1]. Nota del dott. SILVIO CHELLA, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

La propagazione del movimento nei gas è stata l'oggetto delle più accurate ricerche da parte dei fisici, come quella che, legata direttamente al percorso medio molecolare, sembrava poter farci conoscere per la via più diretta la costituzione interna dei gas stessi. È noto infatti che dal percorso medio di una molecola si può risalire alle sue dimensioni, le quali concordano, almeno come ordine di grandezza, con quelle che si possono dedurre per vie affatto diverse.

È pur nota la semplice relazione che lega il coefficiente di viscosità η al percorso medio λ:

$$\lambda = k \frac{\eta}{\sqrt{p\varrho}}$$

dove p e ϱ sono rispettivamente la pressione e la densità del gas, mentre k sta a rappresentare un coefficiente puramente numerico molto prossimo a 1,8.

Però mentre son numerosissime le misure di attrito interno fra limiti di temperatura varianti fra 0 e 300°, scarseggiano quelle effettuate a temperature inferiori a 0°, e le ricerche mancano poi totalmente al disotto di — 20°. Mi è quindi sembrato opera di un qualche interesse, il completare lo studio del coefficiente di attrito interno dell'aria, a temperature molto basse; tanto più che l'impianto per la produzione dell'aria liquida nell'Istituto Fisico di Pisa, veniva opportunamente ad agevolare il lavoro.

Il metodo da me usato per la misura della viscosità dell'aria, e che consiste essenzialmente in quello dello smorzamento delle oscillazioni di un solido di rotazione, si trova esposto in una Nota precedente [2], assieme alla descrizione d'un apparecchio costruito appositamente per ovviare ad alcune cause di errore, che affettavano le determinazioni fatte da altri sperimentatori.

Esso consiste nella sua parte più importante in due cilindri coassiali tenuti fissi, fra i quali vien sostenuto, per mezzo di una sospensione bifilare,

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Pisa, diretto dal prof. A. Battelli.

[2] Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XIV, 1° sem. 1905, p. 23.

provveduta del solito specchietto per le letture sopra una scala divisa, un cilindro cavo di pareti sottilissime.

Tanto la sospensione che il sistema dei cilindri sono rinchiusi in un apparecchio a tenuta, e il movimento all'equipaggio mobile viene trasmesso per mezzo di un ago magnetico, a cui è raccomandata la sospensione bifilare;

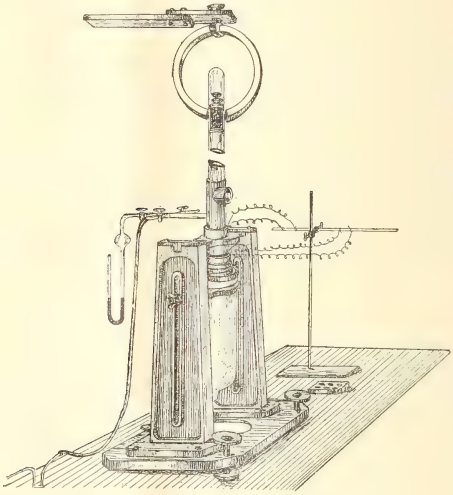


Fig. 1.

l'ago è mosso da un potente magnete permanente situato all'esterno e visibile in alto nella fig. 1ª.

La parte cilindrica dell'apparecchio ove avvenivano i fenomeni di attrito era immersa in una grossa provetta contenente un liquido che poteva esser tenuto agitato; e la provetta era a sua volta contenuta in un vaso cilindrico di vetro a doppia parete, in cui versavasi il refrigerante per portar il sistema dei cilindri alla temperatura voluta.

Per eliminare gli errori cui sopra ho accennato, i cilindri mobili adoperati nelle esperienze erano due, di ugual diametro e spessore, ma di altezze inversamente proporzionali alla densità dei due metalli diversi, di cui detti cilindri erano costituiti.

La misura delle due campanine mobili, una di ottone e l'altra di alluminio, le cui dimensioni figurano nella formula che dà il coefficienie di attrito

in funzione dello smorzamento delle oscillazioni, è stata fatta a mezzo di un comparatore di Froment dell'approssimazione di $^1/_{100}$ di mm. Questo comparatore fu verificato all' Ufficio Centrale di pesi e misure e la differenza per una lunghezza di cm. 20 è stata trovata di μ. 5.

Le dimensioni corrette sono, tenendo i simboli della Nota precitata, cioè chiamando con R_1 e R_2 rispettivamente il raggio esterno ed interno, e con h_1 e h_2 l'altezza esterna ed interna:

Campana di ottone	Campana di alluminio
R_1 cm. 2,3317	cm. 2,328
R_2 " 2,2635	" 2,2595
h_1 " 2,993	" 10,079
h_2 " 2,914	" 9,948

Come si vede, i raggi delle due campanine, per quanto assai prossimi, non sono perfettamente uguali; d'altra parte, anche se si fosse potuta raggiungere questa identità per una determinata temperatura, essa sarebbe scomparsa per l' ineguale dilatazione dei metalli tosto che la temperatura fosse variata.

Val meglio quindi adoprare la formula

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \eta \left\{ \frac{k_1}{M_1} T_1 - \frac{k_0}{M_0} T_0 \right\}$$

dove ε_1 ed ε_0 sono decrementi ottenuti colle due diverse campane, M_1 e M_0 i loro momenti di inerzia, T_1 e T_0 i due periodi di oscillazione.

k_1 e k_2 sono due coefficienti numerici tali, però, che per una data coppia di campane $k_1 - k_0$ sia proporzionale prossimamente alla differenza delle loro altezze. M_1 e M_2, T_1 e T_0, come risulta dalla Nota antecedente, debbono risultar vicinissimi.

Per la misura di tali momenti d' inerzia, come per quella dei periodi, disponevo di un cronometro del tipo usato nella R. Marina, della fabbrica Dent, il quale portava il n. 3089.

L'equazione del tempo per questo cronometro era stata recentemente determinata nell'osservatorio astronomico di Arcetri.

Per quel che riguarda la misura delle temperature, mi son servito di due coppie termoelettriche identiche *rame-constantana.*

Ho saldato una delle coppie sulla parete esterna del cilindro fisso di diametro maggiore, e l'altra sull' interna del minore; mediante un commutatore a pozzette di mercurio, chiudevo l' una o l'altra delle due coppie sopra un galvanometro di grande resistenza (518 ohm), a cui avevo aggiunto 1500 ohm di resistenza interna.

Tale resistenza era sufficiente perchè potessi trascurare gli errori provenienti dalle variazioni di resistenza, necessariamente irregolari e malage-

voli per la misura, che avvenivano in quella parte del circuito del resto abbastanza esigua, la quale trovandosi nell'interno o nelle vicinanze dell'apparecchio di attrito, era esposta al raffreddamento dell'aria liquida.

Ho calibrato le coppie mediante un termometro campione di Baudin ad etere di petrolio. L'approssimazione di tale termometro è di $\frac{1}{2}$ grado per la temperatura di — 200° F C.

Difficoltà molto gravi si presentarono allorchè volli ottenere, nei vari casi, una temperatura uniforme nel gas che sottoponevo all'esperienza, in modo che tale si mantenesse durante il tempo in cui facevo le determinazioni di smorzamento delle ampiezze delle oscillazioni.

La bocca del recipiente a doppia parete, nel quale era contenuto il refrigerante (aria liquida), era causa di un forte irraggiamento, così che dovetti ricorrere a un bagno di temperatura.

Dopo molti e laboriosi tentativi osservai che il metodo migliore consisteva nel portare tutto il sistema dei cilindri, fissi e mobili, alla più bassa temperatura realizzabile, pazientando che questa acquistasse una distribuzione bene uniforme. Dipoi lasciavo riscaldare l'apparecchio avendo cura di agitar incessantemente il bagno. Bastava che l'agitatore ristasse dal funzionare pochi minuti, perchè la differenza segnata dalle due coppie termoelettriche salisse a 3 o 4 centigradi.

Ad ogni modo non raggiunsi pienamente l'intento, se non quando assegnai all'insieme dei cilindri fissi una capacità termica piuttosto considerevole; condizione questa che, se rendeva difficoltoso il raffreddamento, — al che potevasi rimediare impiegando maggior quantità di refrigerante — faceva sì che la variazione della temperatura fosse assai più regolare.

Per il bagno di temperatura che circonda la provetta, in cui si trova racchiusa la parte oscillante dell'apparecchio, dopo aver cimentato invano varie sostanze e miscugli, trovai conveniente usare l'etere di petrolio. È l'unico liquido che possa resistere alla temperatura dell'aria liquida senza gelare completamente; debbo tuttavia avvertire che, dovendo il bagno restare in presenza dell'aria, per poter essere agitato senza troppo complicare l'apparecchio, non tardava ad impregnarsi di sostanze estranee, di modo che s'intorbidava e a — 150 gradi prendeva l'aspetto di un liquido assai vischioso, ma che pur si poteva sempre agitare in modo da mantenere la temperatura abbastanza uniforme.

A compiere le misure di smorzamento aspettavo che le due coppie segnassero la stessa temperatura nei limiti di $\frac{1}{2}$ centigrado.

Per il calcolo del coefficiente di attrito facevo due determinazioni, una colla campana di alluminio e l'altra con quella di ottone, assai prossime per modo da esser certo che le condizioni della sospensione bifilare non fossero variate.

Scelte nelle due determinazioni due temperature molto prossime, ne facevo la media, e per l'una e l'altra campana riducevo il decremento logaritmico alla temperatura media per via di interpolazioni. Erano questi gli ε_1 e ε_0 che introducevo nella formula.

Le tabelle qui riportate dànno i valori ottenuti per il cofficiente di attrito in diverse serie di tali esperienze. Nella prima di esse sono stati riportati tutti gli elementi dei calcoli, e sono stati soppressi per ragione di brevità nelle altre.

$$\frac{k_1}{M_1} T_1 = 1117{,}70 \qquad \frac{k_0}{M_0} T_0 = 327{,}05$$

Temperatura	ε_1	ε_0	$\varepsilon_1 - \varepsilon_0$	η	Temperatura	Coefficiente di attrito interno
+ 21	0,083886	0,054153	0,029733	0,000193	21	0,000192
0	0,080575	0,051151	0,029424	191	— 37	156
— 21	0,077496	0,050388	0,027113	176	— 46	152
— 38	0,074159	0,050071	0,024188	157	— 55	137
— 48	0,072279	0,049994	0,022285	155	— 72	120
— 54	0,067512	0,046407	0,021105	137	— 82	106
— 70	0,064434	0,045640	0,018794	122	— 97	097
— 87	0,056160	0,040300	0,015867	103	— 115	059
— 118	0,049374	0,039822	0,009552	0,000062	— 145	024
— 130	0,047379	0,039676	0,007703	50	—	—
— 143	0,042652	0,038985	0,003697	24	—	—

Temperatura	Coefficiente di attrito interno
19	0,000191
0	188
— 11	184
— 22	173
— 45	152
— 60	133
— 73	177
— 89	098
— 98	087
— 106	079
— 132	042
— 144	021

Temperatura	Coefficiente di attrito interno
18	0,000190
— 5	187
— 30	186
— 43	155
— 59	137
— 74	117
— 86	102
— 102	061
— 123	051
— 140	028
—	—
—	—

Temperatura	Coefficiente di attrito interno	Temperatura	Coefficiente di attrito interno
+ 18	0,000191	17	0,000189
— 7	185	— 10	184
— 20	175	— 26	172
— 47	152	— 38	159
— 58	136	— 53	143
— 75	118	— 67	125
— 83	105	— 78	110
— 100	082	— 96	088
—	—	— 107	076
—	—	— 113	064

Non potendosi qui trattare di medie, non essendo i punti di temperatura uguali per tutte le serie, ho preferito determinare l'andamento dell'attrito interno coi soliti metodi grafici.

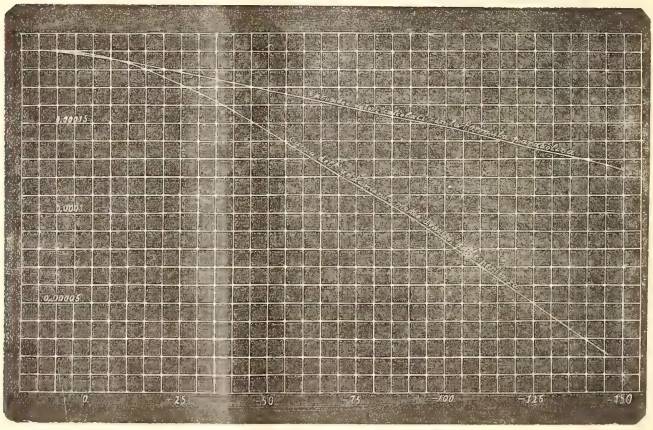


Fig. 2.

Ho ottenuto una curva riportata nella fig. 2ª, assieme alla grafica dei valori teorici calcolati colla formula parabolica.

Da questa tavola risulta a colpo d'occhio il rapido scostarsi del coefficiente di attrito interno dalla legge parabolica.

Ora, se riguardiamo le molecole come centri di una forza repulsiva, è naturale che al diminuire della temperatura, ossia della velocità molecolare, una molecola si possa meno avanzare nella sfera di azione di un'altra molecola. È quindi evidente, che nella teoria degli urti, il diametro fittizio di una molecola decresca quando la temperatura si eleva, giacchè l'urto in tale ipotesi comincia quando la traiettoria della molecola urtante devia dalla linea retta, ossia quando principia l'azione repulsiva della molecola urtata.

Sotto questo punto di vista le mie esperienze, d'accordo con quelle fatte a più elevate temperature, non sarebbero che una riconferma della teoria.

Se non che, per le temperature alle quali ho cimentato il gas, la divergenza dell'attrito interno dalla legge parabolica è notevolmente maggiore di quella osservata per temperature più elevate, e a spiegare la quale il Boltzmann avanzava l'ipotesi, che la forza repulsiva, posseduta dalla molecola, fosse proporzionale all'inversa della quinta potenza della distanza.

Per le temperature più basse la repulsione crescerebbe assai più rapidamente, e se vogliamo supporre l'azione molecolare proporzionale a $\frac{1}{r^n}$, r essendo la distanza di due centri di forza, n dovrebbe farsi molto maggiore di 5. Ma d'altra parte l'ipotesi del Boltzmann non è forse che un puro artifizio, per dedurre in forma matematica alcune proprietà dei gas, ipotesi che potrebbe anche non aver alcun reale riscontro nel meccanismo con cui i gas trasmettono il movimento.

Se si deve attribuire l'azione molecolare tutta quanta al movimento trasmesso per mezzo dell'etere agli *ioni*, come ne fanno vedere la possibilità i lavori puramente teorici del Lorentz, a spiegare il rapido decremento dell'attrito, basterebbe supporre che, al diminuire della temperatura, oltre che la forza viva molecolare, decresca notevolmente il rapporto fra il numero delle molecole e degli ioni liberi; ipotesi che invero sembra essere confermata dall'esperienza.

Per ora le esperienze sull'attrito interno, fatte tenendo soltanto conto della variazione della temperatura, non possono darci una risposta attendibile; ma forse essa ci può essere fornita dallo studio dell'influenza che eventualmente possono esercitare nella viscosità dei gas le varie specie di radiazioni: studio a cui ora mi sto accingendo.

Fisica terrestre. — *Risultati pireliometrici ottenuti dal 22 agosto a tutto giugno 1903 al R. Osservatorio Geofisico di Modena.* Nota di Ciro Chistoni, presentata dal Socio P. Blaserna.

Le misure pireliometriche nel periodo di tempo sopraindicato, vennero sempre eseguite col pireliometro di Angström N° 39, al quale stava unito l'amperimetro S. H. 66234 con derivazione 14894 (¹). Come al solito l'ora è data in tempo medio dall' Europa centrale, ed

h = altezza media del sole, durante il tempo dell'osservazione.

θ = temperatura media indicata dal termometro unito al pireliometro.

B = pressione barometrica a 0°, diminuita di 700 mm.

t = temperatura dell'aria.

f = forza elastica del vapore acqueo contenuto nell'atmosfera.

u = umidità relativa dell'atmosfera.

i = intensità (in Amp.) della corrente elettrica compensatrice.

Q = intensità della radiazione espressa in gr. cal. per minuto primo e cm^2.

(¹) I coefficienti relativi a questi apparecchi si trovano riferiti nella Nota *Sul pireliometro a compensazione elettrica dell'Angström* (Rend. della R. Accad. dei Lincei; vol. XIV, 1° sem. 1905, pag. 340 e pag. 451). Il pireliometro del R. Osservatorio Geofisico di Modena è a metri 64 sul livello del mare; e l'Osservatorio è alla latitudine boreale 44°, 38′, 53″ ed alla longitudine E da Gr. 0^h, 43^m, 42^s. Per ridurre la pressione atmosferica ad essere espressa in millimetri di mercurio a 0° ed alla densità normale, occorre diminuire i valori di B (aumentati di 700) di 0,031.

Modena 1902

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Annotazioni*
22 agosto	8.19	29°,5	24,8	0,384	0,990	58,2	22,9	11,4	55	Aureola; Ci prossimi al ⊙
" "	9.19	39,5	26,8	0,399	1,070	58,5	23,4	11,7	55	Cu e Ci prossimi al ⊙
" "	15.19	39,5	32,3	0,402	1,088	57,6	26,2	9,4	37	Bianchiccio; aureola; Cu a Sud
" "	16.19	29,5	30,3	0,379	0,967	57,4	26,0	8,9	36	Bianchiccio
" "	17.19	18,9	29,9	0,344	0,796	57,2	25,9	8,7	35	Id.
23 "	8.19	29,3	22,3	0,364	0,888	59,5	22,2	11,9	60	Id.
" "	11.19	54,5	26,3	0,392	1,032	59,7	23,2	8,8	42	Aureola; Cu e Ci in vicinanza del ⊙
" "	12.19	56,9	31,1	0,390	1,024	59,1	24,3	7,8	35	Id.
" "	15.19	39,3	31,5	0,392	1,035	58,1	25,2	7,9	33	Bianchiccio; aureola
" "	16.19	29,3	30,3	0,372	0,931	57,8	25,4	7,4	32	Id.
" "	17.19	18,7	30,4	0,334	0,751	57,4	25,0	7,2	31	Id.
24 "	8.19	29,0	22,8	0,376	0,948	58,1	19,9	8,7	50	Biancastro
" "	9.19	39,0	25,4	0,402	1,085	58,0	21,8	9,1	47	Sereno
" "	10.19	47,8	28,3	0,411	1,136	58,0	22,2	10,3	52	Id.
" "	11.19	54,1	28,3	0,408	1,119	57,9	23,7	9,7	45	Id.
" "	12.19	56,5	28,7	0,415	1,158	57,7	24,0	9,5	43	Id.
" "	13.19	54,1	28,5	0,416	1,163	57,1	24,5	9,1	40	Lucido intorno al ⊙
" "	14.19	47,8	29,1	0,408	1,119	56,7	25,0	9,2	39	Sereno
" "	15.19	39,0	29,5	0,402	1,087	56,2	25,8	9,0	37	Id.
" "	16.19	29,0	29,2	0,372	0,931	55,8	26,0	9,1	37	Biancastro; aureola
25 "	9.18	38,7	25,5	0,389	1,016	55,5	23,6	11,9	55	Aureola; nebbia fitta all'orizzonte bianchiccio
" "	10.18	47,5	28,2	0,403	1,091	55,8	24,2	10,0	45	Id.
" "	11.18	53,8	28,4	0,404	1,097	55,6	25,0	10,3	44	Id.
" "	12.18	56,2	30,1	0,419	1,181	55,0	25,7	10,4	42	Lucido intorno al ⊙
" "	13.18	53,8	29,2	0,413	1,148	54,6	26,4	11,2	39	Sereno
" "	14.18	47,5	30,0	0,413	1,148	54,2	27,0	9,8	38	Id.
" "	16.18	28,8	28,5	0,358	1,036	54,3	27,2	8,3	32	Aureola; Ci e S in prossimità del ⊙
" "	17.18	18,2	29,3	0,305	0,626	54,1	27,1	7,9	30	Bianchiccio; aureola
26 "	8.18	28,5	22,7	0,374	0,938	55,2	21,8	12,4	64	Biancastro
" "	9.18	38,5	25,5	0,396	1,053	55,6	23,2	12,5	59	Sereno
" "	10.18	47,2	28,0	0,408	1,119	55,5	24,0	12,3	56	Id.
" "	11.18	53,5	29,1	0,409	1,126	55,3	25,5	11,5	48	Id.
" "	12.18	55,8	28,1	0,415	1,158	55,2	26,8	11,2	43	Id.
" "	13.18	53,5	30,5	0,418	1,176	54,9	27,5	9,9	37	Lucido intorno al ⊙
" "	14.18	47,2	31,6	0,389	1,019	54,6	28,5	11,1	38	Caliginoso
" "	15.18	38,5	32,5	0,365	0,898	54,0	28,6	12,5	43	Aureola; bianchiccio
" "	16.18	28,5	32,0	0,343	0,792	53,8	28,5	13,4	47	Aureola; Ci e S sparsi in prossimità del ⊙
2 settembre	8.16	26,8	24,8	0,396	1,053	57,4	22,6	12,9	63	Limpido intorno al ⊙
" "	9.16	36,6	27,3	0,423	1,202	57,7	23,1	12,2	58	Id.

Modena 1902

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	Annotazioni
	hm	°								
2 settembre	10.16	45,1	29,3	0,443	1,320	57,9	23,4	11,7	55	Limpido intorno al ⊙
" "	11.16	51,1	29,0	0,432	1,255	57,8	24,6	11,0	48	Sereno
" "	12.16	53,4	27,9	0,435	1,273	57,6	25,1	10,8	46	Id. e leggera aureola
" "	14.16	45,1	31,7	0,433	1,263	57,4	26,0	9,1	37	Limpido intorno al ⊙
" "	15.16	36,6	29,9	0,414	1,153	56,9	26,6	10,4	40	Sereno
" "	16.16	26,8	30,4	0,385	0,998	56,6	26,6	10,8	42	Id.
3 "	9.16	36,3	27,5	0,392	1,033	58,5	24,2	14,8	66	Ci e S in vicinanza del ⊙; veli vaganti
" "	10.16	44,7	27,9	0.416	1,163	58,8	24,4	14,2	63	Biancastro
" "	12.16	53,0	30,6	0,424	1,210	58,5	27,4	13,1	49	Id. e Ci; ⊙ libero
" "	15.16	36,3	32,6	0,388	1,014	57,4	28,3	10,3	39	Biancastro
4 "	9.15	36,0	32,4	0,405	1,105	59,5	25,6	13,3	55	Id.
" "	12.15	52,6	29,9	0,428	1,233	59,2	27,8	11,5	43	Sereno
" "	15.15	36,0	32,1	0,405	1,105	58,2	29,3	10,7	35	Biancastro; aureola intorno al ⊙
5 "	9.15	35,7	29,4	0,394	1,044	58,1	26,0	13,4	53	Biancastro; aureola
" "	12.15	52,2	30,5	0,413	1,148	57,4	28,6	11,6	40	Id.
" "	15.15	35,7	30,6	0,375	0,947	55,9	30,1	11,2	35	Bianchiccio
6 "	15.15	35,4	30,5	0,403	1,093	54,0	26,0	12,4	50	Aureola; Cu in vicinanza del ⊙
7 "	9.14	35,1	24,9	0,409	1,123	58,1	22,0	9,9	50	Sereno
" "	15.14	35,1	31,0	0,418	1,177	57,6	25,8	6,4	26	Ci; S lontani dal ⊙; biancastro
8 "	15.14	34,8	28,1	0,396	1,054	58,3	26,6	8,5	33	Ci in vicinanza del ⊙; aureola
9 "	9.14	34,5	26,4	0,368	0,910	58,6	22,0	12,6	64	Bianchiccio; aureola
" "	15.14	34,5	29,0	0,369	0,916	56,4	26,8	10,3	39	Id.
10 "	9.13	34,2	25,7	0,365	0,895	56,7	23,0	13,2	63	Id.
" "	12.13	50,4	27,2	0,395	1,048	56,2	26,5	12,6	49	Bianchiccio ed intensa aureola
16 "	9.11	32,4	22,6	0,377	0,953	58,8	19,0	11,1	68	Biancastro; aureola
" "	15.11	32,4	27,6	0,379	0,966	57,2	23,2	9,4	45	Id. e Cu sparsi
17 "	9.11	32,1	26,5	0,387	1,007	57,6	20,6	9,3	51	Biancastro; lieve aureola
" "	12.11	47,7	29,3	0,416	1,164	56,8	23,7	7,6	35	Id. e Ci e Cu sparsi
18 "	9.11	31,8	25,4	0,367	0,904	57,1	21,8	10,3	53	Ci e Cu sparsi; ⊙ libero
" "	12.11	47,3	26,3	0,396	1,053	57,3	23,5	9,0	42	Aureola; Cu sparsi
20 "	9.10	31,2	20,3	0,397	1,056	64,8	17,0	8,2	57	Biancastro; aureola
" "	12.10	46,5	24,7	0,404	1,096	64,3	20,2	8,8	50	Id.
" "	15.10	31,2	27,7	0,388	1,012	63,0	21,8	7,1	37	Cu e Ci sparsi; aureola
21 "	9.9	30,8	23,1	0,389	1,015	62,0	17,0	9,0	62	Biancastro; aureola
" "	12.9	46,1	23,1	0,410	1,128	61,5	20,8	7,0	39	Id.
" "	15.9	30,8	27,0	0,389	1,017	60,0	22,2	6,6	33	Id.; qualche Ci verso l'orizzonte
22 "	9.9	30,5	21,9	0,390	1,020	61,3	16,6	8,7	62	Biancastro; aureola
" "	12.9	45,7	24,3	0,409	1,123	60,7	20,4	8,6	49	Sereno

Modena 1902

Giorno	Ora	*h*	*θ*	*i*	Q	B	*t*	*f*	*u*	*Annotazioni*
	h m	°								
22 settembre	15.9	30,5	27,5	0,389	1,017	59,8	22,2	7,5	37	Bianchiccio; Cu e Ci sparsi
27 »	15.7	28,9	24,1	0,387	1,005	59,9	21,0	5,8	31	Bianchiccio; aureola
30 »	9.6	28,3	20,5	0,391	1,024	51,8	15,2	8,3	64	Biancastro; aureola
3 ottobre	12.5	41,5	25,1	0,420	1,184	53,8	19,2	7,8	47	Aureola intorno al ⊙
» »	15.5	27,0	22,5	0,380	0,969	53,5	21,0	7,7	41	Cu sparsi; aureola
14 »	9.2	23,5	23,0	0,372	0,928	62,5	16,2	10,3	75	Biancastro; C verso Sud
15 »	9.2	23,2	18,2	0,386	0,997	57,8	16,8	9,9	70	Sereno
18 »	9.2	22,3	16,5	0,398	1,059	52,8	12,2	5,7	54	Id.
» »	12.2	35,8	18,0	0,422	1,192	54,0	14,4	3,7	31	Id.; aureola
» »	15.2	22,3	20,6	0,403	1,088	54,7	14,6	5,4	44	Sereno
20 »	9.1	21,7	13,5	0,379	0,960	60,6	11,0	7,8	80	Sereno; aureola
» »	12.1	35,1	16,8	0,421	1,186	60,2	19,8	10,3	60	Id.
» »	15.1	21,7	19,3	0,382	0,977	59,8	16,0	6,8	50	Qualche Cu; aureola
23 »	9.1	20,8	16,5	0,370	0,916	61,5	10,6	7,4	77	Biancastro
» »	15.1	20,8	18,5	0,359	0,863	60,9	14,2	4,5	37	Bianchiccio; Cu e Ci sparsi
13 novembre	15.1	15,2	13,8	0,275	0,505	61,9	11,8	6,2	60	Ci e S in prossimità del ⊙
14 »	12.1	27,0	14,1	0,383	0,980	63,4	10,2	5,6	62	Ci in vicinanza al ⊙; aureola
» »	15.1	15,0	14,2	0,324	0,702	62,5	11,0	5,1	52	Durante l'osservazione si forma un Cu prossimo a ⊙
15 »	12.1	26,9	15,7	0,387	1,001	64,6	9,3	4,8	57	Biancastro; aureola
» »	15.1	14,8	14,9	0,333	0,741	63,3	10,0	5,0	55	Id.
16 »	9.1	14,6	10,0	0,345	0,794	58,7	5,0	4,9	75	Biancastro
» »	12.1	26,7	14,1	0,394	1,037	57,6	9,2	4,8	57	Ci e S in vicinanza al ⊙
» »	15.1	14,6	21,4	0,345	0,798	56,4	10,2	4,9	53	Id.
22 »	9.2	13,4	0,3	0,347	0,800	61,5	−2,8	3,1	82	Sereno
» »	12.2	25,3	8,6	0,392	1,024	61,7	1,7	3,4	66	Id.
» »	15.2	13,4	15,6	0,333	0,742	61,7	3,8	3,5	58	Id.
10 dicembre	15.9	10,9	6,5	0,284	0,537	61,5	4,6	3,9	62	Veli intorno al ⊙
15 »	12.11	22,1	11,9	0,369	0,909	64,5	4,8	4,6	71	Bianchiccio; aureola
» »	15.11	10,6	11,3	0,264	0,465	63,3	5,8	4,4	64	Id.
16 »	12.12	22,0	7,0	0,315	0,661	64,1	4,5	5,0	80	Caliginoso
» »	15.12	10,6	10,8	0,255	0,434	64,1	5,4	4,4	66	Id.
17 »	12.12	22,0	9,1	0,307	0,628	64,9	4,7	4,6	71	Aureola intorno al ⊙; cielo bianchiccio
19 »	9.13	10,5	9,5	0,290	0,561	53,9	8,2	2,2	27	Bianchiccio
» »	12.13	21,9	15,0	0,395	1,043	54,0	11,6	2,5	26	Sereno
» »	15.13	10,5	15,0	0,308	0,634	52,3	12,0	2,2	21	⊙ libero; Ci sparsi
20 »	15.14	10,5	14,3	0,316	0,667	58,0	8,6	2,5	31	Sereno
21 »	12.14	21,9	15,0	0,349	0,814	53,8	8,8	3,9	45	Bianchiccio; aureola
»	15,14	10,5	17,1	0,300	0,602	52,7	10,6	3,4	36	Id.
22 dicembre	9.15	10,5	4,3	0,299	0,595	60,6	2,8	4,5	80	Bianchiccio

Modena 1902

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Annotazioni*
	h m	°								
22 dicembre	12.15	21,9	12,6	0,351	0,823	62,5	6,8	4,8	66	Bianchiccio
" "	15.15	10,5	16,0	0,290	0,562	63,0	8,2	4,8	59	Id.
23 "	9.15	10,5	2,8	0,255	0,432	66,4	0,0	3,1	67	Id.
" "	12.15	21,9	11,9	0,352	0,827	67,8	4,1	3,6	61	Id.
" "	15.15	10,5	11,8	0,258	0,444	68,0	5,4	4,6	69	Id.
24 "	12.16	21,9	11,2	0,324	0,700	71,3	1,3	4,2	84	Bianchiccio aureola
" "	15.16	10,5	11,0	0,261	0,454	70,0	3,6	4,3	73	Bianchiccio
25 "	9.16	10,5	2,0	0,257	0,439	67,1	0,2	3,5	74	Sereno
" "	12.16	22,0	9,6	0,358	0,855	66,7	4,0	3,9	64	Id.
" "	15.16	10,5	16,0	0,271	0,491	64,7	5,4	3,8	58	Id.

Modena 1903

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	*Annotazioni*
	h m	°								
2 gennaio	12.20	22,3	9,0	0,369	0,908	59,9	3,1	4,4	76	Aureola; caligine all'orizzonte
5 "	12.20	22,6	10,0	0,292	0,569	59,6	4,5	5,4	87	Id. e veli intorno al ☉
16 "	12.26	24,2	6,0	0,346	0,797	68,4	−1,0	3,0	71	Aureola; caliginoso
18 "	12.27	24,6	4,5	0,355	0,839	72,7	−1,9	2,4	58	Id.
" "	15.27	12,8	8,0	0,282	0,530	71,7	−1,0	1,8	43	Id.
19 "	12.27	24,8	3,5	0,364	0,881	69,9	−0,5	2,0	45	Bianchiccio; aureola
" "	15.27	13,0	8,0	0,298	0,592	69,3	0,2	1,9	43	Id.
20 "	12.27	25,0	6,0	0,365	0,887	69,1	−1,6	1,8	44	Id.
" "	15.27	13,1	11,0	0,283	0,534	67,5	−0,2	2,5	56	Id.
22 "	12.28	25,4	6,0	0,357	0,848	64,0	−1,3	2,1	51	Caliginoso
" "	15.28	13,5	7,4	0,280	0,522	63,0	0,0	2,4	53	Id.
25 "	12.29	26,1	5,8	0,347	0,802	68,5	1,9	3,5	68	Id. ed aureola
" "	15.29	14,1	8,0	0,271	0,489	68,3	3,8	3,2	54	Id. Id.
26 "	12.29	26,3	9,8	0,361	0,869	70,4	4,9	3,0	47	Caliginoso
" "	15.29	14,3	12,0	0,313	0,654	69,6	5,4	2,9	43	S sparsi; bianchiccio
27 "	12.29	26,6	12,0	0,364	0,885	71,1	5,2	3,2	47	Ci e S in prossimità del ☉
" "	15.29	14,5	12,9	0,301	0,605	69,6	7,0	3,3	44	Veli sparsi; bianchiccio
28 "	12.29	26,9	13,2	0,341	0,777	66,3	7,9	4,0	51	Caliginoso
" "	15.29	14,7	15,0	0,260	0,452	64,8	8,6	4,4	52	Id.
29 "	12.30	27,1	11,3	0,349	0,813	68,2	4,1	4,6	77	Id.
" "	15.30	15,0	12,6	0,251	0,421	68,0	6,2	5,0	70	Id.
30 gennaio	12.30	27,4	10,9	0,347	0,804	70,6	4,1	4,6	75	Id.
" "	15.30	15,2	14,8	0,285	0,543	69,1	6,0	5,1	73	Id.

Modena 1903

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B	t	f	u	Annotazioni
	h m	°								
3 febbraio	12.30	28,5	9,8	0,356	0,845	56,3	5,4	4,8	71	Caliginoso ed aureola
" "	15.30	16,1	14,0	0,285	0,543	56,3	8,0	5,0	62	Bianchiccio
4 "	12.30	28,8	11,0	0,361	0,870	66,9	5,1	3,6	55	Bianchiccio ed aureola
" "	15.30	16,4	15,0	0,310	0,642	66,2	7,0	3,7	49	Id.
5 "	12.30	29,1	11,2	0,353	0,831	68,5	5,2	4,3	65	Caliginoso
" "	15.30	16,7	13,3	0,292	0,570	67,8	7,2	4,2	55	Id.
6 "	12.31	29,4	11,0	0,363	0,879	66,4	7,4	4,6	60	Id.
" "	15.31	16,9	19,5	0,313	0,656	65,3	8,8	4,4	53	Bianchiccio
7 "	12.31	29,7	13,0	0,345	0,795	67,3	6,0	5,3	76	Id.
" "	15.31	17,2	16,0	0,293	0,574	67,0	9,0	5,4	63	Id.
8 "	12.31	30,0	12,3	0,355	0,841	71,9	7,1	5,8	78	Caliginoso
" "	15.31	17,4	16,0	0,295	0,582	70,6	10,2	6,5	70	Bianchiccio
18 "	11.0	30,9	11,0	0,386	0,994	71,1	2,8	2,8	52	Caliginoso
" "	11.15	31,3	11,5	0,386	0,995	71,1	3,0	2,8	50	Id.
" "	11.30	31,7	13,4	0,387	1,000	71,1	3,5	2,7	47	Id.
" "	11.40	32,0	14,0	0,389	1,011	71,0	4,0	2,7	45	Id.
" "	12.30	33,3	11,4	0,390	1,015	71,0	4,8	2,7	41	Id.
" "	15.19	21,0	14,8	0,356	0,847	69,9	6,6	2,5	35	Id.
" "	15.30	20,3	13,0	0,353	0,832	69,9	6,7	2,6	35	Veli intorno al ⊙
" "	15.37	19,5	13,0	0,353	0,832	69,9	6,6	2,5	35	Id.
19 "	12.30	33,7	11,8	0,376	0,944	74,8	6,5	3,6	51	Caliginoso
" "	15.30	20,5	15,2	0,324	0,702	73,6	8,4	3,4	42	Id.
20 "	15.30	20,8	20,6	0,858	0,859	69,0	12,6	3,6	34	Id.
21 "	12.30	34,4	17,4	0,388	1,007	70,0	12,8	4,9	45	Id.
" "	15.30	21,1	22,0	0,322	0,695	68,4	16,2	3,5	26	Bianchiccio
26 "	15.29	22,6	13,3	0,284	0,539	64,5	10,2	6,7	72	Caliginoso
4 marzo	12.28	38,9	15,1	0,398	1,059	52,5	13,0	5,0	45	Id.
" "	15.28	24,9	21,5	0,369	0,913	53,1	16,0	2,6	19	Bianchiccio
20 "	12.24	45,1	17,8	0,381	0,971	69,0	13,0	3,9	35	Caliginoso
21 "	12.24	45,5	18,4	0,389	1,013	69,9	14,5	4,4	37	Bianchiccio
" "	15.24	30,3	31,0	0,372	0,932	68,7	15,6	3,1	24	Id.
22 "	12.23	45,9	21,3	0,394	1,041	68,2	16,2	4,8	35	Caliginoso
" "	15.23	30,7	31,0	0,370	0,922	66,8	18,2	4,1	27	Id.
23 "	15.23	31,0	18,1	0,375	0,941	63,4	19,2	4,8	29	Id.
24 "	11.16	44,1	21,8	0,402	1,084	60,9	16,2	5,5	40	Bianchiccio
	11.34	45,1	23,2	0,406	1,106	60,7	16,5	5,3	38	Id.
	11.50	45,8	25,0	0,407	1,112	60,5	17,0	5,3	37	Id.
" "	12.0	46,4	26,0	0,408	1,118	60,3	17,1	5,3	37	Id.; ⊙ con aureola
" "	12.23	46,7	26,0	0,407	1,113	60,0	17,6	5,7	38	Id.

Modena 1903

Giorno	Ora	*h*	*θ*	*i*	Q	B	*t*	*f*	*u*	*Annotazioni*
	h m	°								
24 marzo	14.15	39,8	24,0	0,388	1,010	59,2	19,5	5,0	29	Bianchiccio; ⊙ con aureola
" "	14.35	37,9	27,0	0,375	0,945	59,2	19,8	4,5	27	Id.
" "	14.52	35,5	27,0	0,377	0,955	59,0	19,8	4,5	26	Id.
" "	15.23	31,3	27,0	0,365	0,895	58,9	20,0	4,3	25	Caliginoso; Ci ed S all'orizzonte Sud
25 "	15.22	31,6	23,3	0,342	0,785	59,8	17,4	4,7	32	Caliginoso
1 aprile	12.20	49,8	20,0	0,402	1,083	52,0	14,8	3,7	30	Bianchiccio
" "	15.20	33,8	22,0	0,380	0,968	52,5	16,0	1,9	14	Biancastro
12 "	11.35	52,3	19,5	0,406	1,104	47,2	16,6	5,0	38	Id.
" "	11.40	53,0	20,3	0,407	1,110	47,2	16,6	5,0	38	Id.
" "	12.17	54,0	21,2	0,413	1,143	46,3	18,2	4,7	30	Id.
" "	15.17	37,1	19,9	0.380	0,967	45,3	20,6	2,9	15	Id.
9 maggio	12.13	62,7	22,0	0,409	1,122	53,4	21,8	4,9	25	Sereno intorno al ⊙; Cu sparsi
22 "	11.34	63,9	24,3	0,385	0,995	62,6	23,7	8,0	37	Bianchiccio
" "	12.13	65,7	28,4	0,394	1,044	62,4	24,8	8,0	34	Id.
" "	15.13	45,7	25,5	0,381	0,975	61,7	25,2	7,1	30	Caliginoso
24 "	12.13	66,1	30,0	0,377	0,957	59,0	23,4	11,5	54	Caliginoso ed aureola intorno al ⊙
" "	15.13	46,0	27,9	0,375	0,945	57,9	25,0	10,8	46	Caliginoso
25 "	9.13	46,1	22,3	0,357	0,855	58,4	20,8	10,6	58	Leggera aureola; caliginoso
" "	12.13	66,3	27,5	0,375	0,945	57,1	23,5	9,9	46	Id.
" "	15.13	46,1	27,6	0,351	0,828	55,7	26,2	9,4	37	Id.; Ci ed S sparsi
26 "	12.13	66,5	29,4	0,398	1,066	54,9	23,0	8,3	40	Aureola attorno al ⊙; cielo bianchiccio
" "	15.13	46,3	28,5	0,379	0,966	53,1	24,2	9,1	41	Biancastro
30 "	9.14	46,7	23,5	0,394	1,042	51,7	22,2	9,8	49	Sereno
6 giugno	12.15	68,0	29,9	0,379	0.967	57,0	22,5	9,1	45	Caliginoso
" "	15.15	47,3	27,0	0,371	0,925	55,9	23,4	7,0	33	Sereno; nebbia all'orizzonte
17 "	12.17	68,7	26,4	0,362	0,881	54,1	22,2	6,2	32	Bianchiccio; Cu sparsi
18 "	9.17	47,8	22,0	0,357	0,855	54,3	21,8	8,9	45	Bianchiccio
24 "	15.18	47,8	26,4	0,374	0,940	54,3	25,8	7,6	31	Id.
25 "	12.18	68,7	28,5	0,386	1,002	56,2	25,1	10,8	47	Id. e Cu sparsi
" "	15.18	47,8	27,6	0,366	0,901	55,5	26,0	10,8	43	Id. Id.
26 "	12.19	68,7	28,4	0,392	1,033	58,1	27,2	9,7	37	Biancastro
" "	15.19	47,8	32,4	0,382	0,983	57,5	28,2	7,9	28	Id.
27 "	9.19	47,7	25,8	0,373	0,935	58,7	26,0	11,1	44	Caliginoso; aureola; C ed S all'orizzonte
" "	12.19	68,7	33,0	0,384	0,994	58,1	27,1	10,7	40	Caliginoso; aureola; Ci e S ad WSW
" "	15.19	47,7	33,4	0,370	0,923	57,4	28,4	9,9	34	Caliginoso; aureola; Ci e Cu sparsi
28 "	15.19	47,7	30,0	0,375	0,946	58,2	28,2	10,4	36	Bianchiccio; aureola
29 "	9.19	47,7	31,2	0,370	0,922	58,3	25,2	13,5	57	Bianchiccio
" "	12.19	68,6	28,5	0,392	1,033	57,5	28,0	12,4	44	Id.
" "	15.19	47,7	32,4	0,379	0,968	56,9	30,0	11,9	38	Id.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1902 e nell'estate del 1903.* Nota di Ciro Chistoni presentata dal Socio Blaserna.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geologia. — *Delle sabbie fossilifere di Malagrotta sulla via Aurelia.* Nota dell'ing. Enrico Clerici, presentata dal Socio V. Cerruti.

I collettori di fossili dei dintorni di Roma, che conobbero la località di Malagrotta sulla via Aurelia, la compresero fra le adiacenze del Monte Mario ritenendo probabilmente che le sabbie fossilifere, che ivi appariscono, fossero una continuazione laterale delle sabbie gialle classiche.

Il prof. Meli, nel catalogo dei molluschi fossili del Monte Mario compilato insieme al Ponzi (1), indicando le singole località in cui furono trovate le varie specie, fece pure menzione di Malagrotta e notò che quelle sabbie « sembrano alquanto più recenti di quelle del Monte Mario ».

Anche io (2) le ritenni posteriori al giacimento classico e, di più, equivalenti alle argille salmastre del fosso della Rimessola e del Casale del Merlo: ed ora, dopo le osservazioni di dettaglio per la Rimessola, riportate in questi Rendiconti (3), stimo utile riferire altre notizie che contribuiscano a meglio precisare la posizione stratigrafica delle sabbie di Malagrotta, e ciò in continuazione delle ricerche fatte intorno alle sedimentazioni anteriori alla formazione del tufo granulare.

Nella figura qui unita è rappresentata una parte della sezione visibile in una cava di ghiaia, attualmente attiva, nel fianco settentrionale della collina posta a sinistra della via Aurelia, alla colonnetta del miglio VIII, poco oltre il casale di Malagrotta.

Il n. 1 è costituito da ghiaia frammista a sabbia di colore giallognolo variamente intenso, con elementi bene arrotondati, spesso discoidali, di calcari svariati, prevalentemente eocenici a piccole nummulitidee, con altri rosati e

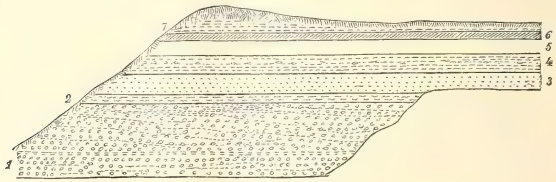
(1) *Molluschi fossili del Monte Mario presso Roma.* Atti R. Acc. dei Lincei, serie 4ª, Mem. della cl. di sc. fis. mat. e nat., vol. III (1886).

(2) *Sul Castor fiber, sull'Elephas meridionalis e sul periodo glaciale nei dintorni di Roma,* Boll. Soc. Geol. It., vol. X (1891), pag. 351; *La formazione salmastra nei dintorni di Roma,* Rendiconti R. Acc. Lincei, 2° sem. 1903, fasc. 3°.

(3) Vol. XIV, 1° sem. 1905. *Osservazioni sui sedimenti del Monte Mario anteriori alla formazione del tufo granulare.*

con piromache. Vi rinvenni frammenti di corna di *Cervus* cfr. *elaphus* Lin. e di ossami di *Bos*. La sabbia vi è in quantità assai variabile, talvolta assolutamente mancante in modo che la ghiaia sembra artificialmente lavata, tal'altra è invece tanto abbondante, a discapito della parte ghiaiosa, da costituire strati a sè.

Nella parte superiore la stratificazione apparisce meno regolare, ma più evidente, con straterelli fra loro inclinati o di colore oscuro, quasi nero, per arricchimento di minerali colorati. Vi prevalgono allora la magnetite, il ferro titanato, l'augite verde-bottiglia in piccoli cristalli isolati ed in cri-



stalliti irti di punte alle estremità. Fra gli altri minerali pesanti si notano, ma in quantità molto scarsa, apatite, granato roseo, staurolite, zircone, tormalina; fra i leggeri il quarzo è in prevalenza con pochi feldspati e frammenti di vetri bollosi. Anche quando la sabbia è di color chiaro e non mostra con evidenza i cristallini di augite, questi vi si possono sempre estrarre in discreta quantità mediante separazione meccanica. La potenza complessiva conosciuta del banco ghiaioso è di circa 7 m.

Segue uno strato n. 2, alto m. 0,50, di sabbia marnosa di color cenere-giallastro, ocraceo verso il termine superiore, ricca di granellini oscuri di piromaca e con molti fossili continentali, *Helix* (cfr. *H. nemoralis* Lin. var.), *Succinea*, *Pupa*, *Vertigo* cfr. *antivertigo* Drap., *Planorbis*, ma per solito resi assai fragili.

Il n. 3 è formato di sabbia, quasi sciolta, di color chiaro-giallognolo con fascie più marcate, contenente augite e qualche ghiaiuzza disseminata.

A questa fa seguito altra sabbia, n. 4, un po' argillosa, di color grigio-chiaro, in sommità piuttosto verdiccio, contenente noduli o concrezioni calcaree, nella quale, come in quella del n. 3, non si scorgono fossili macroscopici.

Lo strato n. 5 è costituito da sabbia fossilifera, alla parte inferiore quasi bianca, gialla invece con graduale passaggio, alla parte superiore. La sabbia biancastra è cosparsa di grani neri formati nella quasi totalità da piromaca, e contiene in abbondanza *Cardium Lamarcki* Reeve, *Myrtea lactea* Lin., *Tapes caudata* D'Anc., *Nassa reticulata* Lin.

La parte gialla è invece ricca di *Ostrea edulis* Lin. e di *Pecten sulcatus* Born, che taluno ritiene varietà del *P. glaber* Lin., a valve prevalentemente scompagnate, ma ben conservate, di grandi dimensioni (fino a 65 mm. di massimo diametro), spesso cosparse di *Balanus spongicola* Brown. Oltre le specie ora ricordate per la loro frequenza, molti altri fossili vi si possono raccogliere e nel complesso sono quelli propri delle formazioni salmastre, o più esattamente a salsedine variabile, con qualche specie affatto littorale (1).

Sullo strato di ostriche v'è circa 30 cm. di argilla compatta color avana seguìta da altri 40 cm. di argilla plastica verdiccia contenente qualche *Corbula gibba* Olivi, *Arca diluvii* Lamk., *Cardium paucicostatum* Sow., *Nassa reticulata* Lin., *Chenopus pespelecani* Lin., molte foraminifere (rotalie e polistomelle). Queste argille sono indicate insieme dal n. 6.

Il n. 7 è di sabbia un po' argillosa, di colore giallastro-sporco, ricoperta, in questo tratto di sezione, da terra vegetale; ma poco oltre, in altre escavazioni, sopporta una ghiaia a piccoli elementi e colorata in giallo intenso.

Le stesse roccie ora indicate si rivedono nelle vicine colline con qualche locale variazione di spessore facilmente spiegabile in una formazione prevalentemente di spiaggia. Vi si constata inoltre che la serie è ricoperta dal tufo granulare colle sue ormai ben note variazioni a pallottole pisolitiche e ad affinamenti argillosi chiari.

Le ghiaie del n. 1 (2), per la relativa abbondanza dell'augite e per la probabile assenza di quei ciottoli trachitici che scopersi in altre località e qui non trovai, o per la maggiore rarità loro, potrebbero costituire un tipo da interporsi, per esempio, fra le ghiaie di Decima rimarchevoli per i rari ciottoli trachitici, e quelle dette di Ponte Molle, le quali contengono in grande abbondanza svariate roccie vulcaniche e loro minerali isolati.

Si potrebbe tentare una ulteriore distinzione nelle nostre ghiaie più antiche: cioè ghiaie che contengono allo stato di ciottoli i frammenti di

(1) Oltre che per questa sabbia fossilifera, la località di Malagrotta è importante per le estese formazioni d'acqua dolce con farine fossili e marne tripolacee gremite di *Bythinia tentaculata* Lin., *Valvata piscinalis* Müll., *Planorbis*, *Limnaea*, *Neritina*, ecc., come per esempio alla collina della Casetta, al Quarto delle Colonne, alla Riserva dell'Isolotto. Al Quarto della Vipera le marne sono indurite in calcare argilloso e travertinoso gremito dei detti fossili.

(2) Analogamente le ghiaie della tenuta Torretta Massimi, presso il ponte della Pisana, contengono cristalli di augite, ma in piccolissima quantità. Sulle ghiaie si trovano sabbie, talvolta ghiaiose, racchiudenti straterelli caolinici e sostenenti argilla a *Cardium Lamarcki*, visibile lungo la strada alla salita presso il Casale della Pisana, prima di raggiungere la sommità che è ricoperta dai tufi.

Nella valletta a sud del detto ponte, in una cava di ghiaia forse abbandonata, fra gli straterelli sabbiosi oscuri ve ne ha uno di 10 cm. quasi per intero costituito da grani e cristalli di magnetite e di granato roseo con alquanta augite e scarso zircone, rutilo ecc.

masse trachitiche in denudazione, e ghiaie che, pur essendo la immediata continuazione delle prime, per le variate condizioni geologiche più non ne ricevettero. Per converso queste altre ghiaie si arricchirono di augite, che vi troviamo ottimamente conservata, e che, pervenuta per trasporto eolico di ceneri e lapilli, o per dilavamento di materiali augitici comunque originati, fa testimonianza di un'attività vulcanica posteriore, sia pur di poco, a quella che aveva prodotto le accennate lave trachitiche.

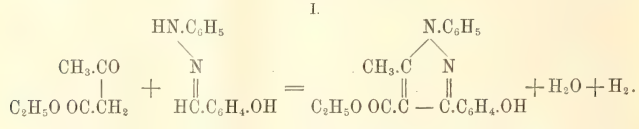
Chimica. — *Sull'acido 5-metil-1-fenil-3-ossifenilpirazol-4-carbonico ed il suo lattone* [1]. Nota di G. Minunni e G. Lazzarini, presentata dal Socio E. Paternò.

L'idrazone dell'aldeide salicilica reagisce facilmente con l'etere acetoacetico in presenza di cloruro di zinco, fornendo un prodotto di condensazione $C_{17}H_{12}O_2N_2$ ben cristallizzato che per azione della potassa alcoolica si trasforma in un acido $C_{17}H_{14}O_3N_2$ e per riscaldamento o per azione dei cloruri acidi perde facilmente una molecola d'acqua rigenerando il composto primitivo. In base ai risultati delle esperienze da noi eseguite con altri idrazoni e descritte in una Nota precedente [2], il composto $C_{17}H_{14}O_3N_2$ deve considerarsi come un acido metilfenilossifenilpirazolcarbonico e la sostanza $C_{17}H_{12}O_2N_2$ come il relativo lattone formatosi dall'o-ossibenzalfenilidrazone ed etere acetoacetico secondo l'equazione:

$$C_{13}H_{12}ON_2 + C_6H_{10}O_3 = C_{17}H_{12}O_2N_2 + C_2H_5OH + H_2O + H_2 .$$

Questa reazione procede evidentemente in due tempi. Dapprima si forma l'etere etilico dell'acido suddetto, il quale in una seconda fase perde una molecola di alcool, dando origine al lattone. Come fu fatto rilevare da uno di noi in una Nota precedente [3], la formazione del lattone dimostra che nell'acido metilfenilossifenilpirazolcarbonico il gruppo ossifenile ed il carbossile si trovano rispettivamente nelle posizioni 3 e 4. Possiamo quindi rappresentare le due fasi della reazione fra l'etere acetoacetico e l'idrazone dell'aldeide salicilica, mediante gli schemi seguenti:

I.

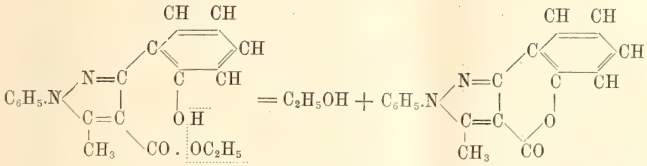


[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Sassari.

[2] Vedi fasc. precedente.

[3] Questi Rendiconti, vol. XIV, 2° sem. 1905, pag. 414.

II.



Lattone dell'acido
5-metil-1-fenil-3-ossifenilpirazol-4-carbonico

Descrizione delle esperienze.

In un palloncino da 50 cm³ si riscalda un miscuglio di 10 gr. di o-ossibenzalfenilidrazone e 10 gr. di etere acetoacetico con dei pezzetti di cloruro di zinco a 130-135° per un'ora circa. Verso 120° la massa si liquefà completamente ed a 130° incomincia un forte sviluppo di gas che dopo circa mezz'ora cessa quasi completamente. Il prodotto della reazione che si presenta come una massa semisolida, amorfa, rossobruna, viene mescolato ancora caldo con egual volume di alcool, riscaldando a b. m. fino ad avere una soluzione completa, che, versata in un bicchiere e lasciata a sè, si rapprende dopo alcune ore quasi completamente in una poltiglia di piccoli cristalli. Si filtra alla pompa, si lava ripetutamente con alcool e si ricristallizza il prodotto quasi bianco dall'alcool. La sostanza dopo un paio di cristallizzazioni dall'alcool fondeva a 178-180°; dopo cinque cristallizzazioni dall'alcool si raggiunse il punto di fusione costante 182-183°.

L'analisi diede i seguenti risultati:

I. gr. 0,2321 di sostanza fornirono gr. 0,6308 di anidride carbonica e gr. 0,0916 di acqua;

II. gr. 0,2060 di sostanza diedero gr. 0,5604 di anidride carbonica e gr. 0,0863 di acqua;

III. gr. 0,2386 di sostanza fornirono cm³ 21,3 di azoto misurati a 12° ed a 742 mm. di pressione.

In 100 parti:

	Calcolato per	Trovato		
	$C_{17}H_{12}O_2N_2$	I	II	III
Carbonio	73,91	74,12	74,18	—
Idrogeno	4,35	4,38	4,65	—
Azoto	10,14	—	—	10,34

Il lattone dell'acido 5-metil-1-fenil-3-ossifenilpirazol-4-carbonico cristallizza dall'alcool in aghi bianchi finissimi. È quasi insolubile in acqua

a freddo, pochissimo solubile in acqua bollente ed in ligroina: è poco solubile in alcool freddo, si scioglie bene in alcool caldo, in etere ed in benzolo; è solubilissimo in cloroformio ed in acetone. Il rendimento in prodotto puro è di circa 50 % del teorico. Dalle acque alcooliche primitive del lattone si ebbe, per distillazione dapprima a bagno maria e poi in corrente di vapore, un residuo scuro, resinoso, friabile, solubile in alcool ed in benzolo. Da queste soluzioni però non si separava nulla di cristallino. Solo estraendo a caldo con ligroina bollente sopra 100°, si ebbero piccole quantità di prodotto cristallino, che dal punto di fusione e dalle altre proprietà fu riconosciuto identico al lattone.

Per ottenere l'*acido 5-metil-1-fenil-3-ossifenilpirazol-4-carbonico* libero si riscaldano a b. m. per circa mezz'ora a ricadere 10 gr. di lattone con 200 cm^3 di potassa alcoolica al 10 %. Il lattone si scioglie facilmente con colorazione rosso-violetta intensa che rapidamente passa al giallo. Dopo alcuni minuti di riscaldamento si separa già a caldo una sostanza bianca, cristallizzata in lunghi aghi sottili e completamente solubile in acqua. Questa sostanza, costituita dal sale potassico dell'acido, viene filtrata alla pompa, lavata sul filtro con un po' di alcool e sciolta in acqua. Dalla soluzione acquosa per aggiunta di acido cloridrico diluito, precipita in fiocchi cristallini bianchissimi l'acido libero che fu purificato per cristallizzazione dall'alcool, da cui si separa in aghi sottili e bianchi.

All'analisi si ebbero i risultati seguenti:

I. gr. 0,3131 di sostanza diedero gr. 0,7978 di anidride carbonica e gr. 0,1369 di acqua;

II. gr. 0,2272 di sostanza fornirono cm^3 19,6 di azoto misurati a 21° ed a 744 mm. di pressione.

In 100 parti:

	Calcolato per $C_{17}H_{14}O_3N_2$	Trovato I	Trovato II
Carbonio	69,38	69,49	—
Idrogeno	4,76	4,85	—
Azoto	9,52	—	9,60

L'acido metilfenilossifenilpirazolcarbonico fonde a circa 160° con sviluppo di gas; è insolubile in acqua ed in ligroina anche a caldo, si scioglie bene in alcool ed in benzolo caldo, è solubilissimo in cloroformio, in acetone ed in etere. A differenza di altri acidi metilfenilpirazolcarbonici, i quali riscaldati al di sopra del loro punto di fusione perdono anidride carbonica trasformandosi nei corrispondenti metildifenilpirazoli [1], l'acido metilfenilossifenilpirazolcarbonico perde per riscaldamento a circa 200° una molecola d'acqua, trasformandosi nel lattone fusibile a 182°. La stessa trasformazione ha luogo riscaldando l'acido a b. m. con cloruro di benzoile.

[1] Ber. *18*, 932, 2257.

Chimica. — *Eterificazione del γ-piridone con diazoidrocarburi grassi* [1]. Nota di A. Peratoner ed E. Azzarello, presentata dal Socio E. Paternò.

È noto che molte ossipiridine non reagiscono sempre da composti ossidrilici, ma anche in una forma tautomera e cioè da chetodiidropiridine (piridoni):

	forme enoliche	forme chetoniche
α-derivato	CH — N = C-OH ‖ | CH — CH = CH	CH — NH — CO ‖ | CH — CH = CH
γ-derivato	CH — N = CH ‖ | CH — C(OH) — CH	CH — NH — CH ‖ ‖ CH — CO — CH

Così nella loro eterificazione, a seconda delle condizioni dell'esperienza, non si formano soltanto eteri con il radicale all'ossigeno (O-eteri), ma anche di quelli con il radicale alcoolico legato all'azoto (N-eteri); e precisamente H. v. Pechmann e Baltzer [2], per azione di ioduri alcoolici sul sale d'argento dell'α-ossipiridina, ottennero O-eteri:

CH — N = C-OCH_3 ‖ | CH — CH = CH	CH — N = C-OC_2H_5 ‖ | CH — CH = CH
α-metossipiridina	α-etossipiridina

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto chimico di Palermo. — Le presenti esperienze erano destinate a venir pubblicate fra una serie di ricerche sopra derivati dell'ossipirone, con cui stanno strettamente connesse e di cui soltanto una parte è già comparsa per le stampe (A. Peratoner, *Ricerche sull'ossipirone ed alcuni suoi derivati*. Parte I. — *Derivati non azotati*. Giorn. di Scienze Nat. ed Econ. di Palermo, vol. XXV, pag. 239), mentre un'altra attende di essere completata. Però vedendo annunziato nella copertina del fascicolo di agosto dei « Monatshefte für Chemie (pubblicato il 23 settembre 1905), un lavoro del sig. H. Meyer, *Ueber die Einwirkung von Diazomethan auf Pyridone und Oxypyridincarbonsäure*, riteniamo opportuno di rendere note fin da ora quelle esperienze che potrebbero forse essere analoghe, se non identiche, ad alcune del sig. H. Meyer, quantunque la priorità di questo argomento ci sia già stata precedentemente assicurata. Infatti una Nota preliminare delle esperienze attuali, per quanto non completate, fu comunicata alla Società chimica di Roma nella seduta del 10 aprile, 1904 (E. Azzarello, *Eterificazione del γ-piridone con diazometano ed -etano*) ed un cenno sui risultati definitivi ottenuti venne fatto ancora dal dott. Palazzo in una nota posta nel suo lavoro *Azione dell'idrossilamina sull'etere dimetilpirondicarbonico*, presentato nei primi del luglio 1905 a questa R. Accademia dei Lincei e pubblicato nei relativi Rendiconti vol. XIV, 2° sem. 1905, fasc. 4°, pag. 244.

[2] Berichte *24*-3147,

ed invece N-eteri per azione di ioduri alcoolici sull'α-piridone libero

N-metil — α-piridone N-etil — α-piridone

La stessa α-metossipiridina potè essere in seguito ottenuta da v. Pechmann eterificando l'α-piridone con diazometano [1], ed è notevole il fatto che in questa reazione non si forma traccia di N-etere.

Anche della γ-ossipiridina sono noti due eteri metilici isomeri

N-metil — γ-piridone γ-metossipiridina

però mentre il primo era già stato ottenuto da Haitinger e Lieben [2] in modo analogo nel quale poi Pechmann preparò l'N-etere dell'α-piridone, al secondo si era potuto giungere solo per via indiretta e cioè per azione di metilato sodico sulla γ-cloropiridina [3].

La grande analogia di comportamento che il γ-piridone mostra con l'isomero α, faceva prevedere che il primo dovesse reagire con i diazoidrocarburi grassi anche analogamente al secondo: per azione di diazometano e diazoetano sul γ-piridone avrebbero dovuto formarsi esclusivamente O-eteri. Ed invero le prime esperienze che uno di noi [4] istituì in questo senso sembravano di confermare tale assunto; senonchè, essendosi impiegata una quantità troppo esigua di prodotto di partenza (γ-piridone), il risultato non potè essere del tutto decisivo. È questa la ragione per cui noi abbiamo ripreso lo studio della cennata reazione, impiegando rilevanti quantità di sostanza e mettendoci in condizioni da poter esaminare tutti i prodotti della reazione. I risultati finali non hanno confermata la prima previsione, giacchè da diazometano e γ-piridone formasi bensì γ-metossipiridina, ma insieme a questa si forma anche N-metil — γ-piridone ed anzi in quantità prevalente. Anche impiegando diazoetano non è evitata del tutto la formazione di N-etere, quantunque il prodotto principale sia in questo caso l'O-etere.

(1) Berichte *28*-1624.
(2) Monatshefte für Chemie, *6*-307.
(3) Monatshefte für Chemie, loc. cit.
(4) E. Azzarello, Rendiconti Soc. chimica di Roma, seduta 10 aprile 1904.

Azione del diazometano.

In una soluzione eterea di diazometano (da 3 cm³ di nitroso metilcarbammato etilico) si sospende 1 gr. di piridone [1] secco polverizzato: tosto si ha un energico sviluppo di azoto che va diminuendo poco a poco e cessa nello spazio di circa un'ora. Si forma un denso olio bruno che, separato per svaporamento dall'eccesso di soluzione di diazoidrocarburo, si dimostra solubile in acqua ed alcool, ha reazione alcalina e contiene prodotto inalterato colorando ancora il cloruro ferrico. Disseccata la massa di reazione oleosa, proveniente da diverse preparazioni, su acido solforico e paraffina, venne dapprima, senz'altra depurazione, saggiata qualitativamente nell'apparecchio per la determinazione dell'ossimetile seguita da quella dell'N-metile col metodo di Herzig e Meyer [2]. Constatandosi che il prodotto conteneva tanto dell'ossimetile quanto azometile, si passò al dosaggio quantitativo di questi gruppi adoperando unica quantità di sostanza per entrambe le determinazioni. I tre prodotti analizzati provenivano da preparazioni differenti.

I. gr. 0,3007 di sost. fornirono gr. 0,1207 di AgJ (metodo Zeisel).
II. » 0,6231 » » » » 0,2528 + 0,5180 di AgJ (met. Herzig e Meyer)
III. » 0,5203 » » » » 0,1380 + 0,3624 » » » » »

	Trovato		
	I	II	III
— OCH_3 %	5,3	5,3	3,2
= NCH_3 %	—	9,9	8,5

Calcolando da questi dati la percentuale di prodotto eterificato, si viene alla conclusione che il γ-piridone si eterifica soltanto parzialmente e cioè nel rapporto di 46 % all'incirca. Questo risultato dal punto di vista quantitativo non è molto dissimile da quello ottenuto da Pechmann [3], il quale constatò che l'α-piridone neppure si eterifica completamente. Però mentre l'α-derivato reagisce col diazometano soltanto sotto la forma enolica dando esclusivamente l'etere ossimetilico, il γ-piridone in questa reazione si ha di

(1) Fu preparato svaporando ripetutamente (4-6 volte) a bagnomaria del pirone purissimo (dall'acido chelidonico) con eccesso di ammoniaca acquosa concentrata. Il prodotto che così ottenemmo era quasi puro e fu adoperato per le nostre ricerche solo dopo completa essiccazione nel vuoto su acido solforico.

(2) Berichte *27*-319; Monatshefte für Chemie, *15*-613 e *16*-599. Gli apparecchi necessarî, non riscontrandosi nei cataloghi ordinarî delle fabbriche di vetreria ad uso chimico, furono da noi fatti soffiare dai sigg. C. Kob & C. (Stützerbach) e dal sig. Anastasio Carosi (Roma).

(3) Berichte *28*-1625.

preferenza sotto la forma chetonica; infatti fornisce un miscuglio in cui trovasi il 16 % circa di O-etere (14 % del rendimento teorico) e il 35 % di N-etere (32 % del rendimento teorico).

Sulla separazione diretta dei due eteri isomeri formatisi, del resto conosciuti, non abbiamo insistito.

Azione del diazoetano.

A porzioni di soluzioni eteree di diazoetano (proveniente ciascuna da 5 cm³ di nitroso-etilcarbammato etilico) si aggiungeva ogni volta 1 gr. di piridone secco polverizzato: la reazione procedeva con maggiore energia e molto più rapidamente di quella descritta per il diazometano, ottenendosi anche qui alla fine un olio contenente pure O-etere ed N-etere. Il vivace sviluppo di azoto osservato nella reazione, e che in generale si verifica quando i diazoidrocarburi grassi reagiscono con prodotti di natura acida spiccata, faceva supporre di già che il risultato dovesse differire da quello avutosi con il diazometano relativamente alla quatità di O-etere generatosi. Ed infatti, disseccato nel vuoto il prodotto di reazione e sottopostolo direttamente ad analisi, grezzo così come si trovava, si ottennero i seguenti risultati:

I. gr. 0,1671 di sost. fornirono, col metodo dell'ossietile di Zeisel, gr. 0,2126 di AgJ;

II. gr. 0,5106 di sost., sottoposti secondo Herzig e Meyer alla determinazione dell'ossietile seguita da quella dell'azoetile, fornirono gr. 0,6503 + 0,0813 di AgJ;

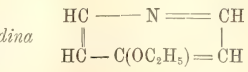
	Trovato	
	I	II
$-OC_2H_5$ %	24,3	24,4
$=NC_2H_5$ %	—	2,9

Calcolando da questi numeri le quantità di eteri contenuti nel prodotto greggio si ha:

appena 8 % di N-etere ed il 66 % di O-etere.

Da questo miscuglio inoltre fu agevole separare l'ossietilpiridina per semplice distillazione nel vuoto (a 15 mm. di pressione) essendo sostanza facilmente volatile. In tal modo si ricava quasi tutto il prodotto contenuto nel miscuglio primitivo.

La *γ-etossipiridina*



è un liquido incolore di odore piridico, bollente a 96° sotto la pressione di

15 mm., miscibile con alcool, non con acqua. Col metodo Zeisel fornì la quantità teorica di ossietile:

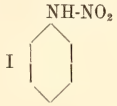
gr. 0,2100 di sost. diedero gr. 0,4010 di AgJ

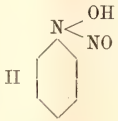
	Trovato	Calcolato per C_7H_9NO
$-OC_2H_5$ %	36,54	36,58

Per azione dell'acqua di bromo sulla soluzione alcoolica dell'etere si ha un precipitato voluminoso che, trattato con anidride solforosa, diviene quasi incoloro. Cristallizzata questa sostanza dall'acqua calda, si ebbe in piccoli aghi incolori, i quali, assai probabilmente, rappresentano un bromidrato di un derivato bromosostituito. Infatti la soluzione acquosa di idrato sodico ne eliminò acido bromidrico, mettendo in libertà un olio bromurato volatile, incoloro, estraibile con etere, che malauguratamente non potè essere analizzato.

Dalla presente ricerca si rileva che l'eterificazione del γ-piridone con *diazometano* non avviene secondo una regola generale osservata da v. Pechmann per quelle sostanze che presentano il fenomeno della tautomeria: secondo questo autore (1) si ottengono di preferenza i metilderivati di quelle forme che posseggono il carattere acido più forte. Si hanno perciò in generale gli O-teri, mentre la formazione di C- od N-eteri avviene solo di raro.

Eccezione a tale regola costituiva sinora solamente il comportamento di alcune nitramine (2), per le quali possono prendersi in considerazione le formule





Talune di queste sostanze reagiscono sotto la formula I che è certamente la meno acida. Un'ulteriore eccezione viene presentata ora dal γ-piridone il quale reagisce pure sotto la forma meno acida — la chetonica — ed anche in questa assai stentatamente con un mezzo così potente di eterificazione come il diazometano.

Non è privo d'interesse tener presente a questo riguardo che il γ-piridone non è affatto eterificabile con cloruro d'acetile o anidride acetica, che certamente sono reattivi assai più blandi (3).

(1) Pechmann e Degner. Berichte *30*-646.

(2) Ibidem.

(3) Vedi Roscoe-Schorlemmer, Lehrbuch der org. Chemie v. Brühl, ecc., V Theil 1899, pag. 154.

Il *diazoetano* sia in queste osservazioni, sia in altre fatte in questo laboratorio, mostra una energia di reazione superiore a quella del diazometano. Questo diazocomposto infatti è capace di eterificare il γ-piridone con un rendimento di molto superiore (53 % del teorico) a quello fornito dal diazometano, e per giunta si nota che in tale reazione il piridone si discosta di poco dalla regola del Pechmann fornendo quasi esclusivamente O-etere.

Botanica. — *Sui tubercoli radicali della Datisca cannabina L.* (1). Nota del dott. LUIGI MONTEMARTINI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

In una comunicazione fatta tre anni or sono alla Società Botanica Italiana (2) il dott. A. Trotter ha rilevato l'esistenza sulle radici di *Datisca cannabina*, a Padova, di speciali tubercoli che egli così descrive:

« Sono cilindrici, arrotondati all'estremità, lunghi 3-4 mm., 2 mm. circa « grossi. Tali tubercoli, che chiamerò semplici, non sono però i più comuni, « poichè d'ordinario, da uno stesso punto della radichetta se ne sviluppano « da 2 a 4, ed in questo caso o sono saldati per la loro base, divaricando « più o meno superiormente, o sono anche fusi in un'unica massa un po' « lobata alla sua estremità libera. Talora si possono anche presentare in agglo- « merazioni assai vistose, grandi quanto una noce e più, specialmente quando « si sviluppino dalle radichette laterali di vecchie e grosse radici ».

Per il loro modo di comportarsi, poichè scompaiono durante l'inverno e raggiungono le massime dimensioni in primavera, il Trotter ritiene queste formazioni analoghe ai tubercoli radicali delle Leguminose ed ammette trattarsi di un caso finora non mai visto di simbiosi simile osservata in piante non appartenenti a questa famiglia.

La interessante osservazione del Trotter viene integralmente riportata dal Lutz (3) nel suo recente lavoro sui microorganismi fissatori di azoto, senza aggiunta di altre osservazioni.

Lo studio morfologico, anatomico e biologico da me intrapreso su questi tubercoli, mi ha condotto invece a stabilire importanti differenze tra essi e quelli delle Leguminose.

Anzitutto i tubercoli della *Datisca* sono di origine nettamente radicale e si presentano quasi come le basi ipertrofiche di radici secondarie. Inoltre mentre nelle Leguminose l'ingrossamento è dovuto ad ipertrofia del tessuto midollare, nel quale si annidano i bacterî, con spostamento dei fasci libro-le-

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

(2) A. Trotter, *Intorno a tubercoli radicali di Datisca cannabina L.* (Bull. d. Soc. Bot. Italiana, 1902, pagg. 50-52).

(3) L. Lutz, *Les microorganismes fixateurs d'azote* (Paris, 1904).

gnosi verso la periferia, nella *Datisca* invece il cilindro centrale rimane pressochè intatto ed è il parenchima corticale che, per lo sviluppo dei microorganismi patogeni, diventa ipertrofico. Finalmente anche la struttura delle cellule nelle quali si annidano i bacterî è nella *Datisca* affatto diversa da quella delle cellule corrispondenti delle Leguminose, come avrò occasione di descrivere in maniera particolareggiata in un lavoro più completo.

Il microorganismo che vive nei tubercoli della *Datisca*, e che io ho esattamente studiato nel laboratorio di Anatomia Patologica di Pavia coll'aiuto del dott. R. Traina che qui vivamente ringrazio, si presenta esso pure diverso dal ben noto *Bacillus radicicola* delle Leguminose, sia all'esame diretto, sia alle colture nei mezzi ordinarî di nutrizione.

Riservandomi di caratterizzarlo completamente e denominarlo quando avrò ultimato alcune osservazioni di culture ed esperienze di inoculazione, ne descrivo qui i caratteri principali finora accertati:

Aspetto microscopico. Sono grossi e robusti bastoncini, lunghi 4-5 μ su 0,8-1 μ di spessore, rotondeggianti alle estremità, spesso disposti in catene di 2-3 membri e raramente di più (sempre però nettamente distinti l'uno dall'altro), talvolta anche disposti in posizioni angolari o parallele.

Colorabilità. Si colorano con tutti i colori comuni di anilina, meglio però col violetto di genziana secondo la formola di Ehrlich. Certi punti del loro corpo manifestano una affinità più pronunciata riguardo alle sostanze coloranti (endospore?).

Intensità di sviluppo rispetto ai substrati nutritizi ed alla temperatura. Crescono bene, ma molto lentamente, nei comuni terreni nutritivi; meglio però in un terreno composto di infuso di radici e altri organi di *Datisca* con gelatina al 10 %. L'accrescimento è molto stentato nei primi giorni, tanto che 4-5 giorni dopo l'innesto non si vede sviluppo alcuno: in seguito la coltura comincia a dar segno di vita e raggiunge lo sviluppo massimo in 15 a 20 giorni. Riguardo alla temperatura, basta quella dell'ambiente, però in termostato l'accrescimento è più rapido: l'optimum si ha tra 25° e 30° C.

Coltura in agar. Con *infissione*, lo sviluppo è molto lento e superficiale, cioè non solo nel punto di penetrazione dell'innesto, ma anche tutt'attorno nella superficie libera. Lungo il canale d'infissione si ha sviluppo assai scarso, sotto forma di sottili barbe o ciglia parallele, ora più ora meno lunghe, ma che vanno diminuendo dall'alto al basso.

Con *striscio*, lo sviluppo non rimane limitato al punto o alla linea di innesto, ma si estende su quasi tutta la superficie libera dell'agar restando quasi sempre libera la parte superiore (forse perchè più secca). Anche qui l'accrescimento è assai lento nei primi giorni, piuttosto rapido in seguito, e dopo 15 o 20 giorni si osserva sull'agar una patina poco elevata (più spessa però nella parte centrale, corrispondente alla striscia d'innesto), a margini

assai irregolari, sinuosi, frastagliati, come fatti da corti fili di bambagia, di aspetto sempre opaco, di colore bianco grigiastro senza riflessi, di consistenza mucilaginosa. L'acqua di condensazione è torbida, con abbondante precipitato fiocconoso.

Coltura in gelatina. L'*infissione* in gelatina con infuso di *Datisca* dà uno sviluppo abbastanza rigoglioso in superficie e lungo il canale d'innesto. Dopo 15-20 giorni si osserva fusione della gelatina superficiale a guisa di coppa, e la fusione procede in seguito gradatamente verso le parti più profonde, sì che la coppa si trasforma in imbuto; poi il fenomeno continua anche oltre il canale d'innesto, di guisa che dopo un paio di mesi si ha la liquefazione di tutta la gelatina contenuta nella provetta.

L'*infissione* in gelatina con brodo di carne dà invece uno sviluppo più lento e limitato al canale d'innesto, da cui si dipartono sottili filamenti laterali a guisa delle barbe di una penna d'oca. Questi filamenti sono assai sottili, tenui e bianchicci. Non si ha fusione della gelatina.

Coltura in brodo. Dà sedimento abbondante, fiocconoso, di colore giallastro scuro, mentre il brodo resta quasi limpido, con una sottile nubecola in sospensione.

Coltura su patata. Patina sottile, poco rilevata e poco evidente, di colore bianco grigiastro, con margine irregolare, finamente dentellato.

Piastra in agar. Ad occhio nudo, si osservano colonie superficiali puntiformi, rotondeggianti, poco lucide e poco rilevate, di colore bianchiccio quasi trasparenti, sì da confondersi colla superficie dell'agar. Si hanno anche colonie profonde, ma poco evidenti, rotondeggianti o, di raro, a cote.

Ad un ingrandimento di 50 diametri, si osservano colonie superficiali rotondeggianti, a margini irregolari ma netti e come formati da tanti segmenti di cerchio, di colore giallo carico tendente all'arancio. La zona marginale è formata da blocchi più grossi e più intensamente colorati, ma a contorno liscio, uniforme, senza prolungamenti. Le colonie profonde sono assai scarse, rotondeggianti, press' a poco cogli stessi caratteri di quelle superficiali, più chiare.

V. C.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1906). Fasc. 2°. 1° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 7°-8°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-V.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 gennaio 1906.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Peano. Sulle differenze finite . . . . . Pag. 71
Pizzetti. Intorno al calcolo della rifrazione astronomica, senza speciali ipotesi sul modo di variare della temperatura dell'aria coll'altezza . . . . . » 73
Pacinotti. Circa alle influenze della temperatura, delle vibrazioni, della umidità, dell'elettrolisi, e della untuosità, sull'adesione e sull'attrito nello sfregamento fra vari corpi, e sul lavoro di alcuni aratri; riassunto di appunti sperimentali . . . . . » 82
Viola. La trasformazione delle coordinate dei cristalli . . . . . » 89
Mosso. Crani preistorici del Foro Romano (**) . . . . . » 98
Nielsen. Sur le développement en fraction continue de la fonction Q de M. Prym. (pres. dal Socio *Dini*) . . . . . » »
Boggio. Sulla deformazione di un ellissoide elastico (pres. dal Corrisp. *Somigliana*) . . » 104
Magri. Sulla radioattività dei fanghi termali depositati dalle acque degli Stabilimenti dei Bagni di Lucca (Toscana) (pres. dal Corrisp. *Battelli*) . . . . . » 111
Chella. Misura del coefficiente di attrito interno dell'aria a basse temperature (pres. *Id.*). » 119
Chistoni. Risultati pireliometrici ottenuti dal 22 agosto a tutto giugno 1903 al R. Osservatorio Geofisico di Modena (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . . . » 126
Id. Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1902 e nell'estate del 1903 (pres. *Id.*) . . . . . » 133
Clerici. Delle sabbie fossilifere di Malagrotta sulla via Aurelia (pres. dal Socio *Cerruti*) » »
Minunni e *Lazzarini*. Sull'acido 5-metil-1-fenil-3-ossifenilpirazol-4-carbonico ed il suo lattone (pres. dal Socio *Paternò*) . . . . . » 136
Peratoner e *Azzarello*. Eterificazione del γ-piridone con diazoidrocarburi grassi (pres. *Id.*) . » 139
Montemartini. Sui tubercoli radicali della Datisca cannabina (pres. dal Socio *Pirotta*) » 144

ERRATA-CORRIGE

A pag. 75, lin. 6 a. f. la formula $\frac{p}{p_0} = \frac{p}{p_0}$, deve correggersi in $\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}$.

» 78, lin. 3, il primo membro della formula $\int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - c^2}}$ deve correggersi in $\int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.
(**) Questa Memoria sarà pubblicata nelle *Notizie degli Scavi*.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. *Roma 4 febbraio 1906.* **N. 3.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 febbraio 1906.

Volume XV.° — Fascicolo 3°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. – *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. – *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. – *c*) Con un ringraziamento all'autore. – *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 febbraio 1906.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Osservazioni delle comete 1905 b e 1906 a fatte all'equatoriale di 39 cm. dell'Osservatorio astronomico al Collegio Romano.* Nota del Socio E. Millosevich.

Nella seduta del 3 dicembre u. s. ho comunicato all'Accademia le prime osservazioni della cometa Schaer (1905 *b*) fino al 2 dicembre 1905. Aggiungo qua tutte le altre osservazioni sulla prefata cometa fino all' invisibilità coll'equatoriale di 39 cm.

T. m. R.C.R.				α apparente cometa	δ apparente cometa
1905 dic. 3	$9^h30^m39^s$			$23^h30^m\ 8^s.39$ (9. 467)	+ 0°39′14″.2 (0.763)
» 13	6	0	20	23 31 32. 44 (7^n.925)	— 9 18 43. 2 (0.835)
» 14	6	5	8	23 31 49. 61 (8. 436)	— 9 53 39. 5 (0.838)
» 15	6	17	17	23 32 9. 37 (8. 763)	— 10 25 35. 1 (0.841)
» 18	6	9	17	23 33 11. 34 (8. 645)	— 11 47 5. 7 (0.849)
» 21	6	26	57	23 34 23. 07 (8. 996)	— 12 52 21. 7 (0.853)
» 24	6	19	26	23 35 40. 23 (9. 022)	— 13 45 17. 9 (0.857)

Della nuova cometa 1906 *a* do qua le due prime posizioni, la seconda delle quali spetta al dott. Emilio Bianchi.

1906 febbr. 1	$9^h55^m27^s$	$16^h13^m48^s.65$ (9^n.676)	+ 56°39′ 9″.6 (0.882)
» 2	9 46 58	16 12 8. 45 (9^n.691)	+ 58 31 14. 7 (0.880)

Fisica. — *Resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza.* Nota del Corrispondente A. Battelli.

La resistenza elettrica dei conduttori metallici non è fisicamente determinata se non quando sia preventivamente assegnata la legge con cui la corrente elettrica si distribuisce nei varî punti del conduttore medesimo.

Tale distribuzione varia notevolmente col variare del carattere della corrente; ma la legge che sovrasta a siffatte variazioni non si conosce bene se non nel caso di un ordinario conduttore rettilineo a sezione circolare.

Questo caso si presenta assai di rado nelle ricerche sperimentali, dove il più delle volte si richiede che il circuito abbia una considerevole energia magnetica, e si adoperano perciò conduttori avvolti a solenoidi. Per tali conduttori, in un precedente lavoro [1] da me pubblicato insieme col dott. Magri, abbiamo avuto occasione di osservare che la distribuzione della corrente nello spessore del filo differisce moltissimo da quella che vale per i conduttori medesimi distesi in linea retta.

Noi ci siamo accorti di ciò facendo passare delle correnti di alta frequenza attraverso un solenoide ed un conduttore rettilineo disposti in serie; si misurava le quantità di calore che si svolgevano nei due conduttori e il loro rapporto ci esprimeva il rapporto fra le resistenze elettriche dei conduttori per quelle date correnti.

Si trovò costantemente che per correnti oscillatorie la resistenza di un solenoide, fatto con un filo di spessore non estremamente piccolo, è sempre maggiore di quella che avrebbe lo stesso filo se fosse disteso in linea retta; la differenza cresce col crescere della frequenza delle correnti, ed è tanto più rilevante quanto maggiore è lo spessore del filo e quanto più piccolo è il passo della spirale.

Se ne concluse che, mentre in un conduttore rettilineo le correnti alternate non passano che per un sottile strato superficiale, quando lo stesso conduttore è avvolto a spirale viene accresciuta la porzione di conduttore che non prende parte al passaggio delle correnti, ossia viene ancor più diminuita la sezione utile del conduttore.

Posteriormente i nostri risultati sono stati confermati dal Dolazelek [2], il quale indipendentemente dalle nostre osservazioni, occupandosi di misure di coefficienti di autoinduzione di alcuni rocchetti per correnti della frequenza di 300 oscillazioni per secondo, notò che la resistenza di tali rocchetti era

[1] Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, *2*, 51, pag. 371, 1902.
[2] Ann. d. Phys., 12, pag. 1142, 1903.

maggiore di quella che essi presentavano per correnti continue, ed attribuì questo aumento a correnti di Foucault ed a difetti di uniformità della distribuzione della corrente nella sezione del filo.

Più tardi il Wien [1] discutendo i risultati del Dolazelek mostrò che, conformemente a ciò che era stato già da noi stabilito, questi aumenti di resistenza non erano attribuibili a difetti di uniformità calcolabili in base alle leggi già note per i conduttori rettilinei.

Egli stesso propose un'interpretazione teorica dei risultati del Dolazelek, e le sue formule finali concordano assai bene con le esperienze, purchè queste siano fatte con rocchetti a parecchi strati di filo; lo dimostrano le misure fatte a tal uopo dal Dolazelek, le quali sono state spinte fino a frequenza di 3000 alternanze per secondo.

Il caso di un solenoide ad un solo strato di spire — caso importantissimo per la pratica, specialmente quando, lavorando con correnti di alta tensione, è sopratutto necessario non compromettere il buon isolamento fra le varie parti dello stesso conduttore — è stato trattato a parte dal Wien; egli è venuto alla conclusione che la resistenza R per correnti di frequenza N è data da una serie del tipo

$$R = R_0 + aN^2 - bN^4 - cN^6 - \dots \tag{1}$$

dove R_0 è la resistenza per correnti continue, $a, b, c \dots$ sono costanti che dipendono dallo spessore del filo e dal passo del solenoide.

Il calcolo effettivo di tali costanti è molto laborioso, tanto che il Wien stesso si è contentato di trovare soltanto il valore della prima di esse: ciò costituisce un primo inconveniente della trattazione del Wien, tanto più che per alti valori di N, specialmente se la grossezza del filo non è molto piccolo, la serie (1) converge così lentamente che si deve assolutamente rinunziare a calcolare R, sia pure con approssimazione molto grossolana. Infatti il Wien applicando il suo calcolo ad un solenoide fatto con un filo di rame della grossezza di 2 mm. e del passo di 2,12 mm. trovò risultati molto discordanti con l'esperienza; ed invero i valori da lui calcolati per le variazioni di resistenza che avrebbero dovuto manifestarsi nel solenoide — quando in esso alla corrente continua si sostituiscano correnti alternate di frequenza variabile fra 4000 e 8000 alternanze per secondo — risultarono quasi il doppio di quelli che forniscono direttamente le esperienze.

Indipendentemente da questo inconveniente, che fu rilevato dal Wien stesso, la serie (1) non può fornire un valore sufficientemente esatto di R, perchè nei ragionamenti fatti dal Wien per stabilirla è supposto implicitamente che la distribuzione della corrente nella sezione del filo sia uniforme in tutti i punti che si trovano alla stessa distanza dall'asse del solenoide,

[1] Ann. d. Phys., 14, pag. 1, 1904.

cioè sopra i punti di un cilindro coassiale col solenoide. Infatti il Wien immagina il solenoide scomposto in sottili solenoidi elementari con tagli fatti mediante superficie cilindriche coassiali, due delle quali sono rappresentate in sezione dalle due rette AB infinitamente vicine (fig. 1), ed ammette che, indicando con r il raggio medio CD della spirale, con x_1 ed $x_1 + dx_1$ le distanze delle due rette AB dal centro D della sezione, con 2ϱ lo spessore del filo e con σ la resistenza specifica del conduttore, la resistenza di m spire di tale solenoide elementare sia data da

$$\sigma m \frac{2\pi(r + x_1)}{2\sqrt{\varrho^2 - x_1^2} \times dx_1},$$

cioè, dalla stessa espressione che rappresenta la resistenza di quel solenoide elementare per correnti continue.

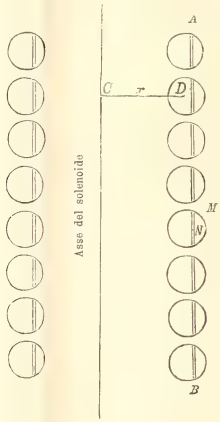


Fig. 1.

Ora è presumibile che, come nel caso di un conduttore rettilineo la corrente tende a localizzarsi alla superficie del conduttore, così pure nel caso presente la densità della corrente sia maggiore nei punti M, che sono in prossimità della superficie del conduttore, anzichè in quelli N, che sono nell'interno, ossia che anche nel caso di un solenoide si presenti, oltre al fenomeno studiato dal Wien, un fenomeno analogo allo *skineffekt* dei conduttori rettilinei; per effetto di esso la resistenza dei solenoidi elementari con-

siderati dal Wien non può ritenersi come una quantità indipendente dalla frequenza delle correnti. L'ipotesi del Wien richiederebbe che il campo magnetico avesse lo stesso valore sia in N che in M, ossia che in questi due punti M ed N fosse trascurabile il campo magnetico H_1 dovuto alla corrente che circola soltanto nella spira a cui appartiene M, rispetto al campo magnetico H dovuto all'intero solenoide. Ora si ha approssimativamente per H il valore

$$H = \frac{4\pi m i}{c},$$

dove m è il numero delle spire, c la lunghezza del solenoide ed i l'intensità della corrente.

Invece per H_1, facendo astrazione dalla non uniformità della distribuzione della corrente nella sezione del conduttore, si ha nei punti posti come M alla superficie del conduttore

$$H_1 = \frac{2i}{\varrho},$$

e quindi

$$\frac{H_1}{H} = \frac{c}{2\pi m \varrho}.$$

Ora, non essendo mai le spire in contatto le une con le altre, si ha che il diametro del conduttore è minore del passo della spirale, ossia

$$2\varrho < \frac{c}{m},$$

e quindi

$$\frac{H_1}{H} = \frac{1}{2\varrho}\frac{c}{\pi m} > \frac{m}{c}\frac{c}{\pi m}$$

cioè

$$\frac{H_1}{H} > \frac{1}{\pi};$$

si vede da ciò che non è affatto lecito trascurare H_1 rispetto ad H.

Per queste ragioni la trattazione del Wien non risolve affatto il problema della determinazione della resistenza di un solenoide per correnti di alta frequenza.

Più recentemente il Sommerfeld [1] ha ripreso lo stesso problema, passando dal caso dei solenoidi usuali formati da spire distinte l'una dall'altra, a quello di un solenoide ideale costituito da un tubo vuoto internamente e in cui la corrente sia obbligata a descrivere linee circolari aventi per asse

[1] Ann. d. Phys., 15, pag. 673, 1904.

l'asse del tubo; tale solenoide potrebbe in certo modo essere realizzato con un filo a sezione rettangolare anzichè circolare, avvolgendo tale filo sopra un tubo isolante in modo che ogni spira stia quasi a contatto con quelle adiacenti.

Il Sommerfeld suppone addirittura ridotto a zero lo spazio compreso tra una spira e l'altra, ammette che nello spazio compreso fra le due superficie cilindriche fra cui è compreso il tubo esistano da per tutto, il campo magnetico, la densità della corrente e le loro derivate prime e seconde rispetto agli assi coordinati, ed applica a queste quantità le note equazioni di Maxwell facendo astrazione dalle correnti di spostamento.

Se si tiene presente che in questo caso le linee di forza magnetica sono rette parallele al tubo e le linee di corrente sono cerchi coassiali col tubo, mentre nel caso dei conduttori rettilinei si ha proprio la disposizione inversa, si capisce che, essendo d'altra parte le equazioni del Maxwell di aspetto simmetrico rispetto al campo magnetico ed alla densità della corrente elettrica, l'integrazione delle equazioni relative al caso di questo solenoide debba potersi fare, scambiando i simboli, con funzioni analoghe a quelle che servono per i conduttori rettilinei; e difatti il Sommerfeld, analogamente al noto risultato ottenuto dal Thomson nel cercare l'espressione della densità della corrente, trova che l'espressione generale del campo magnetico in un punto qualsiasi è una combinazione lineare ed omogenea delle due funzioni di Bessel di ordine zero ed il cui argomento è proporzionale al prodotto della distanza del punto dall'asse della spirale, per la frequenza delle correnti e per la resistenza specifica del conduttore.

Servendosi di sviluppi approssimati delle funzioni di Bessel, egli calcola la resistenza per alte e per basse frequenze di una porzione anulare del tubo (fig. 2) compresa fra due piani AB, CD, la cui distanza sia uguale alla grossezza delle pareti del tubo; tale porzione costituisce perciò una spira a sezione quadrata.

La resistenza di tale spira cresce colla frequenza, perchè la corrente tende ad invadere solo la parte della spira più vicina all'asse del solenoide, ed il Sommerfeld volle confrontare tali variazioni calcolate con quelle che risultano dalle nostre esperienze e da quelle del Wien. Per stabilire il confronto egli immagina le nostre spire a sezione circolare sostituite con spire a sezione quadrata con sezione di eguale area, ma trova che il valore calcolato risulta sempre assai diverso da quello misurato (il primo risulta quasi doppio del secondo).

La giustificazione che egli indica per tale discordanza è la seguente che: « der quadratische Querschnitt bietet auch bei gleichem Flächeninhalt dem nach der Innenseite konzentrierten Strom *mehr* Fläche dar als der kreisformige (fig. 3). Die Wärmeentwikelung und daher auch die Widerstandserhöhung wird somit bei der in der Rechnung zugrunde gelegten Querschnittsform grosser (!!) sein, als bei der Messung ». A me pare che qui il

Sommerfeld sia caduto in una svista; la ragione da lui addotta conduce proprio alla conseguenza opposta di quella a cui egli vorrebbe arrivare, essendo logico che con l'aumentare della sezione debba diminuire anzichè aumentare la resistenza del conduttore.

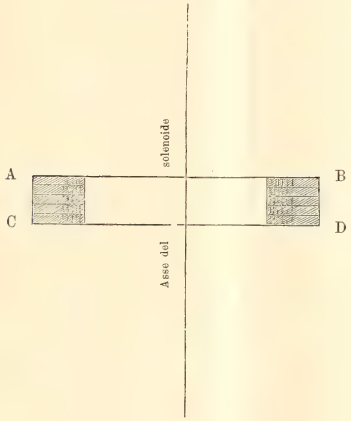


Fig. 2.

Certamente è inoppugnabile che la ragione delle discordanze tra i risultati del Sommerfeld e le esperienze debba ritrovarsi nel fatto che un

Fig. 3.

ordinario solenoide fatto con filo a sezione circolare, si comporta differentemente che un solenoide del genere di quelli considerati dal Sommerfeld costruibile con filo a sezione quadrata ed a spire ciascuna in contatto con le due adiacenti; la sola condizione che i fili dei due solenoidi abbiano sezioni di uguale area è infatti insufficiente a legittimare la supposta identità di comportamento dei due solenoidi.

Ma oltre alla differenza di forma delle due sezioni, si deve qui tener presente che nel caso di un ordinario solenoide due altre circostanze complicano il fenomeno; infatti non solo — come si è già dovuto osservare a proposito del lavoro del Wien — viene a mancare l'ipotesi fondamentale ammessa dal Sommerfeld, cioè che in vicinanza di ciascuna spira il campo magnetico sia dappertutto diretto secondo l'asse del solenoide e sia perciò trascurabile il campo magnetico vorticoso dovuto alla spira medesima, ma è anche naturale pensare che le variazioni di resistenza in istudio devono essere influenzate dalla maggiore o minore distanza fra due spire adiacenti.

Il Sommerfeld ritiene che dal caso del solenoide fatto con filo a sezione quadrata, possa passarsi a quello di un solenoide fatto con filo a sezione circolare moltiplicando per un fattore costante γ i valori da lui calcolati come aumenti di resistenza del primo solenoide; e valendosi di pochi risultati sperimentali riferiti dal Wien e di una serie delle misure calorimetriche da noi fatte nel lavoro sopra citato, afferma che tale fattore può ritenersi realmente costante e che approssimatamente ha il valore $\gamma = 0{,}6$.

In particolare tale fattore è, secondo il Sommerfeld, indipendente dal valore del passo del solenoide, ciò che non solo sembra a priori molto strano, ma è anche contradetto dalle esperienze che noi abbiamo fatto in proposito [1].

Il problema in quistione è reso ancor più difficile dalla circostanza che a priori non si può nemmeno stabilire con precisione quale sia la direzione della corrente nei varî punti del conduttore che è avvolto a solenoide. Infatti si concepisca il solenoide come se fosse generato da un cerchiettino di sezione uguale a quella del conduttore adoperato, il quale cerchiettino venga fatto scorrere in modo che il suo centro descriva un'elica ed il piano del medesimo si mantenga sempre normale alla tangente a detta elica; allora sembra naturale ammettere che ogni punto del cerchiettino descriva una *linea di corrente*, cioè una linea in ogni punto della quale la direzione della tangente coincida con la direzione della corrente. Ora noi ci siamo fatti questa ipotesi e l'abbiamo sviluppata in calcoli di cui qui sotto riferisco i risultati. Essi dimostrano che l'ipotesi stessa non è conciliabile con le equazioni della elettrodinamica, le quali porterebbero alla conclusione che la distribuzione della corrente nella sezione del conduttore, e quindi anche la resistenza del medesimo, dovrebbero essere indipendenti dalla frequenza delle correnti alternate adoperate.

Infatti si sa che indicando con u, v, w le tre componenti della densità della corrente secondo tre assi coordinati cartesiani, con t il tempo, con c la conducibilità specifica del conduttore e con

$$\Delta_2 f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2}$$

[1] Phys. Mag., 5, pag. 28, 1903; Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, 51, pag. 235, 1902.

il noto parametro differenziale secondo di una funzione qualsiasi f, è richiesto dall'elettrodinamica che si abbia

$$\Delta_2 u = 4\pi c \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

$$\Delta_2 v = 4\pi c \frac{\partial v}{\partial t} \tag{2}$$

$$\Delta_2 w = 4\pi c \frac{\partial w}{\partial t} \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Essendo nota la direzione del vettore *densità di corrente*, si indichino con α, β, γ i coseni di direzione del medesimo e si ponga per brevità $\Phi = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, cioè si indichi con Φ la grandezza del vettore medesimo. Allora

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \alpha\Phi \\ v &= \beta\Phi \\ w &= \gamma\Phi. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Si prenda adesso l'equazione (1) e si osservi che

$$\Delta_2(\alpha\Phi) = \alpha\Delta_2\Phi + 2\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\} + \Phi\Delta_2\alpha;$$

la quantità racchiusa entro parentesi nel secondo membro non è altro che il parametro differenziale misto delle due funzioni α e Φ. Rappresentandolo col noto simbolo ∇ si ha:

$$\Delta_2(\alpha\Phi) = \alpha\Delta_2\Phi + 2\nabla(\alpha\Phi) + \Phi\Delta_2\alpha.$$

Operando in modo analogo sui primi membri delle (2) e (3), si vede che il gruppo di equazioni (1), (2), (3), (4) si trasforma nel sistema di equazioni

$$\alpha\Delta_2\Phi + 2\nabla(\alpha, \Phi) + \Phi\Delta_2\alpha = 4\pi c\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{6}$$

$$\beta\Delta_2\Phi + 2\nabla(\beta, \Phi) + \Phi\Delta_2\beta = 4\pi c\beta\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{7}$$

$$\gamma\Delta_2\Phi + 2\nabla(\gamma, \Phi) + \Phi\Delta_2\gamma = 4\pi c\gamma\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{8}$$

$$\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \Phi\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right\} = 0. \tag{9}$$

Moltiplicando la (6) per γ e la (8) per $-\alpha$ e sommando si ottiene una equazione in cui riescono eliminate simultaneamente le espressioni $\Delta_2\Phi$ e $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$.

Analogamente si può operare sulla (7) e (8); si ottengono così le due equazioni

$$\gamma F(\alpha, \Phi) - \alpha F(\gamma, \Phi) + \frac{\Phi}{2}(\gamma\Delta_2\alpha - \alpha\Delta_2\gamma) = 0 \tag{10}$$

$$\gamma F(\beta, \Phi) - \beta F(\gamma, \Phi) + \frac{\Phi}{2}(\gamma\Delta_2\beta - \beta\Delta_2\gamma) = 0, \tag{11}$$

Se a queste equazioni viene associata la (9) e si dividono tutti i termini per Φ, si ottiene

$$\alpha\frac{\partial \log\Phi}{\partial x} + \beta\frac{\partial \log\Phi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial \log\Phi}{\partial z} = -\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right\} \tag{12}$$

$$\gamma F(\alpha, \log\Phi) - \alpha F(\gamma, \log\Phi) = \tfrac{1}{2}\{\alpha\Delta_2\gamma - \gamma\Delta_2\alpha\} \tag{13}$$

$$\gamma F(\beta, \log\Phi) - \beta F(\gamma, \log\Phi) = \tfrac{1}{2}\{\beta\Delta_2\gamma - \gamma\Delta_2\beta\}. \tag{14}$$

Queste equazioni sono generali e valgono qualunque siano i valori dei coseni di direzione α, β, γ e qualunque sia la forma del conduttore in esame. Esse inoltre valgono sia per correnti continue che per correnti variabili, purchè sia soddisfatta l'ipotesi che la direzione delle linee di corrente sia invariabile col tempo. Esse in varî casi si riducono ad identità, ed allora non giovano per la risoluzione del problema a cui si riferiscono.

Così per es. nel caso di conduttori cilindrici, se la corrente ha la direzione dell'asse delle z, si ha:

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 1,$$

ed allora le equazioni (13) e (14) diventano identicamente soddisfatte, e la (12) dà

$$\frac{\partial \log\Phi}{\partial z} = 0;$$

questa eguaglianza esprime che lungo una linea di corrente, la grandezza della densità di corrente è costante, cosa che era ben naturale prevedere.

Nel caso di un solenoide, si supponga come già è stato sopra indicato, che esso sia generato da un cerchiettino in moto. Tale cerchio sia quello rappresentato dalla figura 4, in dimensioni molto ingrandite; in essa siano x_1 ed x_2 le coordinate polari di un punto M qualsiasi e sia x_3 la lunghezza dell'arco descritto dal centro O del cerchio a partire da un punto fisso A.

Il solenoide generato col movimento del cerchio sia quello rappresentato dalla figura 5; lo si riferisca ad una terna di assi ortogonali di cui l'asse

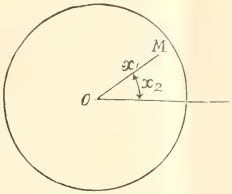


Fig. 4.

delle z coincida con l'asse del solenoide e l'asse delle x passi per il punto A a partire dal quale si contano le lunghezze degli archi x_3.

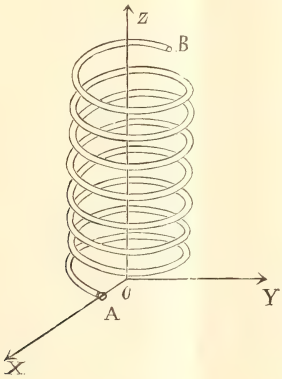


Fig. 5.

Allora la linea di corrente descritta dal punto M è rappresentata dalle equazioni:

$$
(15) \qquad \begin{cases} x = (r + x_1 \cos x_2) \cos \dfrac{2\pi}{S} x_3 \\ y = (r + x_1 \cos x_2) \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{S} x_3 \\ z = \dfrac{p}{S} x_3 + \dfrac{2\pi r}{S} x_1 \operatorname{sen} x_2 , \end{cases}
$$

dove le costanti r, p, S caratterizzano l'elica descritta dal centro O del cerchio e rappresentano rispettivamente la distanza fra i punti della medesima e l'asse Oz, il passo dell'elica e l'arco della medesima compreso fra due posizioni successive del punto O distanti di un passo intero; queste tre costanti sono legate dalla relazione $S = \sqrt{4\pi^2 r^2 + p^2}$.

Col variare del parametro x_3 dal valore 0 al valore l, dove l è la lunghezza del filo di cui è formato il solenoide, le formule precedenti danno le coordinate dei varî punti di una determinata linea di corrente; tutte le linee di corrente comprese entro il solenoide si ottengono facendo variare indipendentemente l'uno dall'altro i due parametri x_1 ed x_2 il prima fra 0 e a dove a è il raggio della sezione del filo e il secondo fra 0 e 2π.

Messe le cose in questo modo, è naturale ammettere che per qualunque valore di x_1, x_2, x_3 compreso entro i limiti sopra definiti — eccetto tutto al più per $x_1 = a$ — esistano sempre la funzione Φ e le sue derivate rispetto ad x_1, x_2, x_3.

Quanto ai coseni di direzione della linea di corrente descritta da M, essi sono:

$$(16) \qquad \begin{cases} \alpha = k \dfrac{\partial x}{\partial x_3} \\ \beta = k \dfrac{\partial y}{\partial x_3} \\ \gamma = k \dfrac{\partial z}{\partial x_3}; \end{cases}$$

dove

$$(17) \qquad k = \frac{S}{\sqrt{4\pi^2 (r + x_1 \cos x_2)^2 + p^2}}.$$

Con tali ipotesi riesce agevole verificare che il secondo membro della (12) è identicamente nullo; l'equazione medesima diventa allora:

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_3} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_3} + \frac{\partial \log \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_3} = 0,$$

ossia

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial x_3} = 0;$$

questa equazione esprime, come era ben naturale prevedere, che lungo ogni linea di corrente la densità della corrente è costante.

Per vedere come si trasformano le equazioni (13) e (14), basta applicare le formule generali che servono al calcolo dei parametri differenziali secondo e misto in coordinate curvilinee qualsiasi. A tal uopo differenziando le (16) si calcoli l'espressione

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

e si ponga per brevità

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$

$$= a_{11} d_1 x^2 + a_{22} dx_2^2 + a_{33} dx_3^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + 2a_{13} dx_1 dx_3 + 2a_{23} dx_2 dx_3,$$

si chiami a il discriminante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ed A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} nel discriminante a, diviso per a stesso. Allora il parametro differenziale secondo di una funzione qualsiasi f ed il parametro differenziale misto di due funzioni f ed f', si esprimono con le formule

$$\Delta_2 f = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\sum_r \sqrt{a}\, A_{rs} \frac{\partial f}{\partial x_r} \right]$$

$$\nabla(f, f') = \sum_{r,s} A_{r,s} \frac{\partial f}{\partial x_r} \frac{\partial f}{\partial x_s}.$$

Applicando queste formule alle equazioni (13) e (14), con lunghe ma assai semplici trasformazioni che io qui tralascio di riportare, si trova che il sistema di quelle due equazioni si può risolvere rispetto a $\frac{\partial \log \Phi}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial \log \Phi}{\partial x_2}$, e si ottengono così due equazioni del tipo:

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \Phi}{\partial x_1} = X_1(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial \log \Phi}{\partial x_2} = X_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

Le funzioni X_1, X_2 sono tali che risulta identicamente soddisfatta la nota condizione di integrabilità:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1};$$

perciò il sistema delle equazioni (18) è integrabile e fornisce una equazione del tipo:

$$\log \Phi = F(x_1, x_2) + C,$$

dove C è una costante rispetto ad x_1, x_2 ed x_3, e perciò è in generale una funzione di t. Ne segue che Φ è della forma:

$$\Phi = \varphi(t) \cdot \psi(x_1, x_2),$$

il che appunto dimostra che la distribuzione della corrente dovrebbe risultare indipendente dalla specie di corrente adoperata.

Da queste sommarie considerazioni risulta che lo studio teorico della resistenza dei solenoidi per correnti variabili è molto più complesso di quanto appare dai riferiti lavori del Wien e del Sommerfeld, i cui risultati teorici non sembrano ancora suscettibili di una pratica applicazione.

Paleontologia. — *Fossili turoniani della Tripolitania.* Nota del Corrispondente C. F. Parona.

Il prof. P. Vinassa de Regny, riferendo sui risultati di un viaggio in Tripolitania [1], fra le altre interessanti notizie, accennò al rinvenimento di alcuni fossili cretacei in un calcare compatto giallastro di Tarahuna presso Homs (Tripolitania settentrionale), che provvisoriamente attribuì al Cretaceo superiore. Questi fossili egli volle offrirmeli in esame, con atto di cortesia pel quale io gli sono obbligatissimo, ed in questa comunicazione intendo appunto di riassumere le conclusioni dello studio fattone. Le specie riconosciute sono:

Caprinula Sharpei, Choffat (?)
Biradiolites Arnaudi, Choffat (?)
Sphaerulites cfr. *patera*, Arnaud
Radiolites lusitanicus Choffat
Salenia n. f.
Orthopsis cfr *miliaris* Cotteau
Orbitolina (tre forme).

Le riserve sui riferimenti specifici dipendono dallo stato di conservazione degli esemplari e sono facilmente spiegabili, se si pensa alla scarsità, generale nei giacimenti a rudiste, di esemplari, che conservino riconoscibili i caratteri interni ed esterni, richiesti per la determinazione, secondo le moderne vedute, riguardo l'interpretazione dei generi e della specie nelle rudiste. Ma queste incertezze permettono tuttavia di riconoscere all'insieme della piccola fauna la sua spiccata somiglianza colla fauna a rudiste del Turoniano medio e superiore del Portogallo [2], e quindi anche dell'Appennino, dove le faune turoniane presentano notevoli affinità con quelle portoghesi.

[1] P. Vinassa de Regny, *Note geologiche sulla Tripolitania*, Rend. r. Accad. d. Sc. dell'Ist. di Bologna, 1902.

[2] P. Choffat, *Facies ammonitiq. et facies récifal du Turonien portugais.* Bull Soc. Géol. de France, 1897, XXV, pag. 470. — Rec. des Monogr. strat. sur le Syst. Crét. du Portugal, Deux. Ét., *Le Crét. sup. au nord du Tage*, Lisbonne, 1900, pag. 167 e seg.

Per quanto mi risulta, finora si avevano notizie assai scarse, specialmente paleontologiche, sul Cretaceo superiore della Tripolitania. Rolland [1], trattando del Cretaceo dell'Africa settentrionale e riassumendo le osservazioni degli autori che lo avevano preceduto, non accenna alla esistenza di calcari a rudiste nella Tripolitania. Ma evidentemente i calcari a rudiste riconosciuti dal prof. Vinassa appartengono, e ne costituiscono la prosecuzione ad oriente, alla serie che si sviluppa negli altipiani della Tunisia e dell'Algeria e che contiene quel *Radiolites Lefebvrei* (Bayle) [2], il quale nel Turoniano del Portogallo è rappresentato da una forma che le è strettamente affine, se non identica (*Radiolites Peroni* Choffat) [3].

Questa associazione di forme, *Caprinula*, *Biradiolites*, *Sphaeralites*, *Radiolites*, in un calcare ad *Orbitolina* non era stata prima d'ora, io credo, segnalata pel nord-Africa; e finora non si era riscontrata la presenza di orbitoline in orizzonti superiori al Cenomaniano superiore [4]. E notisi che non è il caso di dubitare della convivenza delle orbitoline colle rudiste, in considerazione della abbondanza delle orbitoline stesse nella roccia, all'esterno e nell'interno dei fossili e della loro buona conservazione; ciò che permette di escludere che si tratti di fossili rimestati. Il fatto mi pare quindi interessante e meritevole di essere comunicato all'Accademia, anche a soddisfazione del prof. Vinassa, al quale spetta il merito di avere scoperto il giacimento fossilifero.

A schiarimento dei suesposti riferimenti specifici, ritengo opportuno di aggiungere ora qualche cenno descrittivo dei fossili.

Caprinula Sharpei Choffat (?). H. Douvillé, *Ét. sur les Caprines*, Bull. S. G. d. France, XVI, 1888, pag. 708, tav. 22, fig. 4, tav. 23, fig. 5. Dei tre esemplari avuti in esame, uno solo presenta traccie sufficientemente conservate, per un confronto colla citata specie, dell'apparato cardinale e della struttura interna, offerte dalle sezioni condotte nella valva superiore ed inferiore ad una certa distanza dalla commessura. I caratteri messi in evidenza dalla sezione attraverso la valva inferiore potrebbero lasciare incerti tra la *C. Sharpei* e la *C. olisiponensis* Choffat, per la forma del canale della forchetta e per la disposizione delle lamine miofore, anteriore e posteriore; ma il dubbio parmi venga escluso dai caratteri della sezione della valva superiore appartenente allo stesso individuo; tuttavia credo prudente

(1) G. Rolland, *Sur le terr. Crét du Sahara sept.*, Bull. d. l. Soc. Géol. de France, 1881, IX, pag. 508 e seg.

(2) G. Rolland, Mem. cit., pag. 526. — A Peron, *Descript. des invertéb. foss. d. terr. crét. de la région sud des Hauts-Plateaux de la Tunisie*, Paris, 1889-1893, pag. 287.

(3) A. Peron, *La zone à Placent. Uhligi et la zone à Marsup. ornatus dans le Crét. de l'Algérie*. Bull. Soc. Géol. de France, 1898, XXVI, pag. 500 e seg.

(4) H. Douvillé, *Distribut. des Orbitolites et des Orbitoïdes dans la Craie du sud-ovest*. Bull. d. l. Soc. Géol. de France, II, 190', prospetto a pag. 312.

lasciare dubbio il riferimento specifico. La *C. Sharpei* si trova in Portogallo nel Turoniamo medio e superiore col *Radiol. lusitanicus* (Bayle), *Biradiolites Arnaudi* Choffat, *Sauvagesia Sharpei* Bayle, ecc.

Radiolites lusitanicus (Bayle). P. Choffat, *Rec. d'ét. paléontol. sur la faune crét. du Portugal,* 1886, pag. 32, tav. IV, figg. 2-8; 1901, pag. 144, tav. X (var. *rigida*, tav. XI). Numerosi sono gli esemplari di radioliti, oltre la trentina, ma pochi, non più di dieci, per quanto di forma variabile sono riconoscibili ed appartengono al *R. lusitanicus.* Non escludo tuttavia che qualche altro esemplare fra quelli irriconoscibili specificamente, perchè troppo incompleti od erosi, possa appartenere ad altra specie, segnatamente al *R. Péroni* Choffat (= *R. Lefebvrei* Bayle). Quelli riferibili al *R. lusitanicus*, sono tutti esemplari di piccole dimensioni, più piccoli in generale dell'esemplare di media dimensione figurato da Choffat (tav. IV, fig. 4); i più piccoli hanno la valva inferiore larga quanto alta, mentre nei maggiori, irregolarmente conici ed alquanto ritorti, l'altezza è notevolmente maggiore della larghezza; i più sono individui isolati, quattro sono riuniti a coppia. Nessuna valva superiore è completa, ma quanto rimane di parecchie di esse, basta a dimostrare che questa valva è liscia, piana o leggermente cupoliforme per rigonfiamento centrale, corrispondendo quindi perfettamente alla descrizione fattane da Choffat. L'A. distinse diverse forme per questa specie riguardo alla valva inferiore, ed è alla « forme élancée à lames courtes et étalées » che appartengono gli esemplari in esame meglio conservati. Pochi hanno le fascette sporgenti dei seni non sciupate; ma tuttavia è evidente la maggiore larghezza di quella anteriore, e sono visibili le tre costicine longitudinali occupanti lo spazio interposto; il margine della stessa valva è ondulato, ed un esemplare che si presenta scoperchiato, per la scomparsa di gran parte della valva superiore, mostra ben conservata la cresta cardinale e le fossette dentali laterali, corrispondenti alla estremità bifida dei denti della valva superiore.

Già notammo le altre specie di rudiste che in Portogallo si associano al *R. lusitanicus*, ad un livello paleontologico che, secondo Douvillé (1), è caratterizzato nel nord d'Africa dai *Rad. Choffati* Thomas et Peron e *R. Lefebvrei* Bayle, i quali più all'est sono associati a specie del Turoniano portoghese. In Italia io riconobbi questa specie nel Turoniano dell'Avellinese (2), insieme al *Birad. samniticus* Par., ed al *Bir. Arnaudi* Choffat.

Sphaerulites cfr. *patera* Arnaud H., *Mém. sur le Terr. Crét. du S. O. de la France,* Mém. Soc. Géol. di France, X, 1877, pag. 80, tavv. IV, V, VI. — L'unico esemplare, di poco più piccolo di quello figurato da Ar-

(1) H. Douvillé, *Classific. des Radiolites.* Bull. Soc. Géol. d. France, 1902, t. II, pag. 471.

(2) C. F. Parona, *Appunto per lo studio del Cret. sup. nell' Appennino.* Boll. Soc. Geol. Ital., 1905, XXIV.

naud alla tav. VI, è alquanto schiacciato dall'alto al basso e mutilato ai fianchi, di guisa che non è possibile farsi un'idea esatta del grado di convessità della valva superiore e del lembo della inferiore; si aggiunga che la valva superiore ed il lembo marginale della inferiore sono ellittici, anzichè subcircolari. In queste condizioni non è possibile stabilire l'identità dell'esemplare africano colla specie turoniana di Arnaud, alla quale tuttavia somiglia assai, più che alla *Sphaerul. foliaceus* Lam., per lo stato di superficie della valva superiore, per le grosse pieghe radianti sul lembo della valva inferiore, per le lamine sporgenti orizzontalmente sui fianchi, per le traccie della larga zona liscia fra le fascette dei seni. Una rottura laterale lascia vedere parzialmente la cavità interna ingombra di incrostazioni.

Biradiolites Arnaudi Choffat, op. cit., 1901, pag. 138, tav. VI e VII. Trattandosi di frammenti espongo come dubbia la determinazione specifica; la ritengo tuttavia probabilissima, anzi, a giudicare dai caratteri ornamentali, parmi di poter aggiungere, che la forma tipo è accompagnata dal *Biradiol. runaensis*, da Choffat considerato come varietà del *Bir. Arnaudi*, sebbene ne sia così distinto da poter essere ritenuto specie a sè.

Salenia f. n. Esemplare incompleto, appartenente ad una forma che si distingue da tutte le congeneri, come mi fa osservare il prof. C. Airaghi, per le piccole dimensioni dell'apparato speciale, piú piccolo della metà del diametro dell'echino stesso. La specie che più le si avvicina è la *Sal. lusitanica* De Loriol del Bellasiano, orizzonte di passaggio dall'Aptiano al Cenomaniano (P. De Loriol, *Réc. d'ét. pal. sur la faune crét. du Portug.*, II, *Descript. des Echinod.*, Lisbonne, 1887-88, pag. 16, tav. III, fig. 4).

Orthopsis cfr. *miliaris* Cotteau, Paléont. franç., *Echinod. crét.* VII, 1862-67, tav. 1131, pag. 558. L'*Orthopsis miliaris* si trova nel Cenomaniano (?), nel Turoniano e nel Senoniano; mi astengo dal rifervi senza riserva l'esemplare di Tarahuna perchè ridotto in un frammento della porzione marginale, sicchè non è possibile controllare i caratteri dell'apice. È tuttavia probabile, che si tratti realmente della specie di Cotteau, tanto più che essa venne già trovata in Algeria. (Cotteau, Peron et Gauthier, *Échin. foss. de l'Algérie*, Paris, 1876-84. pag. 213).

Orbitolina. Il dott. P. L. Prever, per un suo studio comparativo di orbitoline di diverse provenienze e dei diversi orizzonti del Cretaceo, ebbe anche occasione di esaminare gli esemplari di Tarahuna comunicatigli dal prof. Vinassa. Egli mi informa di avere riconosciuto tre forme.

Una forma regolarmente conica, colla faccia conica liscia ed a colletto molto pronunciato e con quella inferiore piana o leggermente convessa: è affine alla *O. bulgarica* (Desh.) dell'Albiano ed alla *O. Paronai* n. f. del Cenomaniano del Veneto orientale e dell'Appennino aquilano, differendone per il colletto basale e per la faccia inferiore che non è mai concava.

Una seconda forma appartiene pure al gruppo della *O. conoidea*, ma

è più tozza e nella faccia inferiore è provvista al centro di una depressione assai limitata, all'ingiro della quale si rialza, divenendo convessa ed assumendo quindi, per la faccia inferiore, un profilo simile a quello della *O. discoidea*. Per questi caratteri è simile, ma non identica, alla *O. Boehmi* n. f. pure del Cenomaniano veneto ed appennino.

Una terza forma è pure conica ma più schiacciata, colla faccia inferiore convessa, ma senza depressione centrale; pei quali caratteri ha qualche somiglianza colla *O. Kiliani* n. f., compagna delle *O. Paronai* ed *O. Boehmi* (1).

Queste orbitoline differiscono inoltre dalle forme citate per la loro piccolezza; così che, se teniamo calcolo della tendenza allo sviluppo regressivo, generale nelle orbitoline a partire dal Cenomaniano, si può ritenere, che queste tre orbitoline turoniane siano derivati evolutivi delle tre suaccennate forme cenomaniane.

Meccanica. — *Sul problema dei due corpi nella ipotesi di un potenziale newtoniano ritardato.* Nota di Giulio Pavanini, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Modificazione del detector magneto-elastico del Sella* (2). Nota del dott. Laureto Tieri, presentata dal Corrispondente A. Sella.

Nel 1903 (3) il Sella trovò che un filo di ferro è sensibile alle onde elettriche anche quando l'isteresi magnetica, anzichè essere generata da un cambiamento del campo esterno, come pel detector Marconi, fosse generata da una deformazione elastica.

L'apparecchio usato dal Sella per dimostrare il fenomeno era costituito da un fascio di fili di ferro (lungo circa 40 centimetri) saldati alle due estremità ed infilato in un tubicino di vetro della lunghezza di circa 30 cm. intorno a cui erano disposti due avvolgimenti; l'uno, l'interno, costituito da un solo strato, serviva per lanciare attorno al nucleo le onde elettromagnetiche, l'altro, costituito da quattro strati, era chiuso su un telefono. Tutte le volte

(1) Queste n. f. di orbitoline saranno prossimamente descritte ed illustrate dal dott. Prever.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

(3) V. Rend. Acc. Lincei, 1° sem. 1903, pag. 340.

che si torceva il fascio da una parte e dall'altra della posizione di riposo, e si lanciavano le onde nella bobina a ciò destinata, il telefono accusava la presenza di esse con un caratteristico ronzio.

Però, come osserva il Sella stesso in un'altra sua Nota [1], la sensibilità di questo nuovo detector era ben lontana dal poter competere con quella del detector ordinario.

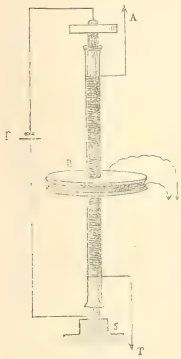


Fig. 1.

Io ho ricercato le condizioni di migliore sensibilità di questo nuovo rivelatore di onde elettromagnetiche, e dopo una lunga serie di tentativi fatti nel passato anno, sono riuscito a costruire un detector magneto-elastico più sensibile di un detector Marconi esistente nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

La principale modificazione apportata all'apparecchio del Sella è consistita nel mantenere il fascio di fili di ferro magnetizzato circolarmente o longitudinalmente (meglio circolarmente) mentre si torce.

L'apparecchio è costituito nel modo seguente: (fig. 1). Un fascio di 14 fili di ferro ricotto, saldati insieme ai due estremi e della lunghezza di circa 10 centimetri è infilato in un tubicino di vetro lungo cm. 9 ed avente il diametro esterno di cm. 0,49. (Il filo di ferro che adopero ha il diametro di mm. 0,5, essendo esso il più sensibile fra le molte qualità che avevo a disposizione).

Il tubicino di vetro è ricoperto per la lunghezza di cm. 7 da un avvolgimento di filo di rame del diametro di circa $^1/_{20}$ di millimetro: di esso avvolgimento, l'un capo T è in comunicazione con la conduttura del gas, l'altro A è libero.

Sul tubo di vetro è infilato un rocchettino di legno B che porta una scanalatura profonda della larghezza di circa 3 mm., nella quale è avvolto per parecchi strati del filo di rame dello stesso spessore di quello che forma la bobina dell'onda. La bobina telefonica è costruita in modo che la sua resistenza eguagli presso a poco la resistenza del telefono chiuso su di essa.

Il fascio è saldato per un estremo ad un solido sostegno S; per l'altro estremo ad una sbarretta che permette di torcerlo. Inoltre, gli estremi del fascio di fili di ferro sono congiunti ai poli di una pila Grenet P.

Date le condizioni in cui esperimento, tenendo aperto il circuito in cui è inserito il fascio di fili di ferro e torcendo esso fascio, l'apparecchio non è affatto sensibile alle onde generate da un campanello elettrico (chiuso nel

[1] V. Rend. Acc. Lincei, 2° sem. 1903, pag. 182.

circuito di una pila Grenet e con un punto del circuito in comunicazione con la conduttura del gas), posto a pochi metri di distanza: però, non appena si chiude il detto circuito, cioè non appena si magnetizza il fascio circolarmente, si sente nel telefono un ronzio abbastanza forte tutte le volte che si torce e detorce il fascio. Se dopo di ciò si interrompe nuovamente la corrente che magnetizza il fascio, e si torna a torcerlo, per la prima torsione il ronzio nel telefono ha quasi la stessa intensità di quella che avrebbe se la corrente seguitasse a passare pel fascio; per le torsioni successive il ronzio va man mano diminuendo d'intensità, fino a scomparire di nuovo completamente. Ciò avviene però quando nella torsione si fa oltrepassare al fascio di fili di ferro per un buon tratto da una parte e dall'altra della posizione di riposo, due certi angoli dei quali è fatta parola più in basso. Se invece dopo aver torto il fascio tenendolo magnetizzato circolarmente, si interrompe la magnetizzazione circolare e si seguita a torcerlo senza però oltrepassare i detti angoli di torsione, l'intensità del ronzio diminuisce solo fino a un certo limite, cioè il fascio rimane in condizioni migliori di sensibilità di quel che non era prima della magnetizzazione circolare. Sarebbe importante vedere se il fascio viene a perdere col tempo questo aumento di sensibilità. È anche degno di nota il fatto che la rapidità con cui va diminuendo l'intensità del ronzio telefonico varia col variare della qualità del ferro di cui è costituito il fascio.

Il fenomeno è ancora più caratteristico pel nichel: questo metallo perde con maggiore rapidità la sensibilità che acquista allorquando si torce e detorce tenendolo magnetizzato circolarmente.

Per quel che precede credo di potermi spiegare perchè in un mio precedente lavoro, in cui ho studiato l'azione delle onde elettriche sui cicli d'isteresi magnetica per torsione e per trazione [1], ho trovato che la magnetizzazione circolare per alcuni fasci altera, per altri no, l'effetto delle onde.

Però tornerò sulla questione, dovendo riprendere questi studî per vedere come viene alterato a causa delle onde un ciclo d'isteresi dato da una deformazione elastica di un fascio di fili di ferro o di nichel, magnetizzato circolarmente o longitudinalmente per tutto il tempo che dura l'esperienza.

Il detector magneto-elastico è sensibile alle onde elettro-magnetiche fino a che non si fa oltrepassare al fascio di fili di ferro un certo angolo di torsione, il quale dipende dalla qualità di filo di ferro adoperato. Arrivati al detto angolo di torsione, perchè l'apparecchio continui a rivelarci la presenza delle onde, bisogna detorcere il fascio, passare per la posizione di riposo di esso a seguitare a torcerlo in senso contrario fino a non oltrepassare anche qui un certo angolo di torsione, dopo di che bisogna nuovamente tornare indietro e così di seguito. In altre parole, perchè l'apparecchio rimanga sempre

[1] V. Mem. Acc. Lincei, 1905, vol. V, pag. 592.

sensibile alle onde elettromagnetiche, bisogna torcere il fascio da una parte e dall'altra del punto di riposo di esso, avendo l'avvertenza di non mai oltrepassare nella torsione un certo limite dall'una e dall'altra parte.

Si comprende facilmente però come si debbano avere due punti morti tutte le volte che il fascio, giunto al massimo di torsione sia dall'una che

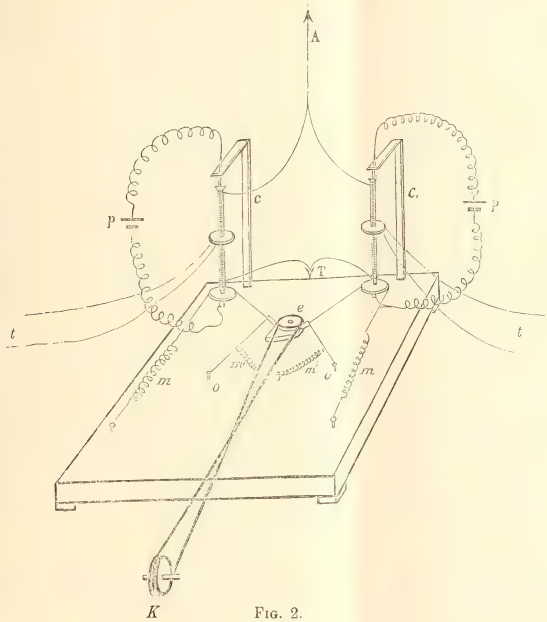


Fig. 2.

dall'altra parte della posizione di riposo, deve tornare indietro. Infatti in quei punti il fascio resta fermo per un istante: conseguentemente per quell'istante l'apparecchio non può essere sensibile alle onde elettriche. Perciò il detector magneto-elastico, così come l'ho descritto precedentemente, non potrebbe servire per la recezione di radiotelegrammi.

Ho eliminato il precedente inconveniente adoperando due detector disposti in modo che i due fasci di fili di ferro di essi non siano torti nella medesima fase, ma siano torti in guisa che mentre l'un fascio si trova nel punto morto, l'altro si trovi nel punto di massima sensibilità.

DESCRIZIONE DELL'APPARECCHIO COMPLETO.

Due detector magneto-elastici identici a quello descritto a pag. 165 (v. fig. 1) sono posti verticalmente su un piano orizzontale di legno portante due colonnine *c*, *c*, ripiegate superiormente ad angolo retto (v. fig. 2). Alla estremità superiore di ciascuna di queste è saldato il fascio di fili di ferro. Ogni fascio è saldato per l'altro estremo ad una carrucola che porta inferiormente un gambo cilindrico che penetra e può girare in un foro praticato sul piano di legno, in modo che, girando le carrucole, i fasci vengono ad essere torti.

Per la scanalatura di ciascuna carrucola, passa un filo legato per un estremo ad un saltaleone *m*, per l'altro estremo ad un martelletto girevole intorno ad un perno O.

In un punto conveniente del piano di legno è imperniato un eccentrico *e*; nella parte superiore di questo è fissata una carrucola, nella scanalatura della quale passa una cinghia che va ad un motorino K. I martelletti sono sempre tenuti a contatto dell'eccentrico per mezzo dei saltaleoni *m'*. Le estremità superiori delle bobine dell'onda vanno all'antenna A, le estremità inferiori a terra. Inoltre, ogni bobina telefonica è chiusa su un telefono *t*, e ogni fascio è inserito nel circuito di una pila Grenet P.

Facendo agire il motorino, l'eccentrico gira e conseguentemente i fasci sono torti ora dall'una ora dall'altra parte della posizione di riposo.

L'eccentrico è costruito in modo che i fasci non oltrepassino nella torsione il limite al di là del quale non sarebbero più sensibili alle onde, e i martelletti sono posti in maniera che mentre l'un fascio si trova al punto morto, l'altro si trovi nel punto di massima sensibilità.

Con tale apparecchio si ricevono molto bene i radiotelegrammi.

Fisica. — *Perfezionamenti allo Spettroelioscopio.* Nota di ANTONIO SAUVE, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Nei Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (11 décembre 1905) è inserita una Nota del sig. Nodon intorno ad *una nuova disposizione per ottenere un'immagine monocromatica delle sorgenti luminose*, da servire più specialmente allo studio della superficie solare. Ora, fin dai primi mesi del 1904, nelle Memorie degli Spettroscopisti italiani (vol. XXXIII, a. 1904, dispensa 3ª) ho pubblicato la descrizione di un apparecchio, a cui ho dato il nome di *Spettroelioscopio*, che ha lo stesso scopo e si fonda sull'identico principio. Con la presente Nota mi propongo di far constatare i miei diritti di priorità all'invenzione dell'apparecchio, e di esporne alcuni ulteriori perfezionamenti.

La parte caratteristica dell'apparecchio del sig. Nodon consiste in due piccoli specchi piani circolari, fissati uno sopra l'altro ad un asse verticale, e che fanno un certo angolo fra loro. L'asse è animato da un movimento alternativo rapido e regolare, per mezzo di un movimento di orologeria. Un siderostato diretto sul sole ne rimanda i raggi in una direzione costante. L'apparecchio è disposto in modo che il fascio cade sopra uno degli specchi, che lo riflette secondo l'asse di un cannocchiale orizzontale che dà un'immagine del sole sopra la fessura di uno spettroscopio fisso. L'immagine dello spettro vien ricevuta sopra un piano sulla superficie del quale scorre una fessura mobile che permette d'isolare una riga determinata. Questa riga si riflette sopra un terzo specchio, che la rimanda sul secondo specchio oscillante. Quest'ultimo è fissato in modo da rimandare i raggi riflessi in un cannocchiale fisso, donde pervengono all'occhio dell'osservatore. A causa del movimento oscillatorio rapido e regolare da cui sono animati gli specchi circolari, le successive immagini sovrapposte sulla retina danno l'impressione di una immagine continua.

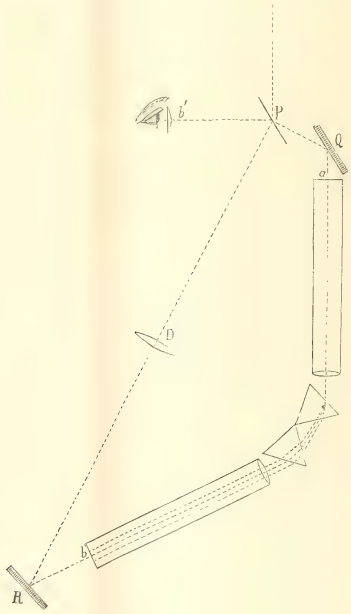
Per fare un confronto tra il metodo del sig. Nodon ed il mio, dovrei ripetere la descrizione del mio apparecchio, già data nella Nota citata. Preferisco descriverne un nuovo modello, che in sostanza è uguale al primo, e ne differisce soltanto per una modificazione che permette di far uso di uno spettroscopio qualunque, mentre nel primo lo spettroscopio di forma speciale era una modificazione di quello adoperato da Hale in un suo Spettroeliografo [1]. Del resto, per quanto riguarda il confronto tra il mio metodo e quello del sig. Nodon, ciò che dirò relativamente al secondo modello vale anche relativamente al primo. Otterrò così, con maggior brevità, il doppio scopo di dimostrare il mio diritto di priorità, e di presentare un ulteriore perfezionamento pratico del mio apparecchio.

Nel mio apparecchio la parte caratteristica consiste in uno specchio oscillante P di debole spessore e con ambedue le faccie riflettenti. Adopero anch'io uno spettroscopio con due fessure a, b. Inoltre due specchi fissi Q, R, sono situati rispettivamente innanzi alla prima fessura e dopo la seconda. Il fascio luminoso che esce dall'obbiettivo di un cannocchiale dà l'immagine del sole sopra il piano della prima fessura a, dopo aver subìto una riflessione sulla prima faccia dello specchio oscillante P ed un'altra sullo specchio fisso Q. La seconda fessura b serve ad isolare una determinata riga dello spettro. I raggi che escono da questa fessura si riflettono sullo specchio R, attraversano un obbiettivo D, e si riflettono sulla seconda faccia dello spec-

[1] Nel primo modello un riflettore stava nell'interno dello spettroscopio; l'ho sostituito con un riflettore esterno R. Inoltre nel primo modello i raggi pervenivano all'occhio dopo avere attraversato un cannocchiale; ho spostato l'obbiettivo di questo cannocchiale collocandolo fra gli specchi R e P.

chio P formando in b' l'immagine della fessura b. Inoltre debbono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

1. L'apparecchio deve essere tale, che se due raggi coincidessero cogli assi delle lenti dello spettroscopio, attraverserebbero rispettivamente le fessure a, b, e dopo riflessione sugli specchi Q, R, s'incontrerebbero in un



punto per cui passa lo specchio P (considerato di spessore trascurabile) e l'asse di oscillazione del medesimo.

2. Il percorso $PQ + Qa$ deve essere uguale al percorso Pb'.

3. La grandezza dell'immagine b' della fessura b deve essere uguale alla grandezza di questa [1], ciò che si ottiene facendo uso di un obbiettivo D la cui distanza focale sia uguale alla quarta parte del percorso $bR + RP + Pb'$, e collocandolo nel punto medio del detto percorso.

[1] Ciò presuppone che nello spettroscopio abbiano la medesima distanza focale la lente di collimazione e l'altra lente che forma l'immagine dello spettro.

Soddisfatte che siano le precedenti condizioni, se si fa ruotare lo specchio P, l'immagine del sole si sposterà sulla prima fessura a, e simultaneamente l'immagine b' della fessura b si sposterà disegnando un'immagine monocromatica del sole. Questa immagine può servire ad impressionare una lastra fotografica, ovvero può essere osservata direttamente con un oculare. In tal caso, affinchè la persistenza delle immagini sulla retina produca il suo effetto, bisogna che lo specchio P oscilli rapidamente.

È chiaro che, ogni volta che lo specchio ritorna in una medesima posizione, per la fessura a passa la medesima sottile porzione dell' immagine solare, e l'immagine b' della fessura b occupa identicamente lo stesso posto, cosicchè le immagini monocromatiche del sole che si ottengono nelle successive oscillazioni si sovrappongono esattamente.

Ora si presenta una difficoltà. Coll'oscillar dello specchio P, l'immagine piana del sole non si sposta sul piano della fessura a, ma rimane tangente ad un cilindro. Inoltre l'immagine b' della fessura b si sposta sopra un cilindro. In pratica però tale difficoltà non ha importanza, se le oscillazioni dello specchio P sono piccole, ciò che si può ottenere disponendolo in modo che il percorso $PQ + Qa$ sia sufficientemente grande.

Per esempio, se l'immagine del sole ha un diametro di due centimetri, e se l'apertura dell'obbiettivo del cannocchiale sta alla distanza focale nel rapporto di $^1/_{20}$, basta che il percorso $PQ + Qa$ sia di 40 centimetri affinchè i coni luminosi che formano l'immagine solare siano tagliati dal piano della fessura a secondo circoli che hanno il massimo diametro di $^1/_{160}$ di millimetro, con oscillazioni tali da ottenere l'immagine monocromatica dell'intero disco solare. Tale approssimazione può anche raddoppiarsi facendo cadere l'immagine solare non già esattamente sul piano della fessura a, ma un poco più in basso. Se poi l'immagine solare è n volte più piccola, ovvero se se ne osserva una porzione n volte più piccola, l'ampiezza delle oscillazioni può ridursi di altrettanto, ed in tal caso l'approssimazione è n^2 volte maggiore. Quindi praticamente si può ritenere che l'immagine solare si sposti sul piano della fessura a. Per analoghe ragioni si può anche ritenere che l'immagine b' della fessura b si sposti sopra un piano.

Il percorso $PQ + Qa$ deve essere sufficientemente grande anche per un altro scopo, cioè affinchè i raggi possano attraversare lo spettroscopio durante le oscillazioni dello specchio P. Un accurato esame mi ha mostrato che l'uno e l'altro intento possono sempre ottenersi senza difficoltà pratiche.

Facciamo ora il confronto fra il metodo del sig. Nodon ed il mio. Nei due metodi il principio è identico, cioè di spostare l'immagine del sole sulla prima fessura dello spettroscopio, e simultaneamente di spostare l'immagine della seconda fessura. Inoltre, per ottenere questo intento, si fa ugualmente uso di due specchi fissati ad un medesimo asse di oscillazione. Quindi i due metodi sono in sostanza identici, e non differiscono che per alcune

particolarità. Una di queste però merita esame. Nell'apparecchio del sig. Nodon il fascio luminoso si riflette sopra uno degli specchi oscillanti prima di giungere all'obbiettivo del cannocchiale. Nel mio apparecchio il fascio luminoso si riflette sulla prima faccia dello specchio oscillante dopo aver attraversato il detto obbiettivo. Ne segue che in quell'apparecchio l'immagine del sole si sposta sul piano della fessura, mentre nel mio si sposta rimanendo tangente ad un cilindro. Ciò costituisce teoricamente un vantaggio a favore dell'apparecchio del sig. Nodon, ma si è visto precedentemente che un tal vantaggio è del tutto trascurabile in pratica. Invece mi pare che la disposizione da me adottata sia più vantaggiosa, poichè permette di utilizzare un obbiettivo di grande apertura, ciò che non può aver luogo praticamente coll'altra.

Nell'immaginare il nuovo modello del mio apparecchio, ho avuto soltanto di mira di trovare il modo di utilizzare uno spettroscopio qualsiasi, ma mi sono accorto che la nuova disposizione possiede altresì una proprietà inattesa.

Si è visto che, coll'oscillar dello specchio P, si può praticamente ritenere che l'immagine solare si sposti sul piano della fessura a, e che l'immagine b' della fessura b si sposti sopra un piano; a condizione però che le oscillazioni dello specchio P siano piccole. Ora ho trovato che, indipendentemente dall'ampiezza delle oscillazioni del detto specchio, l'immagine solare in b' è piana. Darò un cenno della dimostrazione di questa proprietà.

Supponiamo per un momento che le fessure a, b, siano soppresse, e che i raggi solari siano monocromatici. Se l'immagine solare si forma sul piano della fessura a, si formerà un'altra immagine solare sul piano della fessura b, ed un'altra in un piano che passa per b'. Facciamo ora ruotare lo specchio P di un certo angolo. Si può dimostrare che, mentre cambia di posto l'immagine solare in a, quella in b' rimane immobile. Consideriamo ora al loro posto le fessure. È chiaro che se durante le oscillazioni dello specchio P i raggi appartenenti a ciascun cono luminoso non passeranno sempre simultaneamente nelle fessure, anderanno pur tuttavia successivamente a convergere nei punti corrispondenti dell'immagine solare piana in b', ciò che dimostra la detta proprietà.

Nel mio apparecchio lo specchio Q non è necessario. L'ho posto, sia perchè mi sembra praticamente utile quando si faccia uso di uno spettroscopio come quello rappresentato nella figura, sia perchè senza di esso non si verificherebbe più la proprietà detta poc'anzi. Invece, per altri spettroscopi speciali può essere preferibile di sopprimere lo specchio Q, per esempio se si utilizza lo spettroscopio di cui fa uso Hale in un suo Spettroeliografo [1], nel quale uno specchio situato nell'interno dell'apparecchio permette che le due

[1] Vedi Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani, vol. XXIV, anno 1895, tav. CCCXII.

fessure stiano sopra un medesimo piano. Anzi in tal caso devesi sopprimere lo specchio Q se si vuole che si verifichi la proprietà detta poc'anzi.

Dirò ancora alcune parole intorno al modo di dare allo specchio P delle oscillazioni rapide e regolari. Nella mia Nota citata ho suggerito di unire lo specchio P rigidamente ad un'asta coll'estremità alquanto ripiegata, che è costretta da una molla ad appoggiarsi ai denti opportunamente curvi di una ruota dentata animata da un moto uniforme di rotazione. Aggiungerò che mi sembra forse più pratico di far uso di un'asta diritta, la quale rimane tangente ai denti opportunamente curvi di una ruota dentata. Bisogna in tal caso che la lunghezza dell'asta sia tale che non cessi di rimanere tangente a ciascun dente, fino al momento in cui passa al dente successivo.

Meteorologia. — *Sulla probabile origine della distribuzione dei temporali italiani a seconda delle stagioni.* Nota di V. Monti, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

La Nota presente ha il suo punto di partenza nella Memoria che sotto il titolo: *Sulla distribuzione dei temporali e della grandine in Italia a seconda dei luoghi e delle stagioni* ho pubblicato, or fa un anno, nel vol. XX, parte I, degli *Annali dell'Ufficio Centrale Meteorologico e Geodinamico*; e più precisamente nella tabella riassuntiva che si trova alle pagg. 266-269 della detta Memoria. In tale tabella sono, tra l'altro, assegnati i numeri che rappresentano la frequenza media normale dei temporali per ogni settimana dell'anno e per ciascuna delle regioni in cui si suol dividere l'Italia.

Chi provasse a servirsi senz'altro di quei numeri per tracciare dei diagrammi, prendendo p. e. per ascisse i numeri d'ordine delle settimane e per ordinate le frequenze normali dei temporali, otterrebbe delle curve ad andamento troppo irregolare per avere un significato reale od una pratica utilità. E ciò si deve alle numerose cause d'errore che influiscono su quei numeri e che sono state da me enumerate e discusse nelle pagg. 13-15 della Memoria citata.

Ho pertanto applicato ai numeri della tabella il metodo dei valori perequati dello Schiaparelli, nel modo seguente. La media dei numeri riportati per le settimane 1, 2, 3, 4 e 5 è stata assunta come corrispondente alla settimana 3; quella dei numeri riportati per le settimane 2, 3, 4, 5 e 6 come corrispondente alla settimana 4, e così via. Da ultimo, le medie dei gruppi

49, 50, 51, 52, 1
50, 51, 52, 1, 2
51, 52, 1, 2, 3
52, 1, 2, 3, 4

fornirono i valori corrispondenti alle settimane 51, 52, 1 e 2.

Mercè questa riduzione preliminare, e seguendo le solite norme con cui si tracciano le curve destinate a indicare l'andamento dei fenomeni fisici, ho costruito per ogni regione un diagramma indicante la frequenza dei temporali in ogni singola settimana.

I risultati furono i seguenti:

Liguria. — Due massimi quasi uguali nelle settimane 24 e 35; un minimo principale fra le settimane 51 e 1, e un altro assai meno accentuato alla settimana 29.

Piemonte. — Un massimo fra le settimane 24 e 28; un minimo fra quelle 48 e 5.

Lombardia. — Un massimo fra le settimane 24 e 25; un minimo fra le settimane 48 e 9.

Veneto. — Un massimo fra le settimane 24 e 25; un minimo fra quelle 50 e 7.

Emilia. — Un massimo alla settimana 24; un minimo fra le settimane 50 e 9.

Marche ed Umbria. — Un massimo principale fra le settimane 24 e 25; un massimo secondario alla settimana 33; un minimo principale fra le settimane 47 e 7; un minimo secondario alla settimana 30.

Toscana e Lazio. — Un massimo principale alla settimana 35, e uno secondario alla 24; un minimo principale alla 4 e uno secondario fra le 20 e 30.

Regione meridionale adriatica. — Un massimo principale alla settimana 25 e uno secondario fra le 34 e 35; un minimo principale tra le 49 e 6 e uno secondario alla 30.

Regione meridionale mediterranea. — Un massimo principale alla settimana 36, e uno secondario alla 24; un minimo principale alla 5, e uno secondario fra le 29 e 30.

Sicilia — Un massimo principale fra le settimane 37 e 39; parecchi massimi secondarî poco accentuati tra la metà della primavera e quella dell'estate; un minimo principale tra le settimane 50 e 13.

Per la *Sardegna,* com'è noto a chi ha consultato la Memoria citata, la scarsità dei dati numerici non permette conclusioni generali e sicure.

In complesso risulta che verso la metà di giugno v'ha un massimo assoluto di frequenza temporalesca in tutto il versante Adriatico. Su quello Tirrenico il massimo assoluto cade invece tra la metà d'agosto e quella di settembre. I due climi reagiscono poi, per così dire, l'uno sull'altro, in quanto che al massimo principale Adriatico corrisponde per epoca un massimo secondario Tirrenico; e, viceversa, al massimo principale Tirrenico ne corrisponde uno secondario pei paesi situati sul fianco Est dell'Appennino.

Ho potuto, come si vedrà or ora, rendermi, in qualche modo, ragione del massimo di giugno, caratteristico del versante Adriatico, almeno per quella parte che riguarda la valle del Po. Era questa, ai miei occhi, la cosa prin-

cipale, dato il posto preponderante che nella storia temporalesca italiana spetta alla valle del Po. Quando poi si pensi che il comparire del massimo principale in una medesima settimana per una così vasta distesa di territorio, qual'è quella che corre dalle Alpi alla penisola Salentina, accenna all'influenza prevalente di temporali di propagazione, partiti per la maggior parte, secondo ogni probabilità, dalla valle del Po, si comprende che la ragione che sto per esporre, vale quasi certamente anche per il medio e basso versante Adriatico.

Per incominciare dall'esame delle cause indigene, mi costruii, sui dati di Lugli (*Ann. dell'Uff. Centr. Met. e Geod.*, IV, 2) le carte delle temperature medie d'Italia ridotte al livello del mare, pei mesi del periodo maggio-settembre. Ne ebbi subito per risultato, che la nota area di alte temperature sulla valle del Po incomincia a delinearsi, in media, nel mese di giugno, il che è certamente in relazione colla questione che ci occupa.

Venendo poi a considerazioni di ordine più generale, mi parve naturale che il massimo di giugno fosse collegato ad una maggior frequenza di qualcuna di quelle configurazioni barometriche, trovate da Schiaparelli più favorevoli alla formazione dei temporali padani. Esaminai all'uopo le belle carte pubblicate nel 1893 da H. H. C. Dunwoody del *Weather Bureau* d'America. Sono esse carte mensili delle pressioni e temperature medie normali per tutto l'emisfero boreale. Risulta da queste carte che la distribuzione barometrica normale dell'Occidente Europeo incomincia in maggio, e più ancora fa in giugno, ad avvicinarsi a quella configurazione che lo Schiaparelli chiamò *Atlantica*, e a cui egli attribuì una buona metà dei nostri temporali. Infatti, da maggio a giugno è in aumento la pressione a ovest della Spagna e sulle coste Algerine e Tunisine, mentre rimane invariata sull'Europa Centrale e sulla penisola Balcanica.

Da giugno a luglio la situazione barometrica media rimane presso a poco inalterata; dal luglio all'agosto essa si modifica leggermente, in quanto sull'Atlantico, a ovest della Spagna, la pressione diminuisce un poco.

Non pare dunque improbabile che il massimo della frequenza temporalesca in giugno abbia per causa principale un massimo di frequenza di una situazione barometrica corrispondente più o meno al tipo Atlantico.

Molta incertezza ho invece incontrato nel cercare di rendermi ragione dal massimo che si verifica tra agosto e settembre pel versante Tirrenico. Forse esso è dovuto, più che ad altro, ad un grande affollarsi di temporali locali. Questa ipotesi può essere avvalorata dal fatto, che, come mostrano le carte delle temperature costruite sui dati del Lugli, dall'agosto al settembre la temperatura decresce meno fortemente sul versante Tirrenico che non su quello Adriatico.

Fisica terrestre. — *Contributo allo studio del pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström.* Nota di EMILIO TEGLIO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geologia. — *Nuovi studî sul Mesozoico montenegrino.* Nota del dott. ALESSANDRO MARTELLI, presentata dal Socio C. DE STEFANI.

1. *Il Muschelkalk superiore della Kostitza e dei dintorni settentrionali di Sozina.* — Dovendosi, per cause indipendenti da me, ritardare ancora la pubblicazione di un mio lavoro già da tempo pronto per la stampa sul *Muschelkalk* superiore del Montenegro, credo conveniente di render conto, con questa Nota, di due importanti faune ladiniche provenienti dalle due distinte località di Radec Velje nella Kostitza (territorio sud-orientale del Montenegro) e di Skala Vucetina presso Sozina nella catena littoranea dalmata-montenegrina fra il Lago di Scutari e l'Adriatico. Tale lavoro fa seguito alle mie precedenti Memorie sul *Muschelkalk* inferiore di Boljevici presso Vir [1] e sul livello di Wengen [2], e completa l'illustrazione geo-paleontologica del Trias medio del Montenegre meridionale.

Nella Kostitza, alla base delle assise calcareo-dolomitiche con fossili del Trias superiore e presso alla sorgente di Radec Velje lungo l'irregolare e angusta gola fra la massa triasica dello Zijovo-Hum Orahovsky e del Kugni Kostic, una forte erosione ha posto allo scoperto una poco potente formazione di calcari rossi con resti di cefalopodi, fra i quali ho riconosciuto esemplari delle seguenti forme:

Dinarites Misanii Mojs.
Arpadites arpadis Mojs.
Protrachyceras Richthofeni Mojs.
" sp. ind.
Acrochordiceras enode Hau.
" sp. ind.
Procladiscites sp.
Monophyllites wengensis Klipst. sp.
" sp.
Proarcestes subtridentinus Mojs.
" *Reyeri* Mojs.
" *Spallanzanii* Tom.
" sp.
Ptychites reductus Mojs.
" confr. *princeps* Mart.
" sp.
Orthoceras politum Klipst.
Orthoceras campanile Mojs.

(1) Martelli A., *Il Muschelkalk di Boljevici nel Montenegro meridionale*, Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XII, 2° sem., fasc. 3°, 1903. — *Cefalopodi triasici di Boljevici presso Vir nel Montenegro*, Palaeontographia italica, vol. X, 1904.

(2) *Il livello di Wengen nel Montenegro meridionale*, Boll. Soc. geol. it., vol. XXIII (1904).

Tutte queste forme sono, salvo due o tre eccezioni, proprie del *Muschelkalk* superiore e a comune con quelle di Skala Vucetina, così che rimane pure giustificata per parte mia la illustrazione delle predette due faune in uno stesso lavoro.

Agli strati geologicamente equivalenti a quelli di Wengen e sviluppati nell'alta valle della Zermnitza, si sovrappongono calcari rossi, grigi e bianchi fossiliferi al Sutorman e a Skala Vucetina presso Sozina. L'età dei calcari del Sutorman fu già riferita da Vinassa de Regny al *Muschelkalk* superiore [1], e per le corrispondenze statigrafiche fra i calcari del Sutorman e gli analoghi di Skala Vucetina, 9 km. più a nord-ovest e lungo l'erta mulattiera dal Gluhi do per Sozina, è facile indurne quel sincronismo che l'esame dei fossili pienamente conferma.

A Skala Vucetina, il calcare bianco e rosso fossilifero soprapposto alle marne variegate e agli strati argillosi con *Spiriferina* (*Mentzelia*) *Mentzelii* Dunk. sp. e con *Balatonites prezzanus* Mojs, è ricco di numerosi individui delle seguenti forme:

BRACHIOPODI.

Spiriferina (*Mentzelia*) *Mentzelii* Dunk. sp. var. *dinarica* Bittn.
Sp. (*Mentz.*) *höveskalliensis* Suess in Boeck.
Sp. (*Mentz.*) *microglossa* Bittn.
Sp. aff. *pia* Bittn.
Sp. pia. Bittn. var. *dinarica* Bittn.
Spirigera (*Tetractinella*) *trigonella* Schloth.
Spiringera marmorea Bittn.
" *hexagonalis* Bittn.
Rhynchonella illyrica Bittn.
Rh. dinarica Bittn.
Rh. bogumilorum Bittn.
Rh. decurtata Gir. sp.
Rh. sp. nov.
Rh. (*Norella*) *refractifrons* Bittn.
Rh. (*Norella*) *refractifrons* Bittn var. *intumescens* Bittn.
Rh. (*Norella*) *refractifrons* Bittn. var. *bosniaca* Bittn.
Rh. (*Norella*) *manganophylla* Bittn.

CEFALOPODI.

Ceratites Riccardi Mojs.
Ceratites sp. nov.
Pinacoceras sp. nov. 2.
Protrachyceras Richtofeni Mojs.
" sp. ind.
Acrochordiceras enode Hau.
" sp. nov.
Procladiscites sp.
Monophyllites wengensis Klipst. sp.
Monophyllites sp. nov. (del gruppo del *M. Suessi*).
Monophyllites sp. ind. (id.).
Proarcestes subtridentinus Mojs.
" *Reyeri* Mois.
" *ventricosus* Hau.
" sp.
Ptychites patens Hau.
" *reductus* Mojs.
" sp. nov. 4.
" sp. ind.
Orthoceras politum Klipst. sp.
" *Mojsisovicsi* Salom.
" *campanile* Mojs.
" sp.

[1] Vinassa de Regny P. E., *Osservazioni geologiche sul Montenegro orientale e meridionale*, Boll. Soc. geol. it., vol. XXI (1902), pag. 517.

Rari, di piccole dimensioni e indeterminabili sono i gasteropodi e lamellibranchi che prendono una parte insignificante in questa fauna.

Non sono molte le comunanze specifiche fra i brachiopodi di Skala Vucetina e quelli del Sutorman, ma ciò si giustifica riflettendo alla differente associazione faunistica per la quale i calcari a brachiopodi e cefalopodi di Skala Vucetina si distinguono dai calcari a brachiopodi, lamellibranchi e gasteropodi del Sutorman.

Comparando i riportati elenchi di specie con quelli di altre località isopiche e ben conosciute, spiccano chiare le analogie che le forme degli strati di Wengen nella valle della Zermnitza, del Sutorman, di Skala Vucetina e di Radec Velje, hanno con le faune ladiniche della regione mediterranea, e più precisamente col Ladinico inferiore quelle del livello di Wengen nella Zermnitza e col Ladinico superiore le altre, intendendo per piano Ladinico di Bittner, l'equivalente del piano Norico del Mojsisovics, che val quanto dire la parte superiore del Trias medio o *Muschelkalk*. Ma per altro non devesi dimenticare che, secondo la classificazione del Bittner, il piano Ladinico comprende non solo le zone a *Protrachyceras Reitzi et Archelaus* costituenti il piano Norico, ma anche la successiva zona a *Trachyceras Aon* con la quale il Mojsisovics sincronizza la base del piano Carnico, giacchè è noto che il Bittner nel comprendere nel Trias medio, *Muschelkalk* o Franconiano che dir si voglia, tutta la serie delle formazioni fra gli scisti di Werfen e il Raibl, la suddivise in Recoariano inferiormente e Ladinico superiormente.

Prendendo ad esaminare le sole specie già note e complessivamente citate per i calcari di Skala Vucetina e di Radec Velje, troviamo solo cinque specie a comune col *Muschelkalk* inferiore della Schreyer Alpe, di Recoaro e di Boljevici e nove con la fauna di Han Bulog e Haliluci in Bosnia, dove al pari che in altre località degli stessi dintorni di Sarajevo non è solo rappresentato il *Muschelkalk* inferiore o piano Recoariano, ma anche il Ladinico. Più costanti ed evidenti sono le corrispondenze con le faune ladiniche del monte Clapsavon nella Carnia — undici specie di cefalopodi — e della Marmolata — sei specie —, e, particolarmente basandosi sulle specie dei brachiopodi, strettissime sono le analogie con le faune brachiopodiche ladiniche della Dalmazia e della Bosnia illustrate di recente dal Bittner [1].

In buon numero sono le forme nuove, ma ciò non sorprende perchè specialmente a Skala Vucetina si ha una fauna ladinica che nello stesso strato fossilifero presenta un'associazione di forme assai rara nel *Muschelkalk* superiore della regione dinarica; ed invero, i cefalopodi già noti che vi prendono parte, non trovano, come i brachiopodi che li accompagnano, corrispondenze numerose in faune locali, ma sibbene in forme di località diverse e spesso anche eterotipe, cosicchè unitamente alle specie nuove, imprimono al *Muschel-*

[1] Bittner A., *Brachiopoden und Lamellibranchiaten aus der Trias von Bosnien, Dalmatien, und Venetien*, Jahrb. der k. k. geolog. Reichsanstalt Bd. LII, Wien, 1902.

kalk superiore di Skala Vucetina una *facies* peculiare che non trova riscontro nelle formazioni sincrone e fino ad oggi conosciute nel Trias meridionale.

2. *L'oolite inferiore nella catena costiera del Montenegro.* — Sebbene le indagini del Bukovsky nel territorio dalmata a confine con la regione antivarina abbiano condotto a riconoscere sporadiche comparse di Giura nella catena costiera fra l'Adriatico e il versante montenegrino del lago di Scutari, discordi erano le opinioni sulla presenza delle formazioni giuresi nel Montenegro, negate quasi completamente dai geologi Tietze e Hassert e riconosciute da Baldacci, Canavari e da prima ammesse e poi negate da Vinassa, quasi soltanto in base al ritrovamento di calcari con ellipsactinidi comuni pure agli strati titonici di Stramberg; ma fortunate ricerche mi hanno consentito di esporre in un lavoro di prossima pubblicazione ulteriori argomenti stratigrafici e paleontologici per confermare la presenza del Malm non solo, ma anche dell'oolite inferiore della cui fauna a brachiopodi do qui un accenno preventivo, riservandomi di renderne nota quanto prima l'illustrazione paleontologica.

Tutte le indicazioni geologiche date dagli autori pel territorio della Krajina comprendente il versante orientale del Rumija fino al distretto di Scutari e al lago omonimo, sono quasi interamente errate, giacchè mentre solo sulle indicazioni di Baldacci le più recenti carte segnano un lembo giurese all'estremità settentrionale della Krajina presso Godinje, seguono pel resto del territorio gli apprezzamenti induttivi del Tietze.

Per attenermi all'argomento, qui mi limito ad affermare soltanto che al Retico fossilifero delle pendici orientali superiori del Rumija, succedono nella Krajina formazioni di calcari oolitici in trasgressione con i soprapposti calcari ad ellipsactinie, coralli e gasteropodi titoniani, e, particolarmente fra i villaggi di Livari e Ftijani, zeppi di brachiopodi.

All'abbondanza degli individui non corrisponde un'adeguata ricchezza di forme, ma nondimeno, escludendo le non poche nuove, nel seguente breve elenco di specie si ha quanto occorre per comprovare il riferimento all'oolite inferiore dei predetti calcari, basandosi principalmente sulle corrispondenze che i nostri fossili trovano non solo in quelli delle località classiche del Dogger inferiore mediterraneo quali il capo S. Vigilio alle falde del monte Baldo nel Garda (*a*) e il monte S. Giuliano presso Trapani (*b*), ma anche dell'Alpe di Vils (*c*), dell'oolite del Veneto (*d*), di Rossano Calabro (*e*) e del monte Foraporta presso Lagonegro (*f*).

Ecco pertanto la nota delle specie determinate e già conosciute:

Terebratula pectorosa Rothpl. (*c*).
Terebratula Salvatoris Grec. (*e*, *f*).
Rhynchonella infirma Rothpl. (*c*, *f*).

Rh. Ximenesi Di Stef. (*b*, *c*, *e*, *f*).
Rh. Vigilii Leps. var. *Erycina* Di Stef. (*a*, *b*, *e*, *f*).
Rh. Maleniana Grec. (*e*, *f*).
Rh. confr. *Clesiana* Leps. (*c*, *d*).

Oltre che nella Krajina, ho trovato calcare oolitico con brachiopodi pure del Dogger inferiore lungo la via fra Nieguši e Cettigne presso Cekanje fra la Bukovica e il Golo Brdo, e anche questa è una costatazione nuova che insieme al rinvenimento di *Aptici* del Malm fatto dal Lipold circa cinquanta anni fa (cfr. Verhandl. der k. k. geolog. Reichsanstalt 1859) viene a confermare ancora una volta nel modo più esplicito l'esistenza del Giura nella catena costiera montenegrina. Le specie isolate dal calcare di Cekanje, eccettuate le nuove, vennero da me così determinate salvo ulterioriori aggiunte:

Waldheimia confr. *angustipectus* Rothpl. (*c*).
Zeilleria confr. *Ippolitae* Di Stef. (*b*, *e*, *f*).
Terebratula Salvatoris Grec. (*e*, *f*).
Rhynchonelea Wahneri Di Stef. (*b*, *c*, *e*).
Rh. confr. *Ximenesi* Di Stef. (*b*, *c*, *e*, *f*).

Tanto nella Krajina quanto fra Nieguši e Cettigne si hanno dunque formazioni oolitiche inferiori corrispondenti alle zone giuresi con *Lioceras opalinum* e *Ludwigia Murchisonae* del bacino mediterraneo, a proposito delle quali zone il Vacek [1] ritiene, com'è noto, che in ogni parte della regione mediterranea dove si abbia una serie giurese molto sviluppata, esse debbano ritrovarsi sempre soprapposte ai terreni liasici e in trasgressione con i piani del Malm.

Le idee del Vacek trovano nel Montenegro una parziale conferma, poichè mentre nella Krajina mi apparve evidentissima la trasgressione fra i depositi del Dogger inferiore e quelli con ellipsactinie e nerinee titoniane, a Cekanje non potei constatare direttamente lo stesso fatto; ma se i riferimenti del Lipold sono esatti, è certo che ciò deve ripetersi tantopiù che i calcari oolitici con brachipodi non mi sembrano veramente alla sommità della serie mesozoica locale. Riguardo però alla loro diretta soprapposizione al Lias, non sono in grado di ammetterla o di negarla per i dintorni di Nieguši dove non ebbi occasione di compiere le necessarie ricerche, ma posso senz'altro escluderla per il territorio della Krajina dove invece si ripete presso a poco la stessa trasgressione che il De Lorenzo mise già in evidenza nei suoi lavori sui dintorni di Lagonegro, dimostrando la soprapposizione in concordanza sul *Dachsteinkalk*, dei calcari da prima ritenuti liasici superiori e poi oolitici inferiori.

[1] *Ueber die Fauna der oolithe von Cap. S. Vigilio*, Abhandl. der k. k. geolog. R-A. Bd. XII. Wien 1886.

Chimica. — *Prodotti di condensazione dell'acido rodaninico colle aldeidi* [1]. Nota di GUIDO BARGELLINI, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

In una Nota precedente [2] descrissi una serie di prodotti di condensazione dell'acido rodaninico con alcune aldeidi aromatiche, premettendo che avevo preparati questi composti per imparare meglio a conoscerli prima di andare avanti nello studio sistematico della loro decomposizione cogli alcali. Comunico adesso la descrizione dei prodotti che ho preparato per condensazione, in presenza di acido solforico, dell'acido rodaninico colle aldeidi m-nitrobenzoica, p-dimetilaminobenzoica, cuminica, timotinica, β-ossinaftoica e colla dialdeide timotinica.

Il prodotto di condensazione dell'acido rodaninico coll'aldeide p-dimetilaminobenzoica era già stato ottenuto da Andreasch e Zipser [3]: io volli ripreparlo unicamente per vedere se anche esso mostrasse differenza fra il punto di fusione osservato da me e quello dato da Andreasch e Zipser, come, nella mia Nota precedente, avevo fatto notare per i prodotti ottenuti dalle aldeidi salicilica, piperonilica e cinnamica. Infatti, mentre Andreasch e Zipser riferiscono che l'acido p-dimetilaminobenzilidenrodaninico, comincia a 200° a rammollirsi e a 246° si fonde completamente, io notai che soltanto a 240° comincia a decomporsi fondendosi e non si fonde completamente che a 270° circa.

Le medesime divergenze ho osservato anche per l'acido furfurilidenrodaninico che descrissi nella mia Nota precedente e riguardo al quale non potei far notare che era già stato preparato da Andreasch e Zipser perchè, non avendo a Siena i Monatshefte, non ne ebbi notizia che dal Central Blatt (1905, II, fascicolo 24 del 13 decembre) quando cioè avevo già consegnato il lavoro alla Tipografia. Per questo prodotto di condensazione io osservai il punto di fusione e decomposizione 220-230°, mentre Andreasch e Zipser dicono che comincia a 204° a rammollirsi e ad annerirsi.

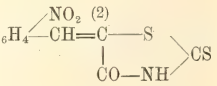
Tutti i prodotti che descrivo nella Nota presente, li ho preparati facendo agire 3 p. di acido solforico concentrato commerciale, sopra una soluzione di 1 p. di acido rodaninico e una quantità di aldeide poco superiore alle quantità molecolari in 5-10 p. di alcool, e scaldando poi per circa 1 ora a b. m. Approfittando poi della loro insolubilità nell'acqua, si provoca la separazione

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale della R. Università di Siena.
[2] G. Bargellini, Rend. R. Accademia dei Lincei, XV, 1° sem. 1906, p. 35.
[3] Andreasch e Zipser, M. 26, 1191.

completa del composto di condensazione, aggiungendo acqua al prodotto della reazione. Il rendimento fu sempre dell' 80-90 % e anche più.

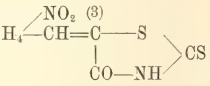
Per non stare a ripetere quello che dissi nella mia Nota precedente riguardo alle proprietà generali di questi composti, dirò soltanto che anche i prodotti che descrivo nella Nota presente hanno proprietà acide (si possono facilmente ottenere i loro sali di Ag, di Pb ecc.) e sono facilmente decomponibili dagli alcali. Inoltre, hanno anche questi proprietà coloranti, ma, come quelli precedentemente descritti, dànno luogo a colorazioni poco stabili.

Acido rodaninico e aldeide o-nitrobenzoica



L'*acido 2-nitrobenzilidenrodaninico* fu preparato da Bondzynsky [1] riscaldando a b. m. una soluzione alcoolica di acido rodaninico e aldeide o-nitrobenzoica con acido solforico concentrato. Il prodotto cristallizzato nell'alcool, si fonde, secondo il medesimo autore a 188-189°. Dal solfato ferroso in soluzione ammoniacale viene ridotto a *acido o-amidobenzilidenrodaninico*, che si deposita dall'alcool acquoso in cristallini color rosso sangue i quali a 200° divengono gialli e a 265-269° si decompongono.

Acido rodaninico e aldeide m-nitrobenzoica



Preparai questo nuovo prodotto di condensazione col metodo generale che ho seguito per tutti gli altri, facendo cioè agire l'acido solforico concentrato sopra una soluzione alcoolica di acido rodaninico e aldeide m-nitrobenzoica. Il prodotto greggio lo depurai con ripetute cristallizzazioni nell'acido acetico caldo. Seccato in stufa, dette all'analisi i seguenti risultati:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_6O_3N_2S_2$
C %	45,05	45,11
H %	2,50	2,25

Quest'*acido 3-nitrobenzilidenrodaninico* si presenta in aghetti di colore giallo citrino che a 245° cominciano a fondersi decomponendosi, e a 255° sono completamente fusi e decomposti.

È insolubile nella ligroina, discretamente solubile nel benzolo, etere, cloroformio, di più nell'alcool, acido acetico, etere acetico e acetone.

[1] Bondzynsky, M. 8, 349.

Acido rodaninico e aldeide p- nitrobenzoica C_6H_4(—NO_2 (4)) —CH=C(—S—CO—NH)—CS

Bondzynsky [1] preparò quest'*acido 4- nitrobenzilidenrodaninico* scaldando a b. m. con acido solforico concentrato una soluzione alcoolica di acido rodaninico e aldeide p- nitrobenzoica. Cristallizzato nell'alcool, si presenta in lunghi aghi gialli fusibili a 250-252°.

Io non ho preparato di nuovo questo prodotto di condensazione, come non ho creduto necessario ripreparare quello dell'acido rodaninico coll'aldeide o- nitrobenzoica, ma mi è sembrato utile riportare qui in succinto le loro proprietà per poterli confrontare col composto che io ho preparato dall'aldeide m- nitrobenzoica.

Benchè sia già stato ottenuto da Andreasch e Zipser [2], ho invece preparato di nuovo il prodotto di condensazione da

Ac. rodanin. e ald. p- dimetilaminobenzoica C_6H_4(—$N(CH_3)^2$ (4)) —CH=C(—S—CO—NH)—CS

Il prodotto greggio ottenuto facendo agire l'acido solforico sulla soluzione alcoolica di acido rodaninico e aldeide p- dimetilaminobenzoica, fu purificato facendolo cristallizzare più volte nell'alcool caldo da cui si deposita per raffreddamento in minutissimi aghetti rosso-sangue. Riscaldato in un tubetto capillare il prodotto puro ottenuto, osservai che soltanto a 240° comincia a fondersi in alcuni punti e non si fonde completamente che a 270° circa (Andreasch e Zipser dànno 200-246°).

Quest'*acido 4- dimetilaminobenzilidenrodaninico* è insolubile nella ligroina, discretamente nel cloroformio, etere, benzolo, di più nell'alcool, nell'acido acetico e nell'acetone.

Acido rodaninico e aldeide cuminica C_6H_4(—C_3H_7 (4)) —CH=C(—S—CO—NH)—CS

Il prodotto greggio ricavato dalla condensazione dell'acido rodaninico coll'aldeide cuminica in presenza di acido solforico lo purificai facendolo cristallizzare più volte nell'alcool diluito, finchè si fuse costantemente a 154-157° in un liquido rosso.

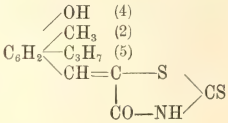
(1) Bondzynsky, loc. cit.
(2) Andreasch e Zipser, loc. cit.

Seccato a 100°, dette all'analisi i seguenti risultati:

	Trovato	Calcolato per $C_{13}H_{13}ONS_2$
C %	59,50	59,31
H %	5,11	4,95
N %	5,54	5,33

Quest'*acido 4-isopropilbenzilidenrodaninico* si presenta in forma di aghetti rossi (la di cui polvere è gialla) insolubili nella ligroina, discretamente solubili nel benzolo e nell'etere, facilmente nel cloroformio, alcool, acido acetico e acetone.

Acido rodaninico e aldeide timotinica

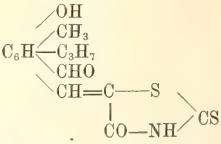


Per azione dell'acido solforico o dell'acido cloridrico sulla soluzione alcoolica di acido rodaninico e di aldeide timotinica, preparata secondo le indicazioni di Kobek [1], si forma una massa di lunghi cristalli lanosi di un bel colore aranciato. Questi, fatti cristallizzare nell'alcool diluito finchè si fusero costantemente a 220-221°, furono seccati a 100° e analizzati.

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{15}O_2NS_2$
C %	57,08	57,32
H %	5,39	5,12
N %	5,04	4,78

Questo prodotto di condensazione (*acido 4-ossi-2-metil-5-isopropilbenzilidenrodaninico*) si scioglie facilmente nell'alcool, etere, etere acetico, acido acetico, acetone, poco nel benzolo e nel cloroformio: è insolubile nella ligroina.

Acido rodaninico e dialdeide timotinica



Dalla dialdeide timotinica che preparai insieme coll'aldeide timotinica per azione del cloroformio e soda sul timolo, ottenni il prodotto di condensazione coll'acido rodaninico, impiegando come condensante l'acido solforico concentrato.

[1] Kobek, B. 16, 2096.

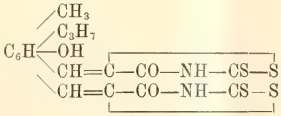
Il composto ottenuto fu purificato facendolo cristallizzare nell'alcool, finchè si fuse costantemente a 239-240°.

Seccato a 100°, dette all'analisi i seguenti risultati:

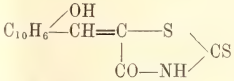
	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_{15}O_2NS_2$
C %	56,22	56,07
H %	4,75	4,68
N %	4,43	4,36

Questo prodotto di condensazione di una molecola di acido rodaninico con una di dialdeide timotinica, forma aghetti gialli solubili nell'alcool, etere, etere acetico, acetone, acido acetico, poco nel benzolo, insolubili nella ligroina, solubilissimi nel cloroformio.

Credo conveniente di far qui rilevare che non mi è stato possibile ottenere il composto



per condensazione di una molecola di dialdeide timotinica con due molecole di acido rodaninico in presenza di acido solforico o di acido cloridrico. E neppure potei ottenerlo facendo agire, in presenza di acido solforico, una molecola di acido rodaninico con una molecola del prodotto di condensazione sopra descritto nel quale ha reagito coll'acido rodaninico soltanto uno (e per ora non si può dire quale) dei due gruppi aldeidici della dialdeide.

Acido rodaninico e aldeide β-ossinaftoica 

Preparai questo prodotto di condensazione facendo agire in soluzione alcoolica, in presenza di acido solforico, l'acido rodaninico sull'aldeide β-ossinaftoica che gentilmente mi fu inviata dai sigg. Betti e Mundici. Il prodotto greggio fu purificato facendolo cristallizzare nell'alcool diluito caldo, da cui per raffreddamento si deposita in aghetti di colore rosso marrone scuro, che a 210° cominciano a annerirsi e a 220° sono completamente fusi e decomposti.

Seccato a 100°, dette all'analisi i seguenti risultati:

	Trovato	Calcolato per $C_{14}H_9O_2NS_2$
C %	58,40	58,53
H %	3,39	3,13

È insolubile nella ligroina, mentre si scioglie facilmente nell'etere, benzolo, cloroformio, acetone, acido acetico e alcool.

Fisiologia. — *Sulla Fisiologia della respirazione.* I. *Osservazioni su di un caso di fistola bronchiale nell'uomo.* Nota di V. Ducceschi, presentata dal Socio L. Luciani.

Patologia vegetale. — *Ricerche intorno al modo di caratterizzare le alterazioni prodotte alle piante coltivate dalle emanazioni gassose degli stabilimenti industriali.* Nota del dott. Ugo Brizi, presentata dal Socio G. Cuboni.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna dà il triste annuncio della morte del Socio prof. Aliprando Moriggia, mancato ai vivi il 25 gennaio 1906; apparteneva il defunto all'Accademia, per la Fisiologia, sino dal 7 gennaio 1872.

Il Socio Bassani legge una Commemorazione del defunto accademico sen. prof. G. Scarabelli Gommi Flamini.

Questa Commemorazione sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle del Socio Bassani, del Corrispondente Fusari e del Socio straniero Pflueger: fa inoltre menzione del vol. I del *Catalogo fotografico del cielo*, pubblicato dall'Osservatorio di Bordeaux.

Il Socio Millosevich fa omaggio a nome dell'autore sig. A. Sauve, delle due pubblicazioni: *Spettroelioscopio; Filtro spettroscopico.*

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio B. Grassi, a nome anche del Socio Foà, relatore, legge una Relazione colla quale si propone la inserzione nei volumi accademici, di un lavoro del prof. A. Cesaris Demel, avente per titolo: *Sulla varia tingi-*

bilità e sulla differenziazione della sostanza cromatica contenuta in alcuni eritrociti.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

CORRISPONDENZA

Il Presidente Blaserna presenta un piego suggellato, trasmesso dal prof. C. Gregory perchè sia conservato negli Archivi accademici.

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti:

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed Arti di Barcellona; la R. Società delle scienze di Upsala; le Società Reali di Londra e di Vittoria; l'Accademia delle scienze di Nuova York; la Società zoologica di Tokyo; la Società geologica di Washington; la Società geografica del Cairo; il Museo di storia naturale di Nuova York; le Università di Cambridge Mass., di Glasgow, di Upsala; la R. Scuola Navale superiore di Genova; gli Osservatorî di San Fernando, di Praga e di Cambridge Mass.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 novembre 1905.

Amodeo F. — Gli Istituti accademici di Napoli intorno al 1800. (Memoria letta all'Accademia Pontaniana nelle tornate del 5 marzo e 5 novembre 1905. Napoli, 1905. 4°.

Angelis (de) d'Ossat G. — Bonifica idraulica del pantano di Granaraccio nella campagna romana. (Estratto dal Bollettino della Società degli Ingegneri e degli Architetti italiani, 1905, n. 50). Roma. 1905. 4°.

Baeyer (von) A. — Gesammelte Werke. Herausgegeben zur Feier des siebzigsten Geburtstages des Autors von seinen Schülern und Freunden. Vol. 1-2. Braunschweig, 1905. 8°.

Bianchi L. — Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadratiche rotonde. (Memoria). Roma, 1905. 4°.

Boccardi G. — L'Annuario astronomico dell'Osservatorio di Torino pel 1905. Fatti e considerazioni. (Estratto dai Rend. e Mem. della R. Accad. di Scienze, Lettere e Arti dei Zelanti di Acireale. Vol. III, serie 3ª, Classe di Scienze). Acireale, 1905. 8°.

Boet G. — Le segnalazioni marittime. (Istituto idrografico della Rª. Marina). Genova, 1905. 4°.

Bra. — Recherches microbiologiques sur l'épilepsie. (Extrait des Archives de Neurologie, 1905). Paris, 1905. 8°.

Comune di Venezia. Case popolari. Bergamo, 1905. 4°.

Cooke W. E. — Meteorological Observations made at the Perth Observatory and other places in Western Australia during the Year 1903, under the direction of C. W. E. Perth, 1904. 4°.

Guidi C. — Le costruzioni in beton armato. Appendice con 5 tavole e 46 figure nel testo. (Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni date dall'Ing. Prof. C. G. nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri in Torino). Torino, 1906. 8°.

Lustig A. — Trattato di Patologia Generale. Seconda edizione in gran parte rifatta, riveduta ed ampliata. Vol. 2°. Milano, 1906. 8°.

Mancini E. — L'industria frigorifica in Italia. Relazione a S. E. il Ministro di Agricoltura, Industria e Commercio. (Estratto dagli Annali dell'Industria e del Commercio, 1905). Roma, 1905. 8°.

Margerie (de) Emm. — La Carte bathymétrique des Océans et l'œuvre de la Commission internationale de Wiesbaden. (Extrait des Annales de Géographie, tome XIV, 1905. N° 78 du 15 Nov. 1905). Paris, 1905. 8°.

Pascal E. — Corsi di analisi superiore tenuti negli anni 1903-04 e 1904-05 nell'Universitá di Pavia. (Programmi e Riassunti di corsi universitari). Genova, 1905. 8°.

Pettit A. — Description des encéphales de *Grampus griseus* Cuv., de *Steno frontatus* Cuv., et de *Globicephalus melas* Traill, provenant des campagnes du yacht Princesse-Alice. (Résultats des Campagnes scientifiques accomplies sur son yacht par Albert 1er prince souverain de Monaco, fasc. XXXI).

The Centennial of the United States Military Academy at West Point, New York. 1802-1902. Vol. 1-2. Washington, 1904. 8°.

Verson E. — Zur Entwicklung des Verdaungskanals bei Bombyx mori. Mit vier Tafeln. (Sonderabdruck aus: «Zeitschrift für Wissenschaftliche Zoologie». Leipzig, 1905. 8°.

Vivanti G. — Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers,

deutsch herausgegeben von A. Gutzmer in Halle a. S. Leipzig, 1906. 8°.

Wolf R. — Astronomische Mitteilungen. N°. XCVI, herausgegeben. von A. Wolfer. (Separatabdruch aus der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang L 1905). Zürich, 1905. 8°.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE
DELLE UNIVERSITÀ DI GREIFSWALD, HEIDELBERG, JENA.

I. — GREIFSWALD.

Beyer R. — Ueber Herpes zoster. Mitteilung eines Falles von generalisierter Lokalisation. Greifswald, 1905. 8°.

Blohm R. — Zur Kasuistik der malignen Limbustumoren. Greifswald, 1905. 8°.

Bontemps H. — Beiträge zur Darstellung der Glykocholsäure aus Rindergalle nebst Beobachtungen über die fällende Wirkung der Uransalze auf Gallensäuren. Greifswald, 1905. 8°.

Brunk A. — Zur Histogenese der Leberkrebses. Greifswald, 1904. 8°.

Deutelmoser P. — Ueber Enteritis phlegmonosa idiopathica. Greifswald, 1905. 8°.

Dibbelt E. — Ueber Retraktionsbewegungen des Auges nebst einem Fall von erworbener Retraktionsbewegung. Greifswald, 1905. 8°.

Dohmen F. J. — Darstellung der Berührungstransformationen in Konnexkoordinaten. Leipzig, 1905. 8°.

Dörschlag F. — Casuistischer Beitrag zur Tuberkulinbehandlung der Iritis tuberculosa. Greifswald, 1905. 8°.

Eichbaum R. — Ueber multiple Primärcarcinome. Greifswald, 1904. 8°.

Fischer A. — Zur Kenntnis des Oolemmas der Säugetiereizellen. Wiesbaden, 1905. 8°.

Gamerschlag W. — Ueber Wochenbett-Morbidität beobachtet am Material der königlichen Universitäts-Frauenklinik zu Greifswald während des Jahres 1903-04. Greifswald, 1904. 8°.

Gerlach S. — Ein Beitrag zur Lehre von Psychosen nach Kopfverletzungen. Greifswald, 1905. 8°.

Giese W. — Ueber ascendierende Pyelonephritis tuberculosa. Greifswald, 1904. 8°.

Gloeckner F. — Zur intrauterinen Ballonbehandlung. Greifswald, 1905. 8°.

Grossmann J. — Ueber einen Fall von Placenta praevia bei Zwillingen. Greifswald, 1905. 8°.

Hasselbach E. — Beiträge zur Syphilis der Blutgefässe. Greifswald, 1905. 8°.

Hattori T. — Ueber Resorption von Seifen aus isolierten Darmschlingen. Greifswald, 1905. 8°.

Heller R. — Die Bedeutung der Varizen für Schwangere und Gebärende und ihre Therapie. Greifswald, 1905. 8°.

Herrmann E. — Ueber das Vorkommen des Lithions im menschlichen Organismus. Greifswald, 1905. 8°.

Hoerburger A. — Der elektrische Kohlelichtbogen im Vakunm. Ein Beitrag zur Kenntnis des Lichtobogens. Greifswald, 1905. 8°.

Kako H. — Ueber die Funktionsprüfung des Darmes mittels der Schmidtschen Probekost. Greifswald, 1905. 8°.

Klose J. — Die alten Stromtäler Vorpommerns, ihre Entstehung, ursprüngliche Gestalt und hydrographische Entwickelung im Zusammenhange mit der Litorinasenkung. Greifswald, 1904. 8°.

Koppisch A. — Zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Leipzig, 1905. 8°.

Kratzi J. — Gruppen mit einer dreigliedrigen Untergruppe, die in keiner grösseren Untergruppe steckt. Leipzig, 1904. 8°

Lück K. — Der Mastdarmkrebs im jugendlichen Alter. Zusammenstellung von

120 Fällen aus der gesamten Literatur im Anschluss an eine Beobachtung in der chirurgischen Klinik zu Greifswald. Greifswald, 1904. 8°.

Mielke A. — Drei neue Fälle von congenitalen Spontanamputationen. Greifswald, 1905. 8°.

Mühlenkamp V. — Zur Kasuistik der Embryome. Greifswald, 1905. 8°.

Müller H. — Ein Fall von Obliteration der vena cava inferior und der venae hepaticae. Greifswald, 1905. 8°.

Ollendorff K. — Krankheit und Selbstmord. Beiträge zur Beurteilung ihres ursächlichen Zusammenhanges. Greifswald, 1905. 8°.

Peucker L. — Ueber Brucheinklemmung bedingt durch acut auftretende miliare Tuberkulose des Bauchfelles. Greifswald, 1904. 8°.

Rietz E. — Ueber Bildung und Spaltung von Diphenylmethan-Derivaten. Greifswald, 1905. 8°.

Roever C. — Ueber das « Terpinen » aus Carvon und die Hydroxylaminderivate des Benzyliden-Menthons und des Citronellals. Greifswald, 1905. 8°.

Röde P. — Ueber den Versuch einer Modifikation der Esbachschen Eiweissbestimmungsmethode durch Zuhilfenahme der Zentrifuge. Greifswald, 1905. 8°.

Schellack A. — Ein Beitrag zur Casuistik der Harnsteinbildung bei Rückenmarkserkrankungen. Greifswald, 1904. 8°.

Scheer W. — Die Verwendung des Kohärers zur Messung von Dielektricitätskonstanten. Greifswald, 1904. 8°.

Sonnenstuhl K. — Ueber Bildung und Umlagerung der Acylderivate von Körpern mit gemischten Funktionen. Greifswald, 1905. 8°.

Süss A. — Die Gruppen, die mit des allgemeinen projektiven Gruppe der ebene gleiche Zusammensetzung haben. Dresden, 1905. 8°.

Szymanski E. — Zur Kasuistik des Ulcus rodens corneae. Greifswald, 1905. 8°.

Thienemann A. — Biologie der Trichopteren-Puppe. (Mit 5 Tafeln). Jena, 1905. 8°.

Tlok A. — Ueber einen Fall von Lungennekrose bei einem Kinde. (Analogie zu dem anatomischen Befunde bei der Lungenseuche). Greifswald, 1904. 8°.

Winderlich A. — Quantitative Untersuchungen über die Thomsonschen Abstossungsversuche. Gräfenhainichen, 1905. 8°.

Witt J. — Ueber den Verlauf der Jodausscheidung beim Menschen. Greifswald, 1905. 8°.

Yoshimasu Y. — Beiträge zur Genese Therapie und Prognose des paranephritischen Abszesses. Greifswald, 1905. 8°.

Young H. — Beiträge zur Kenntnis der Konstitution des Tanacetons. Greifswald, 1905. 8°.

Zaubitzer R. — Ueber Beziehungen zwischen Konstitution und Reaktionsfähigkeit substituierter Oxybenzylamine. Greifswald, 1904. 8°.

II. — Heidelberg.

Adolphs A. — Verhalten des Krystallwassers wasserhaltiger Salze im Vakuum. Heidelberg, 1904. 8°.

Bambach A. — Ueber Dihydrazidchloride. Heidelberg, 1905. 8°.

Berg L. — Ueber Synthesen der Isölsäure $C_{15}H_3CH = CHCO_2H$. Heidelberg, 1905. 8°.

Böhme A. — Untersuchungen über den Einfluss des Kamphers auf das Froschherz. Leipzig, 1905. 8°.

Brian O. — Ein Fall von Transposition der arteriellen Herzostien. Heidelberg, 1905. 8°.

Busch A. — Ueber (Magen-) Tetanie. München, 1904. 8°.

Id. — Ueber Isobutylhydrazin und Diisobutylhydrazin. Heidelberg, 1904. 8°.

Dalmbert O. — Ueber die Isolierung von neunzehn höheren Normalparaffinen aus Braunkohlenparaffin durch Vacuumdestillation. Frankfurt a. M. 1905. 8°.

Deibel W. — Zur Kenntnis der Hydrazinverbindungen. Heidelberg, 1905. 8°.

Denks H. — Ueber das in der Thephrosia toxicaria enthaltene Gift. Heidelberg, 1904. 8°.

Deschauer J. — Ueber die Kondensation von Aceton mit Bernsteinsäureester. Heidelberg, 1905. 8.

Dreyfus G. — Die Therapie des Morbus Basedowii in den letzten Jahren. Wien, 1905. 4°.

Ebler E. — Analytische Operationen mit Hydroxylamin- und Hydrazinsalzen. Heidelberg, 1905. 8°.

Eckes H. — Ueber wahre und vorgetäuschte Extrauteringravidität. Worms, 1904. 8°.

Faitelowitz A. — Studie zur Kenntnis der Milch-Katalyse des Wasserstoffsuperoxydes und deren Lähmung durch negative Katalysatoren. Heidelberg, 1904. 8°.

Feiler E. — Ueber die bei Erkrankungen der Zähne auftretenden Reflexzonen der Gesichts- u. Kopfhaus (nach Head) und ihre Beziehung zur Alopecia areata. Wien, 1905. 8°.

Fischer F. — Ueber die Entstehungs- und Verbreitungsweise der Tuberkulose in den Schwarzwalddörfern Langenschiltach und Gremmelsbach. Würzburg, 1904. 8°.

Fleet R. R. — Ueber die Quadraturen von Integralen partieller Differentialgleichungen. Leipzig, 1904. 8°.

Fortner M. — Palladiumkatalyse des Wasserstoffsuperoxyds. Ludwigs hafen a Rh. 1904. 8°.

Fraenckel F. — Ueber die Existenzgebiete der Ferrosulfat-Hydrate. Heidelberg, 1905. 8°.

Fraenkel E. — Ueber Acute seröse Meningitis. Heidelberg, 1905. 8°.

Frankenstein H. — Beitrag zur Kenntnis der Acanthosis nigricans. Karlsruhe, 1004. 8°.

Franzen H. — Ueber den Ersatz der Hydroxylgruppe durch die Hydrazinogruppe. Heidelberg, 1904. 8°.

Frey H. — Ueber das Vorzeichen gewisser bestimmter Integrale. Heidelberg, 1905. 8°.

Frucht M. — Aenderung der Leitfähigkeit loser Contakte. Heidelberg, 1905. 8°.

Gernsheimer T. — Ikterus und Ascaridiasis. Mannheim, 1904. 8°.

Gockel H. — Ueber die Einwirkung von Hydrazinhydrat auf Monobrombernsteinsäurester. Heidelberg, 1905. 8°.

Greeff R. — Ueber die Darstellung von Alkylydrazinen und Alkylenhydrazinen. Heidelberg, 1904. 8°.

Gress G. — Beitrag zur Casuistik der Spina bifida occulta. Heidelberg, 1904. 8°.

Gross W. — Ein Fall von Agenesie der linken Lunge. Jena, 1905. 8°.

Gruters F. — Ueber die letzten Abbauprodukte der Stärke bei der Hydrolyse mit Oxalsäure unter besonderer Berücksichtigung der dierssenschen (lintnerschen) « Isomaltose ». Leipzig, 1904. 4°.

Hardt A. — Pleuraempyem und allgemeiner, acuter Pneumathorax beim Kinde. Heidelberg, 1905. 8°.

Hauck O. — Beitrag zur Leberresection. Heidelberg, 1904. 8°.

Herrmann H. — Endometritis glandularis oder Adenoma malignum? Ein Beitrag zur Lehre vom malignen Adenom. Berlin, 1905. 8°.

Huch F. — Ueber Magenkrebs im jugendlichen Alter. Frankenthal, 1904. 8°.

Hünecke G. — Zur Anatomie der Pleurothallidinae. Heidelberg, 1904. 8°.

Ibrahim J. B. — Die angeborene Pylorusstenose im Säuglingsalter. Berlin, 1905. 8°.

Junker F. — Beitrag zur pathologischen Anatomie der Syringomyelie. Weinheim, 1904. 8°.

Kophahn S. — Beiträge zur Anatomie der Rhynchosporeenblätter und zur Kenntnis der Verkieselungen. Leipzig, 1904. 8°.

Kaposi H. — Hat die Gelatine einer Einfluss auf die Blutgerinnung? Kritische und experimentelle Untersuchungen. Jena, 1904. 8°.

Karlowa H. — Ueber Derivate der $\varkappa$-Bromundecylsäure $C_{11}H_{21}BrO_2$. Heidelberg, 1905. 8°.

Kehrer E. — Die physiologischen und pathologischen Beziehungen der weiblichen Sexualorgane zum Tractus intestinalis und besonders zum Magen. Berlin, 1005. 8°.

Keller K. — Ueber hydrolytische Aufspaltung der Wollsubstanz. Heidelberg, 1905. 8°.

Kleemann L. — Die Waschereidörfer Ziegelhausen und Petersthal. Heidelberg, 1905. 8°.

Koeck K. — Ueber Tertiärbutylhydrazin und Di(tertiär)butylhydrazin. Heidelberg, 1904. 8°.

Krell C. — Ueber Dekamethylenimin. Heidelberg, 1904. 8°.

Langenbach F. — Beiträge zur Perityphlitisfrage aus der Heidelberger Medizinischen Klinik. Unter Benützung der Bäumler'schen Arbeit « Die Behandlung der Perityphlitis » und mit spezieller Berücksichtigung der Curschmann'schen Leucocytenzählung. Heidelberg, 1904. 8°.

Lebach H. — Ueber einige Derivate von Säureamiden. Heidelberg, 1904. 8°

Lefmann G. — Ueber psychomotorische Störungen in Depressionszuständen mit vier Tafeln. Leipzig, 1904. 8°.

Lenhard F. W. — Ueber die Einwirkung einiger Säureazide auf Harnstoff, und von Phenylcarbaminsäureazid auf Glykokoll. Heidelberg, 1905. 8°.

Lindenborn K. — Ueber Carcinon des Pharynx mit Einschluss der Tonsillen und seine Behandlung. Tübingen, 1904. 8°.

Loeb O. — Die Wirkung des Alkohols auf das Warmblüterherz. Leipzig, 1905. 8°.

Lust F. A. — Ueber einen Antikörper gegen Crotin im normalen Organismus. Braunschweig, 1904. 8°.

Mamroth R. — Ueber den Einfluss klimatischer Faktoren auf den Anbau von Brotgetreide. Frankfurt, 1904. 8°.

Merz L. — Ueber das Verhalten der Elemente und Verbindungen der Schwefelgruppe im Vakuum. Heidelberg, 1905. 8°.

Nowikoff M. — Untersuchungen über den Bau der Limnadia lenticularis L. Leipzig, 1905. 8°.

Oppenheim G. — Zur Verbreitung maligner Tumoren auf dem Blutwege und zur Casuistik des retrograden Transports in den Venen. Frankfurt a. M., 1905. 8°.

Otto E. — Ueber das Verhalten von Salzlösungen im Magen. Leipzig, 1905. 8°.

Pagenstecher H. E. — Drei Fälle von posttraumatischer, chronischer, spinaler Amyotrophie mit Berücksichtigung der übrigen aetiologischen Momente. Leipzig, 1905. 8°.

Peckert H. M. — Ueber Lokalanästhesie. Die zahnärztliche Lokalanästhesie mit besonderer Berücksichtigung der Präparate Dr. Riserts. Heidelberg, 1905. 8°.

Pfeil P. — Ueber den Einfluss der Nahrungsaufnahme auf die Ausscheidung der Harnsäure. Strassburg, 1903. 8°.

Pohl O. — Ueber die Einwirkung von Thiophenolen auf die Nitroderivate des Anthrachinons. Freiburg, i. Br., 1904. 8°.

Pol R. — Studien zur pathologischen Morphologie der Erythrocyten, insbesondere bei der Schwefelkohlenstoff- und Phenylhydrazinvergiftung. Heidelberg, 1905. 8°.

Pulcher J. — Zwillingsschwangerschaft in der Tube. Heidelberg, 1905. 8°.

Rohde E. — Die Farbenreaktionen der Eiweisskörper mit p- Dimethylaminobenzaldehyd und anderen aromatischen Aldehyden. Strassburg, 1905. 8°.

Rothmann A. — Zur Kenntnis der Dihydropyridinderivate. Heidelberg, 1904. 8°.

Rottmann W. — Ueber die Synthese n- propylirter und isopropylirter Benzolkohlenwasserstoffe. Heidelberg, 1905. 8°.

Samel O. — Ueber ein Hydrat des Carvons. Heidelberg, 1905. 8°.

Sautter R. A. — Ueber optisch aktive Benzolkohlenwasserstoffe. Heidelberg, 1904. 8°.

Scheidweiler T. — Ueber aromatische Selenverbindungen. Heidelberg, 1904. 8°.

Schenck (von) O. — Ueber die Kondensation von Valeraldehyd und Malonsäure durch organische Basen. Heidelberg, 1904. 8°.

Schmidt K. — Ueber hochmolekulare aliphatische Aldehyde. Heidelberg, 1904. 8°.

Schmidt L. — Ueber die Einwirkung von salpetriger Säure auf Aminopyrazole. München, 1904. 8°.

Schoenborn S. — Gefrierpunkts- und Leitfähigkeits Bestinmungen. Jhr praktischen Wert für die innere Medizin. Wiesbaden, 1904. 8°.

Schröder A. — Angina pectoris neben Arthritis urica und Diabetes mellitus. Strassburg, 1905. 8°.

Schröder O. — Beiträge zur Kenntnis der Bauchsinnesorgane (Bauchaugen) von Eunice viridis Gr. sp. (Palolo-Wurm). Leipzig, 1905. 8°.

Schubotz H. — Beiträge zur Kenntnis der Amoeba blattae Bütschuli und Amoeba proteus (Pall.). (Mit 2 Taf.). Jena, 1905. 8°.

Schultz I. — Ueber Imide $C_n.H_{2n} - {}_3NO_2$ hochmolekularer Bicarbonsäuren. Heidelberg, 1905. 8°.

Seligmann E. — Ueber den Einfluss des Camphers auf das Warmblüterherz. Berlin, 1904. 8°.

Stamm C. — Ueber Styrole der Mesitylenreihe und Kohlenwasserstoffe von der Art des Isodurols. Heidelberg, 1904. 8°.

Stern E. — Die chemishe Kinetick der Benzoin synthese (Cyanionenkatalyse). Leipzig, 1904. 8°.

Stockert W. — Fin Fall von Lymphosarkom der Thymus bei einem 36 jährigen Manne. Heidelberg, 1905. 8°.

Stoffel A. — Blasenmole. Berlin, 1905. 8°.

Suepfle K. — Beiträge zur Kenntnis der Vaccinekörperchen. Heidelberg, 1905. 8°.

Tiefenthal G. Gastro-enterostomie mittelst elastischer Ligatur. Eine experimental-studie. Tübingen, 1904. 8°.

Vetterlein R. — Beiträge zur Kenntnis der Teraconsäure. Heidelberg, 1904, 8°.

Vigelins O. Die wirtschaftliche und soziale Bedeutung der Freilandrosenkultur in Deutschland. Heidelberg, 1905. 8°.

Wedekind K. — Das Citron'sche Verfahren der Analyse des Mageninhalts verglichen mit dem Toepfer'schen. Heidelberg, 1904. 8°.

Weindel A. — Ueber Dihydrazidchloride. Heidelberg, 1904. 8°.

Wilke E. — Periodische Erscheinungen bei der Quecksilberkatalyse des Wasserstoffusperoxyds. Heidelb., 1904. 8°.

Wilmanns G. F. — Ueber die Säureimidohydrine. Bonn a Kh. 1904. 8°.

Zschock (von) F. — Erfahrungen über operative Frakturbehandtung an der Heidelberg chirurgischen Klinik. Heidelberg, 1904. 8°.

Zuelzer M. — Beiträge zur Kenntnis von Difflugia urceolata Carter. Heidelberg, 1904. 8°.

III. — Jena.

Auffenberg H. — Ueber die Abhängigkeit der thermischen Ausdehnungskoeffizienten von der Temperatur beim Quarz und einigen Gläsern mit anomal sich änderndem Elastizitätsmodul. Jeno, 1905. 8°.

Baehr E. — Abhildung einer unendlichen Ebene, die durch Aufschlitzen längs zweier senkrecht zueiuander stehenden Strecken zu einen zweifach zusammenhängenden Bereiche gemacht wird, auf ein Rechteck und einen Kreisring. Jena, 1905. 8.

Balser H. — Die im Jahre 1904 in der Universitäts-Augeklinik zu Jena am Linsensystem vorgenommenen Operationen. Jena, 1905. 8°.

Becker W. — Ueber den suprasymphysären Fascienquerschnitt nach Pfannenstiel und den extramedianen Längsschnitt nach Lennander. Jena, 1904. 8°.

Bieterich G. — Bericht über die vom Jahre 1893-1903 behandelten Fälle von Kalkverletzung des Auges. Jena, 1904. 8°.

Blendermann L. — Ein atypischer Fall von Raynaud'scher Krankheit. Lichtenhain. 1904. 8°.

Boegehold F. — Ableitung einiger Eigenschaften des Kegelschnittbüschels auf orthogonalen Invarianten und Kovarianten. Jena, 1904. 8°.

Buengner R. — Ueber Echinococcus im weiblichen Becken im Anschluss an einen in der Frauenklinik zu Jena beobachteten Fall. Jena, 1904. 8°.

Dölle R. — Orthogonale Invarianten der Circularkurven 3. Ordnung. Jena, 1905. 8°.

Dultz E. = Ulcera cutanea bei Hystorie. Jena, 1905. 8°.

Frank A. — Ein seltener Ausgang der multiplen cartilaginären Exostosen. Sangerhausen. 1905. 8°.

Fricke W. — Ueber Brechungsexponenten absorbierender Flussigkeiten im ultraviotetten Spektrum. Jena, 1904. 8°.

Gothan W. — Zur Anatomie lebender und fossiler Gimnospermen-Hölzer. Berlin, 1905. 8°.

Haubold W. — Ein Fall von Retinitis chronica (Retinitis nach von Hippel). Jena, 1905. 8°.

Hebeler H. — Ueber den Wärmeverbrauch beim Auflösen von Salzen in der wässrigen Lösung. Jena, 1905, 8°.

Herrmann W. — Ueber Gallensteinileus. Jena, 1904. 8°.

Klinkhardt W. — Beiträge zur Entwickelungzgeschichte der Kopfganglien und Sinneslinien der Selachier. Jena, 1905. 8°.

Kniep H. — Ueber die Bedeutung des Milchsafts der Pflanzen. München, 1904. 8°.

Kracht O. — Ueber Hemiatrophia faciei progressiva. Egeln, 1905. 8°.

Krüss P. — Ueber die Absorption organischer Farbstoffe im Ultraviolett. Leipzig, 1905. 8°.

Lange F. — Experimentelle Untersuchungen über den elektrokalorischen Effekt beim brasilianischen Turmalin. Jena, 1905. 8°.

Lange G. — Ueber einen Fall von Tetanus nach Orbital-Stichverletzung. Jena, 1905. 8°.

Langhorst F. — Zur Kasuistik der Lidverletzungen. Jena, 1904. 8°.

Lorenz R. — Die Eigenschwingungen rotierender Stäbe. Göttingen, 1904. 8°.

Mangold E. — Untersuchungen über die Endigung der Nerven in den quergestreiften Muskeln der Arthropoden. Jena, 1905. 8°.

Meyer G. C. — Ueber den Aminoäthyläther und Methylaminoäthyläther. Jena, 1904. 8°.

Müller A. — Die Assimilationsgrösse bei Zucker- und Stärkeblättern. Leipzig, 1904. 8°.

Müller O. — Ueber den Nachweis von Typhusbacillen im Trinkwasser mittels chemischer Fällung-Methoden, insbesondere durch Fällung mit Eisenoxychlorid. Leipzig, 1905. 8°.

Patzschke G. — Ueber Influenza und Polyneuritis. Im Anschluss an einen Fall von Polyneuritis nach Influenza. Jena, 1905. 8°.

Plathner A. — Zur palliativen Behandlung des Uteruscarcinoms. Jena, 1904. 8°.

Rahm F. — I. Ueber die Unlagerung des Methylenbisace tessigesters in einen cyklischen Ketonalkohol. — II. Ueber die Konstitution der sogenannten Hagemannschen Ester. Jena, 1904. 8°.

Rasch F. — Die in der Universitätsaugenklinik zu Jena im Jahre 1904 ausgeführten Operationen mit besonderer Berücksichtigung der Operationen am Tränensack. Jena, 1905. 8°.

Reichmann V. — Beitrag zur Kenntnis der direkten Sehnervenverletzungen. Jena, 1905. 8°.

Reid J. H. — Beiträge zur Kenntnis der Aldehydammoniake. Jena, 1904. 8°.

Rule A. — Ueber Abkömmlinge des Biscyclopentadiens. Ein Beitrag zur Polymerisation ungesättigter Kohlenwasserstoffe. Jena, 1904. 8°.

Schander R. — Ueber die physiologische Wirkung der Kupfervitriolkalkbrühe. Merseburg, 1904. 8°.

Schwarbach E. — Ein Fall von Nekrose der Lider und des Orbitalinhaltes nach Trauma. Aus der Augenklinik zu Jena. Jena, 1905. 8°.

Sostmann A. — Ueber Darmruptur und über eine nach Sturz aufgetretene Duodenalruptur mit ungewöhnlichen Verlaufe. Jena, 1904. 8°.

Spence D. — Ueber die Isomerieerscheinung bei den sogenannten Hagemannschen Estern. Jena, 1905. 8°.

Stargard P. — Ueber Neurome: Mitteilung der in der chirurgischen Universitäts-Klinik zu Jena beobachteten stamm- und Rankenneurome. Danzig, 1905. 8°.

Stoll H. — Temperaturmessungen bei Operationen. — Jena 1904. 8°.

Taubert C. — Beitrag zur Kenntnis polymorpher Körper. Blankenhain Thür, 1905. 8°.

Wette F. — Ueber Sensibilitätsstörungen am Rumpf bei Tabes dorsalis. Jena, 1904. 8°.

Wicke F. — Ueber ultra-bernoallische und ultra-eulersche Zahlen und Funktionen und deren Anwendung auf die Summation von unendlichen Reihen. Dresden, 1905. 8°.

V. C.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1906). Fasc. 3°. 1° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 7°-8°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-V.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 febbraio 1906.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Millosevich. Osservazioni delle comete 1905 b e 1906 a fatte all'equatoriale di 39 cm. dell'Osservatorio astronomico al Collegio Romano . . . . . Pag. 147
Battelli. Resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza . . . . . » 148
Parona. Fossili turoniani della Tripolitania. . . . . » 160
Pavanini. Sul problema dei due corpi nella ipotesi di un potenziale newtoniano ritardato (pres. dal Corrisp. *Levi-Civita*) (*) . . . . . » 164
Tieri. Modificazione del detector magneto-elastico del Sella (pres. dal Corrisp. *Sella*) . . » »
Sauve. Perfezionamenti allo Spettroeliioscopio (pres. dal Socio *Millosevich*) . . . . . » 168
Monti. Sulla probabile origine della distribuzione dei temporali italiani a seconda delle stagioni (pres. dal Corrisp. *Battelli*). . . . . » 173
Teglio. Contributo allo studio del pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström (pres. dal Socio *Blaserna*) (*) . . . . . » 176
Martelli. Nuovi studi sul Mesozoico montenegrino (pres. dal Socio *De Stefani*) . . . . » »
Bargellini. Prodotti di condensazione dell'acido rodaninico colle aldeidi (pres. dal Socio *Paternò*). . . . . » 181
Ducceschi. Sulla fisiologia della respirazione. I. Osservazioni su di un caso di fistola bronchiale nell'uomo (pres. dal Socio *Luciani*) (*) . . . . . » 186
Brizi. Ricerche intorno al modo di caratterizzare le alterazioni prodotte alle piante coltivate dalle emanazioni gassose degli stabilimenti industriali (pres. dal Socio *Cuboni*) (*) . » »

PERSONALE ACCADEMICO

Blaserna (Presidente). Dà annuncio della morte del Socio prof. *Aliprando Moriggia* . . » »
Bassani. Commemorazione del Socio senatore prof. *G. Scaramelli Gommi Flamini* . . » »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Cerruti (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci *Bassani, Fusari* e *Pflueger*; fa inoltre menzione di un volume pubblicato dall'Osservatorio di Bordeaux . . . . . » »
Millosevich. Fa omaggio di due pubblicazioni del sig. *Sauve*. . . . . » »

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Foà (relatore) e *Grassi.* Relazione sulla Memoria del prof. *A. Cesaris Demel* intitolata: « Sulla varia tingibilità e sulla differenziazione della sostanza cromatica contenuta in alcuni eritrociti » . . . . . » »

CORRISPONDENZA

Blaserna (Presidente). Presenta un piego, inviato dal prof. *C. Gregory* perchè sia conservato negli Archivi dell'Accademia . . . . . » 187
Cerruti (Segretario). Dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti . . . » »
Bullettino bibliografico . . . . . » 188

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. *Roma 18 febbraio 1906.* **N. 4.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 *febbraio* 1906.

Volume XV.° — Fascicolo 4°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie pro priamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 febbraio 1906.

F. D'Ovidio, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sul problema dei due corpi nella ipotesi di un potenziale newtoniano ritardato.* Nota di Giulio Pavanini, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

L'ipotesi che le azioni a distanza si propaghino con velocità finita, fu dall'elettrodinamica trasportata all'astronomia, nella speranza che essa valesse a render conto di alcune poche ed eccezionali divergenze fra le osservazioni e le previsioni teoriche basate sulla legge di Newton.

Così Zöllner (1) applicò al moto dei corpi celesti la legge di Weber, Lévy (2) quella di Riemann.

Fra le leggi di propagazione, che sono state considerate nella elettrodinamica, è senza alcun dubbio particolarmente notevole quella che si fonda sulla sostituzione dei *potenziali ritardati* ai potenziali ordinari (3).

L'impiego di tali potenziali in astronomia non fu per anco discusso, ed è perciò che io mi permetto di farne un primo tentativo nella presente Nota, trattando del problema dei due corpi.

Arrivo facilmente a stabilire le equazioni che reggono il moto relativo, le quali sono insieme differenziali e funzionali. Per quanto interessante dal

(1) *Principien einer electrodynamischen Theorie der Materie*, Leipzig 1876.

(2) Comptes rendus, t. CX, pag. 545.

(3) Cfr. T. Levi-Civita, *Sul campo elettromagnetico generato dalla traslazione uniforme di una carica elettrica.* Nuovo Cimento, serie V, vol. VI. Pisa, settembre 1903.

punto di vista analitico, la integrazione rigorosa di queste equazioni sembra presentare gravissime difficoltà. Tuttavia per lo scopo astronomico è sufficiente considerare il caso in cui la velocità di propagazione sia grandissima e ci si limiti alla prima approssimazione. Si è allora ricondotti ad equazioni differenziali ordinarie, che si potrebbero rigorosamente integrare a mezzo di funzioni ellittiche. Però in questo modo non apparirebbero direttamente i caratteri intuitivi del movimento. Ho quindi preferito di interpretare i termini addizionali, che si presentano nelle equazioni del moto, come componenti di una forza perturbatrice e di determinare gli effetti di tale forza col solito metodo della variazione delle costanti arbitrarie.

Ecco i risultati principali ottenuti:

la forza perturbatrice è definita per mezzo degli elementi del moto relativo; contiene il fattore A^2, essendo $\frac{1}{A}$ la velocità di propagazione dell'attrazione, ed è interamente situata sul piano dell'orbita;

l'asse maggiore e con esso quindi il moto medio non subiscono che variazioni periodiche;

le variazioni secolari dell'eccentricità e non s'annullano per $e = 0$; ciò porterebbe a concludere non essere possibile l'esistenza d'un moto relativo rigorosamente circolare.

Ricorderò ancora come già Lehmann-Filhès (1) ed Hepperger (2) considerarono gli effetti dovuti alla velocità di propagazione della gravitazione. Essi partono, però, dalla espressione dell'intensità della forza newtoniana modificata per questa causa, anzichè da quella del potenziale. In tal guisa le disuguaglianze riescono espresse per mezzo degli elementi del moto assoluto, donde l'impossibilità di trarne risultati positivi, applicandole ad esempi del sistema planetario, causa l'ignoranza in cui ci troviamo circa il moto del sole. Notisi ancora, che le disuguaglianze stesse risultano proporzionali all'inversa A della supposta velocità di propagazione, il che conduce Hepperger alla strana conclusione che tale velocità debba essere più di 500 volte quella della luce. Ciò si evita con la mia ipotesi, in quanto essa dà origine a disuguaglianze tutte affette dal fattore A^2.

1. *Potenziale newtoniano ritardato.* — Consideriamo una massa M la quale sia animata d'un movimento noto. Sia P_1 la posizione ch'essa occupa in un generico istante t e P rappresenti un punto sul quale agisce la forza newtoniana dovuta alla massa M. Conformemente alla legge di Newton il potenziale unitario delle azioni esercitate da P_1 su P sarebbe $\frac{1}{r}$.

(1) *Astronomische Nachrichten,* n. 2630; 1884.

(2) *Sitzungsberichte der Mathematiche Classe,* Vienna 1888.

Introducendo l'ipotesi che le azioni a distanza si propaghino in linea retta con velocità finità, si deduce [1] invece come espressione del potenziale

$$F = \frac{1}{r} - A \frac{d\frac{1}{r}}{dA},$$

dove A rappresenta il valore inverso della suddetta velocità, ed r la distanza del punto potenziato P, non precisamente da P_1, ma da quella posizione anteriore

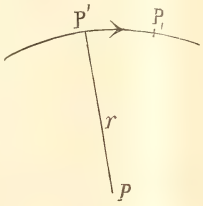


Fig. 1.

P' (sulla traiettoria della massa potenziante) donde azioni propagantesi con velocità $\frac{1}{A}$ arrivano in P proprio nell'istante considerato.

Così F sarà l'espressione del *potenziale newtoniano ritardato*, e la costante $\frac{1}{A}$ rappresenterà la velocità colla quale si propaga la gravitazione.

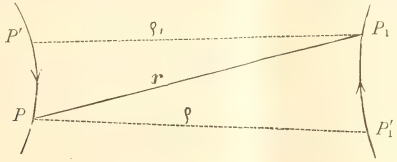


Fig. 2.

2. *Equazione del moto.* — Supponiamo che due corpi di masse rispettive m ed m_1 occupino in un generico istante t le posizioni, riferite ad un sistema di assi fissi, $P(\xi, \eta, \zeta)$, $P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$; r rappresenti la distanza $\overline{PP_1}$.

Indichiamo con ϱ la distanza $\overline{PP'_1}$ essendo P'_1 la posizione occupata dal corpo di massa m_1 nell'istante $t - A\varrho$. Attribuiamo a ϱ_1 analogo significato. Perciò

$$\varrho = \overline{PP'_1} = r(t - A\varrho) \quad \text{e} \quad \varrho_1 = \overline{P_1P'} = r(t - A\varrho_1).$$

[1] Cfr. T. Levi-Civita. loc. cit. pag. 20.

In seguito a quanto dicemmo nel numero precedente, rappresentando rispettivamente con U ed U_1 i potenziali della forza che sollecita P e di quella che sollecita P_1, avremo:

$$U = fm_1 \left(\frac{1}{\varrho} - A \frac{d \frac{1}{\varrho}}{dA} \right),$$

$$U_1 = fm \left(\frac{1}{\varrho_1} - A \frac{d \frac{1}{\varrho_1}}{dA} \right),$$

Le equazioni che definiscono il moto di P sono adunque:

$$(1) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad , \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \quad , \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \; ;$$

mentre il moto di P_1 è determinato dalle equazioni analoghe:

$$(2) \qquad \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} \quad , \quad \frac{d^2\eta_1}{dt^2} = \frac{\partial U_1}{\partial \eta_1} \quad , \quad \frac{d^2\zeta_1}{dt^2} = \frac{\partial U_1}{\partial \zeta_1} .$$

Sviluppando ϱ in serie di Taylor ed arrestandosi alle seconde potenze abbiamo

$$\varrho = r \left\{ 1 - A \frac{dr}{dt} + A^2 \left(\overline{\frac{dr}{dt}}^2 + \frac{r}{2} \frac{d^2r}{dt^2} \right) \right\},$$

dove le derivate s'intendono riferite all'istante t. Da questa espressione di ϱ risulta

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + A \frac{dr}{dt} - A^2 r \frac{d^2r}{dt^2} \right\} ;$$

ne segue quindi

$$U = fm_1 \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{2} A^2 \frac{d^2r}{dt^2} \right\} .$$

Analogamente

$$U_1 = fm \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{2} A^2 \frac{d^2r}{dt^2} \right\} .$$

Poniamo

$$\xi - \xi_1 = x \quad , \quad \eta - \eta_1 = y \quad , \quad \zeta - \zeta_1 = z ,$$

cosicchè x, y, z sono le coordinate di P_1 riferite ad un sistema di assi paralleli agli assi fissi ed avente l'origine in P: ne segue

$$r^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Dalle espressioni di U, U_1 ed r si deduce allora

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = fm_1 \left\{ -\frac{x}{r^3} + \frac{A^2}{2} \frac{d^2 \frac{x}{r}}{dt^2} \right\},$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \xi_1} = fm \left\{ \frac{x}{r^3} - \frac{A^2}{2} \frac{d^2 \frac{x}{r}}{dt^2} \right\}.$$

Le equazioni del moto di P_1 rispetto a P si ottengono sottraendo le (2) dalle (1): esse sono adunque

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2x}{r^3} &= \frac{k^2A^2}{2} \frac{d^2 \frac{x}{r}}{dt^2}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2y}{r^3} &= \frac{k^2A^2}{2} \frac{d^2 \frac{y}{r}}{dt^2}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2z}{r^3} &= \frac{k^2A^2}{2} \frac{d^2 \frac{z}{r}}{dt^2}, \end{aligned} \right.$$

dove

$$k^2 = f(m_1 + m).$$

Confrontando le (3) con le equazioni ben note del moto ellittico risulta che

$$(4) \qquad X = \frac{k^2A^2}{2} \frac{d^2 \frac{x}{r}}{dt^2}, \quad Y = \frac{k^2A^2}{2} \frac{d^2 \frac{y}{r}}{dt^2}, \quad Z = \frac{k^2A^2}{2} \frac{d^2 \frac{z}{r}}{dt^2}$$

sono le componenti della forza perturbatrice dovuta alla velocità di propagazione della attrazione newtoniana.

È notevole come queste componenti non contengano le prime potenze di A, e dipendano solo dagli elementi del moto relativo.

3. *Componenti* S, T, W *della forza perturbatrice.* — Allo scopo di determinare gli effetti della forza perturbatrice dovuta alla velocità di propagazione della attrazione newtoniana, ci serviremo dalle equazioni che danno la variazione delle costanti arbitrarie. Per l'uso di tali equazioni necessita conoscere le componenti della forza perturbatrice stessa secondo la direzione del raggio vettore (S), della normale a questo raggio contenuta nel piano dell'orbita osculatrice (T), e della normale a questo piano (W).

Indicheremo i coseni degli angoli che queste direzioni formano con gli assi x, y, z a norma dello specchietto

$$\begin{array}{c|c|c|c} & x & y & z \\ \hline S & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline T & \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \hline W & \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{array}.$$

Avendo indicato con X, Y, Z le componenti della forza perturbatrice secondo gli assi x, y, z, risulta:

$$\begin{aligned} S &= X\alpha + Y\beta + Z\gamma\,, \\ T &= X\alpha' + Y\beta' + Z\gamma'\,, \\ W &= X\alpha'' + Y\beta'' + Z\gamma''. \end{aligned}$$

Per esprimere in forma definitiva S, T, W ricordiamo che, rappresentando con p, v, w rispettivamente il *parametro dell'orbita*, la *longitudine vera*, e l'*anomalia vera*, abbiamo:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos w}\,, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{dw}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2}\,;$$

$$\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{\partial\alpha'}{\partial v}\,, \quad \beta = \frac{y}{r} = -\frac{\partial\beta'}{\partial v}\,, \quad \gamma = \frac{z}{r} = -\frac{\partial\gamma'}{\partial v}\,;$$

$$\alpha' = \frac{\partial\alpha}{\partial v}\,, \quad \beta' = \frac{\partial\beta}{\partial v}\,, \quad \gamma' = \frac{\partial\gamma}{\partial v}\,.$$

Dalle (4) si deduce inoltre

$$X = \frac{k^2A^2}{2}\left\{\frac{x''}{r} + 2x'\frac{d\frac{1}{r}}{dt} + x\frac{d^2\frac{1}{r}}{dt^2}\right\},$$

$$Y = \frac{k^2A^2}{2}\left\{\frac{y''}{r} + 2y'\frac{d\frac{1}{r}}{dt} + y\frac{d^2\frac{1}{r}}{dt^2}\right\},$$

$$Z = \frac{k^2A^2}{2}\left\{\frac{z''}{r} + 2z'\frac{d\frac{1}{r}}{dt} + z\frac{d^2\frac{1}{r}}{dt^2}\right\},$$

e per le formule ricordate sopra

$$x' = \frac{dr}{dt}\alpha + r\frac{dv}{dt}\alpha'$$

$$x'' = \frac{d^2r}{dt^2}\alpha + 2\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dt}\alpha' + \frac{d^2v}{dt^2}\alpha' - r\overline{\frac{dv}{dt}}^2\alpha.$$

Relazioni analoghe si trovano per y', y'', z', z''.

Abbiamo dunque

$$S = \frac{k^2 A^2}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{dt} - \overline{\frac{dv}{dt}}^2 + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\frac{1}{r}}{dt} + r\frac{d^2\frac{1}{r}}{dt^2}\right) = -\frac{k^2 A^2}{2}\overline{\frac{dv}{dt}}^2,$$

$$T = \frac{k^2 A^2}{2}\frac{d^2 v}{dt^2};$$

ed infine

$$\begin{cases} S = -\dfrac{k^4 A^2}{2p^3}(1 + e\cos w)^4, \\ T = -\dfrac{k^4 A^2}{p^3} e \operatorname{sen} w (1 + e\cos w)^3, \\ W = 0. \end{cases}$$

Dall'essere $W = 0$ si deduce che la forza perturbatrice è interamente situata sul piano dell'orbita.

S e T risultano poi funzioni della sola anomalia vera.

4. *Disuguaglianze secolari.* — Per la determinazione di queste disuguaglianze partiremo dalle note equazioni, le quali danno la variazione delle costanti arbitrarie, equazioni che per maggior chiarezza trascriveremo [1]:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^3}{k\sqrt{p}}\left\{e \operatorname{sen} w\, S + \frac{p}{r} T\right\}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{p}}{k}\left\{\operatorname{sen} w\, S + (\cos u + \cos w)\, T\right\}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r}{k\sqrt{p}}\cos\eta\, W$$

$$\operatorname{sen}\varphi\frac{d\theta}{dt} = \frac{r}{k\sqrt{p}}\operatorname{sen}\eta\, W$$

$$e\frac{d\varpi}{dt} = 2e\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\sqrt{p}}{k}\left\{-\cos w\, S + \left(1 + \frac{r}{p}\right)\operatorname{sen} w\, T\right\}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2r}{k\sqrt{p}} S + \frac{e^2}{1 + \sqrt{1 - e^2}}\frac{d\varpi}{dt} + 2\sqrt{1 - e^2}\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}\frac{d\theta}{dt}.$$

In queste formule è noto che a, φ, θ, ϖ, ε, η, u, rappresentano rispettivamente, il *semi grand'asse*, l'*inclinazione*, la *longitudine del nodo*, la *longitudine media all'epoca* 0, *l'argomento della latitudine*, e l'*anomalia eccentrica*: sappiamo ancora che

$$\cos u = \frac{\cos w + e}{1 + e\cos w}.$$

[1] Cfr. ad es. Tisserand, *Mécanique Céleste*, t. I, pag. 433.

Sostituendo in queste equazioni i valori di S, T, W dedotti nel numero precedente, e ricordando che $dt = \frac{r^2}{k\sqrt{p}}\, dw$, si ha:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

$$\frac{da}{dw} = -\frac{3A^2k^2}{p^2}\, e \operatorname{sen} w\,(1 + e\cos)^2,$$

$$\frac{de}{dw} = -\frac{A^2k^2}{2p} \operatorname{sen} w\,(1 + 2e^2 + 6e\cos w + 3e^2\cos^2 w),$$

$$\frac{d\varpi}{dw} = -\frac{A^2k^2}{2ep}\,\{-4e + (1 - 2e^2)\cos w + 6e\cos^2 w + 3e^2\cos^3 w\},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dw} = \frac{A^2k^2}{\sqrt{ap}}(1 + e\cos w) + \frac{e^2}{1 + \sqrt{1 - e^2}}\frac{d\varpi}{dw}.$$

Integrando queste equazioni e tenendo conto dei soli termini secolari abbiamo i valori delle cercate disuguaglianze: cioè

$$\begin{cases} \delta a = 0, \\ \delta e = -\frac{A^2k^2}{2p}\left(1 + \frac{7}{2}e^2\right) w, \\ \delta\varpi = -\frac{A^2k^2}{2p}\, w, \\ \delta\varepsilon = -\frac{A^2k^2}{2p}\,(1 - 3\sqrt{1 - e^2})\, w. \end{cases}$$

Vediamo così anzitutto che (almeno quando non si tenga conto dei termini di ordine superiore al secondo) la forza perturbatrice da noi considerata non influisce affatto sulla posizione del nodo e sulla inclinazione.

Essa determina sole variazioni periodiche sull'asse dell'orbita, e con esso perciò anche sul moto medio, mentre Hepperger trova che l'effetto maggiore della forza in questione si manifesta appunto sulla variazione secolare dell'asse.

Le perturbazioni di e, ϖ, ε, dipendono solo dalle masse, dall'asse, e dall'eccentricità.

Se si trascura il quadrato dell'eccentricità, le variazioni sono le medesime per i tre elementi e, ϖ, ε.

Notiamo in ultimo come non è ammissibile con le nostre ipotesi un movimento circolare poichè δe si mantiene diverso da 0 per $e = 0$.

Fisica matematica. — *Alcune applicazioni dell'integrale di Fourier.* Nota del dott. L. ORLANDO, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Nel testo di Weber [1], ottimo libro, che io direi necessario ad ognuno che studî fisica matematica, il problema dell'*equilibrio* elastico del suolo isotropo è ricondotto all'integrale di Fourier. Noi non vogliamo qui riassumere tale metodo, ma far vedere come possa utilmente applicarsi anche al problema, certamente meno semplice, ma più utile in pratica [2] delle *vibrazioni* del suolo isotropo.

Prescindendo dalle forze di massa, noi possiamo, per i piccoli moti elastici dei solidi omogenei ed isotropi, scrivere, come è noto, le seguenti equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} (\Omega^2-\omega^2)\dfrac{\partial\Theta}{\partial x}-\mathfrak{D}_\omega\, u=0 \\ (\Omega^2-\omega^2)\dfrac{\partial\Theta}{\partial y}-\mathfrak{D}_\omega\, v=0 \\ (\Omega^2-\omega^2)\dfrac{\partial\Theta}{\partial z}-\mathfrak{D}_\omega\, w=0, \end{cases}$$

dove u, v, w rappresentano le componenti dello spostamento del punto di coordinate x, y, z, secondo i tre assi coordinati; poi

$$\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

misura la dilatazione cubica unitaria della particella che intornia tale punto. Il simbolo $\mathfrak{D}$ è definito dalla relazione generale

$$\mathfrak{D}_k=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-k^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

dove t denota il tempo e k una grandezza indipendente da x, y, z, t; e poi dobbiamo ancora aggiungere che Ω e ω rappresentano rispettivamente le velocità delle onde longitudinali e trasversali che possono propagarsi nel solido: non variano da un punto all'altro, e sono grandezze note nel problema.

Pure evitando le difficili e lunghe questioni d'esistenza, noi avremo da trattare tuttavia un problema poco agevole. E supporremo che il semispazio,

[1] *Die partiellen differential-Gleichungen der math. Physik, nach Riemann's Vorlesungen.*

[2] Per esempio, in sismologia.

luogo dei punti che hanno la z positiva, limitato dunque dal piano d'equazione $z = 0$, sia tutto occupato da materiale omogeneo, elastico, sul quale non agiscano forze di massa. Noi ammettiamo che, in ogni punto del piano limite, siano verificate le condizioni

$$(2) \qquad \begin{cases} u(x, y, 0, t) = \mathrm{U}(x, y, t) \\ v(x, y, 0, t) = \mathrm{V}(x, y, t) \\ w(x, y, 0, t) = \mathrm{W}(x, y, t), \end{cases}$$

dove U, V, W rappresentano funzioni note; poi ammettiamo ancora che, in ogni punto del piano limite, si conoscano le tre componenti $\mathrm{L}(x, y, t)$, $\mathrm{M}(x, y, t)$, $\mathrm{N}(x, y, t)$ della tensione che agisce sopra questo punto. Se non figurasse, insieme colle altre, la variabile t, non sarebbe necessaria quest'abbondanza di funzioni note, per il calcolo dello spostamento in un arbitrario punto del campo, ma qui cerchiamo $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$, in un arbitrario punto del campo ed in un arbitrario tempo. Scriviamo subito le tre note equazioni, valide in ogni punto del contorno,

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho}\,\mathrm{L}(x, y, t) = -\omega^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{\varrho}\,\mathrm{M}(x, y, t) = -\omega^2\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{\varrho}\,\mathrm{N}(x, y, t) = -(\Omega - 2\omega^2)\,\Theta - 2\omega^2\dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Le equazioni (1), (2) e (3) debbono lasciarci risolvere il nostro problema. Con ϱ abbiamo rappresentato la densità costante del solido.

Intanto non sarà male procurarci un metodo, abbastanza semplice, per integrare l'equazione

$$(4) \qquad \mathfrak{D}_k\,\varphi(x, y, z, t) = 0$$

quando per la funzione φ sono date le due condizioni, valide sul piano limite

$$(5) \qquad \varphi_{z=0} = \Phi(x, y, t) \quad , \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \Psi(x, y, t).$$

Noi poniamo

$$(6) \qquad \varphi(x, y, z, t) = \mathrm{P}(x, y, z, t) + z\,\mathrm{Q}(x, y, z, t),$$

dove sia

$$(7) \qquad \mathrm{P}(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\varepsilon\, \mathrm{A}(\alpha, \beta, \varepsilon)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z + \varepsilon t)},$$

$$(8) \qquad \mathrm{Q}(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1\, d\beta_1\, d\varepsilon_1\, \mathrm{B}(\alpha_1, \beta_1, \varepsilon_1)\, e^{i(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \varepsilon_1 t)},$$

e le funzioni A e B siano da determinarsi, e valgano fra le grandezze $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \varepsilon_1$, indipendenti da x, y, t, le relazioni

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, k^2 - \varepsilon^2 = 0$$
$$2 i z \frac{d\gamma}{dz} + z(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)\, k^2 - z\, \varepsilon_1^2 - 2 i \gamma_1 k^2 = 0 .$$

Queste due relazioni [1] mostrano che è verificata la (4). Perchè anche le due condizioni limiti (5) siano verificate, noi dobbiamo determinare A e B.

Il teorema di Fourier per le funzioni di tre variabili, circa la deduzione del quale è già largo cenno nello stesso libro di Weber, può così formularsi:

$$f(x, y, t) =$$
$$(9) \qquad \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\varepsilon \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \tau)\, e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\varepsilon(t-\tau)]}\, d\xi\, d\eta\, d\tau .$$

E, giacchè, per $z = 0$, φ si riduce a P soltanto, così vediamo che, ponendo

$$(10) \qquad A(\alpha, \beta, \varepsilon) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta, \tau)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta+\varepsilon\tau)}\, d\xi\, d\eta\, d\tau ,$$

otteniamo che resti verificata la prima condizione (5). Ciò determina $P(x, y, z, t)$. Ora facciamo la derivata $\frac{\partial P(x, y, z, t)}{\partial z}$, e poniamo, per ogni punto del piano limite

$$(11) \qquad \Psi_1(x, y, t) = \Psi - \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z=0} .$$

Si vede subito che, se noi determiniamo $B(\alpha, \beta, \varepsilon)$ colla formula

$$(12) \qquad B(\alpha_1, \beta_1, \varepsilon_1) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(\xi, \eta, \tau)\, e^{-i(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\varepsilon_1\tau)}\, d\xi\, d\eta\, d\tau$$

e osserviamo (9), (8), (6) e (11), ci persuadiamo che anche la seconda condizione (5) è verificata. Possiamo dunque dire d'avere integrato l'equazione (4), tenendo conto delle due condizioni (5).

Ma ora, se deriviamo le (1) rispetto a x, y, z e sommiamo, ricaviamo subito

$$(13) \qquad \mathfrak{D}_\Omega\, \Theta = 0 .$$

Ma le due prime (2) e la terza (3) lasciano agevolmente calcolare Θ in

[1] Noi possiamo sempre regolare le radici γ, γ_1 in modo che $|e^{\gamma z}|, |e^{\gamma_1 z}|$ risultino < 1, perchè z è soltanto positivo.

ogni punto del piano limite. Poi dalla terza (2), dalle prime due (3) e dalla terza (1), ricaviamo anche $\frac{\partial \Theta}{\partial z}$ in ogni punto del piano limite; sarà dunque facile integrare, col precedente metodo la (13), e ricavare $\Theta(x,y,z,t)$.

Ormai non è difficile ricavare $u(x, y, z, t)$, $v(x y, z, t)$. $w(x, y, z, t)$, osservando che in superficie possiamo ricavarci quante derivate vogliamo di queste funzioni, rispetto a z, e che queste funzioni verificano evidentemente la $\mathfrak{D}_\omega \mathfrak{D}_\Omega = 0$.

Riassumendo, noi possiamo dire d'aver determinato, in modo che non è semplicissimo, ma è pure abbastanza semplice, la deformazione interna di un semispazio isotropo quando si conoscano gli spostamenti e le tensioni superficiali. In pratica, poco si presentano i corpi isotropi, ma può qualche volta essere bastante un risultato approssimativo. Noi non potremmo, per esempio, rimanere scontenti d'uno studio, il quale, da osservazioni eseguite sulla superficie di ragioni soggette a terremoto, ci lasciasse arguire, anche in modo grossolano, la posizione del centro sismico, e stabilire se l'agitazione fu cagionata da scoppio, o, invece, da frana.

Fisica. — *Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore.* Nota del dott. R. Magini, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1902 e nell'estate del 1903.* Nota di Ciro Chistoni, presentata dal Socio Blaserna.

Negli anni precedenti il 1902, ossia dal 1899 al 1901 le misure pireliometriche, che istituii sul Monte Cimone (lat. bor. 44°.12′; long. E da Gr. 10°.42′; 2165 m. sul livello del mare) vennero sempre eseguite con attinometri a sistema Violle [1]. Dal 1902 ho avuto modo di potermi servire del pireliometro Ångström a compensazione elettrica; e precisamente negli anni 1902 e 1903 servì il pireliometro n. 19 munito dell'amperimetro S. H.

[1] Veggansi le note seguenti: *Misure pireliometriche eseguite a Sestola ed al Monte Cimone nell'estate del 1899* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XII, 1° sem. 1903, pagg. 258-263). *Misure pireliometriche eseguite a Sestola ed al Monte Cimone nell'estate del 1900* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XII, 2° sem. 1903, pagg. 625-627). *Misure pireliometriche fatte sul Monte Cimone nell'estate del 1901* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XI, 1° sem. 1902, pagg. 479-486 e 539-541).

53352 con derivazione 12320; dei quali apparecchi in altra circostanza ho pubblicato i relativi coefficienti e le correzioni da applicarsi [1].

Il pireliometro è stato sempre collocato sulla terrazza di pietra che copre la torre destinata ad Osservatorio metereologico sul Monte Cimone; terrazza contornata da un muro formato con pietra lavorata. La terrazza ha forma ottagonale; la lunghezza media del lato ottagonale è di metri 3,30; la distanza fra due lati opposti è di m. 8; l'altezza del parapetto è di m. 1,10 e lo spessore del muro del parapetto è di m. 0,30. Collocando l'apparecchio nel mezzo della terrazza, e tenendolo di poco elevato, si riesce facilmente a sottrarlo all'influenza del vento, che in generale si fa sentire sulla vetta del Cimone.

Una misura pireliometrica completa, consiste generalmente di tre determinazioni successive, fatte coprendo una striscia del pireliometro p. e. quella di destra, ed esponendo al sole quella di sinistra; poi coprendo questa ed esponendo quella di destra, ed infine coprendo questa e riesponendo quella di sinistra. I valori di θ (temperatura indicata dal termometro unito al pireliometro) e di i (intensità in amp. della corrente elettrica compensatrice) che servono per calcolare Q (intensità della radiazione espressa in gr-cal. per min. e per cm^2) sono il risultato della media aritmetica, fra la media aritmetica del primo e terzo valore col secondo valore trovato.

Qualora, per circostanze di cielo variabile con rapidità, si stimi necessario, invece di tre osservazioni successive si eseguiscono sei o più osservazioni, affinchè il risultato finale corrisponda il meglio possibile alle condizioni di trasparenza dello strato d'aria compreso fra il pireliometro ed il sole.

Lo stato del cielo, in ispecie in prossimità del disco solare, viene osservato sempre colla massima cura, adoprando adatti vetri colorati.

Il valore B della pressione atmosferica è espresso in millimetri di mercurio a 0°, diminuito di 500. Qualora si volesse B espresso in altezza di mercurio a densità normale, ossia colla densità che questo liquido ha a 45° di latitudine ed a livello del mare, converrebbe diminuire i valori nelle sottostanti tabelle di 0,29 mm.

Come al solito, le ore sono espresse in tempo medio dell'Europa Centrale: e l'altezza media h del sole durante il tempo dell'osservazione completa, che è indicata nelle tabelle, è approssimata entro i due decimi di grado sessagesimale.

Con t è espressa la temperatura dell'aria, con f la forza elastica del vapore acqueo e con u l'umidità relativa dell'atmosfera.

[1] *Sul pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XIV, 1° sem. pagg. 340-346 e pagg. 451-456).

Monte Cimone 1902

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B 500 +	t	f	u	*Annotazioni*
28 luglio	11.40	63,0°	13,5	0,446	1,331	91,4	13,6	8,5	71	⊙ libero; Cu vaganti, vento forte da SW
" "	12.10	64,7	20,0	0,444	1,323	91,7	14,2	5,7	41	⊙ velato; Ci e Cu vaganti
" "	12.50	63,2	21,8	0,446	1,336	91,6	14,0	5,6	43	⊙ libero; Cu vaganti
" "	13.40	60,0	20,4	0,436	1,276	91,8	14,4	5,0	36	⊙ libero; Cu-Ni a SE; tuono lontano
30 "	10.50	58,6	12,4	0,418	1,169	93,1	8,8	6,2	76	Bianchiccio; orizzonte caliginoso
" "	11.10	60,3	15,0	0,436	1,273	93,6	9,4	7,1	79	⊙ libero; veli vaganti e Cu
31 "	7.45	27,0	15,0	0,433	1,255	93,7	11,8	7,2	67	⊙ libero; caligine bassa
" "	8.23	34,1	16,3	0,438	1,285	93,8	11,8	5,8	51	Id.
" "	9.23	44,5	19,0	0,444	1,322	94,2	12,0	7,5	69	⊙ libero; Cu vaganti
" "	10.23	54,0	20,5	0,450	1,359	94,0	12,2	7,9	72	Id.
" "	11.23	61,3	20,0	0,450	1,359	93,9	12,5	7,6	67	Id.
" "	12.23	64,2	20,0	0,453	1,377	94,0	13,0	7,4	62	⊙ libero; colpi di vento; Cu vaganti
" "	13.23	61,3	21,4	0,454	1,384	93,9	13,2	7.7	66	Lucido intorno al ⊙; Cu vaganti
" "	14.23	54,0	21,4	0,446	1,336	94,0	13,4	8,2	69	⊙ libero; Cu vaganti
" "	15.23	44,5	20,0	0,447	1,341	93,7	13,3	7,8	65	Id.
" "	16.23	34,1	19,0	0,427	1,223	93,8	13,3	7,8	65	Id.
" "	17.23	23,3	18,0	0,402	1,084	93,3	13,4	8,4	71	Biancastro
2 agosto	12.23	63,7	19,0	0,422	1,194	91,2	15,0	4,8	32	Id.
" "	13.23	60,8	18,9	0,417	1,166	90,8	14,4	6,9	53	Id.
" "	14.23	53.6	18,0	0,420	1,183	90,4	14,2	5,8	43	Bianchiccio
4 "	7.40	26,1	10,8	0,416	1,156	89,4	11,0	6,7	65	⊙ libero; Cu e veli bassi
" "	8.23	33,4	14.0	0,430	1,237	89,6	11,6	6,6	66	⊙ libero; Cu vaganti
" "	9.23	43,8	15,8	0,444	1,320	89,8	12,0	7,3	67	Id.
" "	10.23	53,2	18,3	0,449	1,352	90,0	12,2	6,9	67	Id.
5 "	7.45	26,0	12,5	0,413	1,141	90,8	12,0	6,9	64	Bianchiccio
" "	8.23	32,2	14,5	0,429	1,232	91,0	12,2	6,3	58	Veli sparsi
" "	9 23	43,6	15,7	0,444	1,320	91,1	12,4	6.2	54	Id.
" "	10.23	53,0	17,5	0,450	1,357	91,2	13,0	6,4	60	Sereno
" "	11.23	60,1	18,8	0,447	1,340	91,3	13,2	7,5	64	Cu all'orizzonte
" "	12.23	62,9	19,0	0,451	1,364	91,5	12,8	7.3	64	Cu sparsi
6 "	7.45	25,9	17,5	0,417	1,166	92,7	13,6	7,8	64	Orizzonte caliginoso
" "	8.23	33,0	18,5	0,431	1,246	92,8	12,8	5,8	49	Id.
" "	9.23	43,4	21,0	0,443	1,317	93,2	14,0	6,9	55	Biancastro
" "	10.23	52,7	23,0	0,447	1,342	93,3	14,5	7,1	54	Sereno
" "	11.23	59,8	22,5	0,449	1,354	93,6	14,4	7.4	59	Id.
" "	13.23	62,6	20,5	0,444	1,323	93,6	15,0	9,9	78	Cu all'orizzonte; biancastro
7 "	8.23	32,8	13,5	0,419	1,174	92,4	13,2	7,4	62	Orizzonte nebbioso; vento forte da SW
8 "	9.23	43,0	17,0	0,427	1,222	91,5	14,2	7,6	60	Cu a E; Aureola; vento forte da SW
" "	10.23	52,3	18,5	0,428	1,229	91,3	14,4	7.5	58	Veli vaganti

Monte Cimone 1902

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B 500+	t	f	u	*Annotazioni*
	h m	°								
8 agosto	11.23	59,3	20,4	0,436	1,276	91,6	14,7	7,2	54	Veli vaganti
9 »	7.40	24,8	11,5	0,417	1,163	87,7	12,8	6,5	55	Cu all'orizzonte; veli lontani dal ⊙
» »	8.22	32,5	12,7	0,454	1,379	87,3	13,6	5,7	45	Sereno
» »	9.22	42,8	14,8	0,455	1,386	88,5	13,0	5,8	50	Id.
» »	10.22	52,1	18,0	0,453	1,376	88,5	13,2	6,5	53	⊙ libero; Cu vaganti
» »	11.22	59,0	19,0	0,455	1,388	88,7	13,3	7,7	65	⊙ libero A-Cu
13 »	11.22	57,9	9,5	0,463	1,432	87,6	3,6	3,3	51	Sereno
» »	12.22	60,6	10,5	0,460	1,414	87,7	4,0	3,5	52	⊙ libero; Cu
16 »	7.21	20,3	11,5	0,421	1,185	87,3	9,4	5,5	59	Aureola; orizzonte caliginoso
» »	8.21	31,0	13,5	0,436	1,272	90,9	9,6	5,1	54	Sereno
» »	9.21	41,3	15,5	0,446	1,332	91,6	9,6	5,3	59	Id.
» »	10.21	50,3	16,0	0,449	1,350	91,6	10,2	6,9	72	Id.
» »	11.21	57,1	15,8	0,455	1,386	91,6	10,0	7,7	82	Cu e veli vaganti
» »	14.21	50,3	15,2	0,455	1,386	91,5	10,5	8,3	87	Id.
» »	15.21	41,3	14,0	0,455	1,385	91,5	11,0	8,0	80	Id.
18 »	9.21	40,8	13,3	0,440	1,295	91,8	10,4	7,0	72	Sereno
» »	10.21	49,8	14,2	0,443	1,313	91,9	10,7	7,6	76	Id.
» »	11.21	56,5	17,5	0,445	1,327	92,1	11,6	7,5	71	Id.
» »	12.21	59,0	19,3	0,451	1,365	92,2	12,2	7,2	65	Cu vaganti; ⊙ libero
» »	13.21	56,5	21,5	0,454	1,384	92,1	12,2	7,2	65	Id.
» »	14.21	49,8	19,5	0,456	1,395	92,0	13,0	7,6	66	Id.
19 »	7.21	19,7	18,0	0,415	1,155	93,3	13,2	4,3	33	⊙ libero; Cu vaganti; orizzonte caliginoso
» »	8.21	30,3	22,2	0,416	1,162	93,3	13,2	4,3	33	Sereno
» »	9.21	40,5	24,0	0,446	1,337	93,3	13,4	4,1	32	Id.
» »	11.21	56,2	23,0	0,454	1,385	93,2	13,6	10,2	85	⊙ libero; Cu e veli vaganti
» »	13.21	56,2	23,5	0,451	1,367	93,5	14,4	9,8	76	⊙ libero; Cu vaganti
» »	14.21	49,6	23,9	0,443	1,319	93,4	14,4	10,5	83	Id.
» »	18.21	8,9	16,5	0,334	0,747	92,8	13,8	9,1	73	Aureola; leggerissimi veli
20 »	8.50	35,2	16,5	0,401	1,077	90,9	13,6	6,2	50	Bianchiccio
» »	9.20	40,3	16,5	0,403	1,088	91,0	13,6	7,2	58	Id.
» »	10.20	49,3	19,1	0,412	1,139	90,9	13,8	6,9	55	Id. e veli vaganti

Monte Cimone 1903

29 luglio	8.23	34,4	15,3	0,406	1,104	89,5	12,7	4,7	43	Aureola
» »	9.23	44,8	14,1	0,424	1,203	89,5	12,6	5,2	48	Id. e veli vaganti
» »	10.23	54,4	15,7	0,423	1,198	89,5	12,0	6,8	65	Aureola
» »	11 23	61,7	17,1	0,427	1,222	89,6	12,5	7,3	68	Id.
» »	12.23	64,6	18,2	0,426	1,217	89,6	13,0	8,5	76	Id. e grossi Cu intorno al ⊙

Monte Cimone 1903

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B 500+	t	f	u	*Annotazioni*
	h m	°								
3 agosto	10.23	53,4	15,7	0,419	1,176	89,7	13,7	5,7	49	Aureola
» »	11.23	60,6	18,0	0,421	1,188	89,6	12,9	7,2	65	Veli vaganti
» »	12.23	63,4	19,1	0,417	1,166	89,6	13,8	7,8	67	Veli e Cu
4 »	7.23	22,7	11,5	0,390	1,017	87,4	9,6	4,8	54	Aureola; orizzonte nebbioso
» »	8.23	33,4	13,0	0,408	1,114	87,8	10,6	2,2	21	Id.
» »	9.23	43,8	14,1	0,423	1,198	88,3	12,0	3,0	29	Id.
» »	10.23	53,2	14,7	0,433	1,255	88,4	13,0	2,8	25	Id.
» »	11.23	60,3	17,5	0,434	1,262	89,1	13,9	3,3	28	Id.
» »	12.23	63,2	18,3	0,434	1,263	89,4	13,8	4,9	42	Aureola e Cu vaganti
» »	13.23	60,3	18,5	0,424	1,205	89,9	15,2	4,1	33	Bianchiccio
» »	14.23	53,2	19,0	0,423	1,200	89,9	14,0	4,8	40	Id.
» »	15.23	43,8	17,8	0,422	1,194	90,0	14,4	4,2	34	Id.
5 »	8.23	32,2	20,4	0,411	1,134	93,4	14,4	4,2	34	Biancastro; aureola
» »	9.23	43,6	21,8	0,425	1,213	94,0	15,1	4,2	33	Id.
» »	10.23	53,0	23,5	0,426	1,220	94,2	15,2	4,1	33	Id.
» »	11.23	60,6	21,0	0,429	1,235	94,2	16,0	6,4	47	Id.
» »	12.23	62,9	23,5	0,430	1,243	94,4	16,4	6,5	47	Id.
» »	13.23	60,6	23,5	0,427	1,226	94,5	18,4	7,6	48	Id.
» »	14.23	53,0	24,5	0,422	1,197	94,6	17,0	9,5	66	Str-Cu presso il ⊙
6 »	7.23	22,3	15,0	0,378	0,957	93,1	14,0	6,0	51	Aureola; Biancastro
» »	8.23	33,0	16,5	0,411	1,132	93,4	14,6	5,9	48	Id.
» »	9.23	43,4	17,7	0,428	1,228	93,7	15,5	5,6	43	Id.
» »	10.23	52,7	17,9	0,436	1,274	94,0	16,0	7,3	50	Id.
» »	11.23	59,8	20,7	0,438	1,288	94,1	18,0	7,3	43	Id.
» »	12.23	62,6	20,7	0,440	1,300	94,1	19,7	6,7	35	Id.
» »	13.23	59,8	21,2	0,437	1,282	94,1	17,4	7,9	51	Id.
» »	14.23	57,2	20,5	0,422	1,195	94,0	17,3	8,9	58	Id. e Cu all'orizzonte
7 »	7.23	22,1	14,6	0,396	1,050	92,2	13,0	7,0	59	Nebbia e Cu all'orizzonte; aureola
» »	8.23	32,8	15,9	0,415	1,154	92,3	13,0	6,4	53	Id.
» »	9.23	43,2	16,9	0,421	1,188	92,3	14,0	6,1	47	Id.
» »	10.23	52,5	19,8	0,430	1,241	92,5	15,0	6,8	50	Id.
» »	11.23	59,6	20,7	0,437	1,282	92,5	16,1	8,2	55	Aureola e Cu intorno al ⊙
» »	12.23	62,3	19,7	0,427	1,224	92,5	15,4	7,4	56	Id.
13 »	8.22	31,6	14,1	0,413	1,142	91,3	12,5	5,7	52	⊙ velato
» »	9.22	41,9	15,9	0,417	1,165	91,2	13,8	6,3	54	Aureola; veli sparsi
» »	10.22	51,1	17,0	0,419	1,176	91,5	14,5	5,6	46	Id.
» »	13.22	57,9	21,4	0,424	1,207	91,6	16,3	6,7	47	Cu e veli intorno al ⊙
» »	15.22	41,9	19,0	0,408	1,116	91,4	15,6	8,8	66	Aureola; veli sparsi
17 »	10.21	50,1	14,5	0,424	1,203	88,3	9,0	3,7	41	Aureola; veli intorno al ⊙; Cu all'orizzonte

Monte Cimone 1903

Giorno	Ora	h	θ	i	Q	B 500+	t	f	u	*Annotazioni*
	hm	°								
18 agosto	7.21	19,7	12,8	0,385	0,991	88,1	9,0	3,9	43	Leggera aureola; orizzonte nebbioso
„ „	8.21	30,3	16,0	0,413	1,142	88,4	11,4	2,4	24	Bianchiccio
„ „	9.21	40,5	17,8	0,434	1,263	88,7	10,4	4,5	48	Id.
„ „	10.21	49,5	18,5	0,436	1,275	88,8	12,6	4,6	42	Id. e Cu all'orizzonte
24 „	8.19	29,2	14,5	0,438	1,284	91,1	12,0	7.1	70	⊙ in plaga lucida; sereno perfetto
„ „	9.19	39,3	14,5	0,448	1,343	91,1	13,5	6,8	59	Id.
„ „	10.19	48,1	17,0	0,448	1,345	91,4	15,0	6,6	52	Cielo biancastro; Cu all'orizzonte
„ „	11.19	54,6	17,5	0,449	1,351	91,7	12,4	7,8	72	Cielo bianchiccio; Cu all'orizzonte
„ „	12.19	57,0	15,7	0,452	1,368	91,5	11,9	8,4	81	Aureola; Str-Cu all'orizzonte; veli sparsi
27 „	9.19	38,5	19,0	0,412	1,139	94,4	11,6	7,1	70	Aureola; calma; il Cimone è contornato da una corona di Cu
„ „	10.19	47,3	18,5	0,433	1,257	94,7	12,2	7,9	74	Nebbia in giro; Cu vaganti; ⊙ libero
„ „	15.19	38,5	22,5	0,405	1,102	94,6	13,9	8,2	70	Id.
28 „	8.18	28,2	18,5	0,418	1,172	93,7	11,8	6,0	58	Bianchiccio; caligine bassa; calma
„ „	10.18	47,0	23,5	0,440	1,301	93,7	12,5	6,2	56	⊙ libero; caligine bassa; calma
„ „	11.18	53,3	23,5	0,443	1,319	94,2	12,5	6,8	62	⊙ libero; caligine bassa; brezza
„ „	12.18	55,6	23,7	0,451	1,367	94,2	12,6	6,9	63	Id.
„ „	13.18	53.3	24,0	0,442	1,313	94,3	13,0	7,6	68	Id.
„ „	14.18	47,0	23,5	0,433	1,260	94,2	13,3	7,7	67	Id.
„ „	15.18	38,2	21,5	0,421	1,190	94,2	13,5	7,8	67	Id.
„ „	16.18	28,2	18,5	0,403	1,089	93,8	13,0	9,0	79	Aureola; caligine bassa
29 „	8.18	27,9	17,5	0,414	1,149	92,9	13,4	3,0	27	Bianchiccio; nebbia bassa; Str
„ „	9.18	37,7	18,3	0,425	1,211	92,7	13,8	3,9	32	⊙ libero; veli e Str; caligine bassa
„ „	10.18	46,7	19,5	0,399	1,068	92,8	14,2	4,9	39	Nebbia bassa; veli vaganti; Str all'orizzonte
2 settembre	12.17	53,8	21,8	0,439	1,294	96,4	14,0	5,5	45	Str-Cu all'orizzonte Sud; caligine all'orizzonte; biancastro
„ „	13.17	51,6	23,5	0,432	1,254	96,2	13,6	5,1	45	Id.
„ „	14.17	45,4	24,8	0,431	1,249	96,0	13,8	5,6	48	Orizzonte caliginoso; Str-Cu a NW
3 „	7.17	16,1	15,7	0,364	0,887	94,5	12,4	2,8	25	Bianchiccio; veli sparsi a W
„ „	8.17	26,6	17,5	0,405	1,099	94,5	12,5	3,6	32	Bianchiccio; veli ad WSW e a NNW
„ „	9.17	36,6	18,5	0,423	1,200	94,7	12,8	3,3	30	Bianchiccio; veli sparsi
„ „	10.17	45,1	20,1	0,434	1,264	94,8	13,0	3,5	29	Id. Str-Cu a WNW
„ „	11.17	51,2	21,5	0,435	1,271	95,1	13,3	5,2	46	Id.
„ „	13.17	51,2	24,1	0,414	1,152	95,2	13,6	7,3	62	⊙ velato
„ „	15.17	36,6	25,6	0,413	1,147	95,0	13,8	8,0	68	Id.
„ „	16.17	26,6	23,5	0,385	0,996	94,9	13,8	7,7	64	Id.
4 „	8.16	26,4	13,5	0,403	1,087	93,4	11,4	1,7	15	Bianchiccio
„ „	9.16	36,3	15,4	0,436	1,270	93,7	11,6	4,2	40	Id.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1904 e nell'estate del 1905.* Nota di Ciro Chistoni, presentata dal Socio Blaserna.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Contributo allo studio del pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström* [1]. Nota di Emilio Teglio, presentata dal Socio P. Blaserna.

In altra circostanza il prof. Chistoni ebbe ad occuparsi del pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström [2].

Nel 1905 l'illustre Ångström inviò al R. Osservatorio Geofisico quattro pireliometri affinchè venissero confrontati; due di essi hanno poi servito al prof. Chistoni per le misure eseguite ad Alcalà de Chisbert (Spagna) durante l'eclisse totale del 30 agosto; gli altri due erano destinati al R. Osservatorio « Regina Margherita » sul Monte Rosa. Di questi uno (il n. 51) venne invece usato dal prof. Palazzo, direttore del R. Ufficio Centrale di Meteorologia, per le osservazioni che fece a Tripoli, ove egli si recò, in occasione dell'eclisse del 30 agosto.

Il prof. Chistoni volle affidare a me l'esecuzione dei confronti, fino dal principio di giugno; ma, in causa della stagione poco propizia, perchè quasi sempre nuvolosa, il lavoro non potè essere sollecito e durò fino al 12 luglio.

Come istrumento campione venne adoperato il pireliometro n. 39 *bis* del quale il prof. Chistoni ha già parlato nel lavoro sopracitato.

Per misuratori della corrente si adoperarono i due milli-amperimetri Siemens und Halske portanti i numeri 99630 e 99631, cui erano rispettivamente applicate le derivazioni 19881 e 19882, per modo che ogni divisione della graduazione corrisponda a 0,01 di amp. Questi due amperimetri erano stati prima da me stesso confrontati coll'amperimetro Hartmann und Braun 131913-1293, che ha servito di campione anche al prof. Chistoni. Le differenze trovate fra il campione ed ognuno dei due amperimetri S. H. non arrivarono mai a 0,001 di amp., così che potei ritenerli praticamente esatti.

(1) Lavoro eseguito nell'Osservatorio Geofisico della R. Università di Modena.

(2) Chistoni Ciro, *Sul pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström.* (Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XIV, 1° sem. 1905, pagg. 340-346 e pagg. 451-456).

È noto che l'intensità della radiazione, ottenuta col pireliometro Ångström, è data dalla formola:

$$Q = \frac{60 r i^2}{4{,}19\, b.a} \text{ gr. cal. per min. e per cm.}^2$$

(i = intensità di corrente in amp.; a = potere assorbente delle superficie; b = larghezza delle striscie in cm.; r = resistenza elettrica delle striscie per cm., in Ohm).

Quando la r non vari al variare della temperatura, e tale è il caso dei quattro pireliometri esaminati, allora la formola indicata può scriversi:

$$Q = k i^2$$

essendo k costante per un dato istrumento.

I coefficienti pei quattro pireliometri in questione, sono riportati nella seguente tabella:

	N. 19	N. 66	N. 51	N. 57
Resistenza delle striscie per cm. in Ohm (r)	0,217	0,2205	0,2196	0,2198
Larghezza delle striscie in cm. (b)	0,2023	0,1965	0,1997	0,1992
Potere assorbente delle superficie (a)	0,98	0,98	0,98	0,98
k	15,70	16,47	16,10	16,12

Il pireliometro n. 19 ha l'affusto del vecchio 19, al quale vennero cambiate le striscie perchè si erano alterate.

I valori di i che riferisco più sotto non sono il risultato di una semplice osservazione, ma la media di successive misure fatte contemporaneamente coi due pireliometri, in numero variabile secondo le circostanze da tre a nove.

I confronti fra il n. 39 *bis* ed il n. 19 vennero eseguiti parte il 16 giugno da 11^h0^m a 11^h45^m, parte il giorno 17 da 9^h50^m a 11^h10^m. Si ottennero i seguenti risultati:

col 39 *bis* i = 0,205; 0,203; 0,205; 0,205; 0,206
col 19 i = 0,280; 0,277; 0,278; 0,279; 0,280.

Eseguendo i calcoli si ottengono i seguenti valori:

col 39 *bis* Q = *1,219*; 1,195; 1,219; 1,219; 1,230
col 19 Q = *1,231*; 1,203; 1,213; 1,222; 1,231.

La massima differenza fra i corrispondenti valori di Q arriva a 0,012; per cui, per le ragioni già esposte dal prof. Chistoni nelle note sopracitate, si può ritenere che i due apparecchi non abbiano correzione relativa.

I confronti fra il n. 39 *bis* ed il n. 66 vennero eseguiti, parte il 18 giugno da 10^h30^m a 11^h35^m e parte il 21 giugno da 9^h50 a 11^h30^m.

Si ottennero i seguenti risultati:

col 39 *bis* $i = 0{,}204$; 0,200; 0,205; 0,201; 0,199; 0,198
col 66 $i = 0{,}270$; 0,267; 0,272; 0,266; 0,264; 0,263.

Eseguiti i calcoli si ha:

col 39 *bis* Q = 1,207; *1,160*; 1,219; 1,171; 1,148; 1,137
col 66 Q = 1,200; *1,174*; 1,218; 1,165; 1,148; 1,140.

La massima differenza fra i corrispondenti valori di Q, arriva in questo caso a 0,014; però anche in questo caso si deve ritenere non esista praticamente correzione relativa fra i due istrumenti.

I confronti fra il n. 39 *bis* ed il n. 51 vennero eseguiti tutti il giorno 11 luglio da 9^h25^m a 11^h50^m. Si ottenne:

col 39 *bis* $i = 0{,}200$; 0,201; 0,198; 0,199; 0,200
col 51 $i = 0{,}269$; 0,269; 0,266; 0,268; 0,269.

Eseguiti i calcoli:

col 39 *bis* Q = 1,160; 1,171; 1,137; *1,148*; 1,160
col 51 Q = 1,165, 1,165; 1,140; *1,156*; 1,165.

In questo caso la massima differenza fra i corrispondenti valori di Q arriva a 0,008; anche in questo caso è da ritenere quindi non esista correzione relativa fra i due istrumenti.

I confronti fra il n. 39 *bis* e il n. 57 vennero tutti eseguiti il giorno 12 luglio da 9^h50 a 11^h45^m. Si ottenne:

col 39 *bis* $i = 0{,}195$; 0,195; 0,196; 0,198; 0,196
col 57 $i = 0{,}262$; 0,261; 0,263; 0,266; 0,264.

Eseguiti i calcoli:

col 39 *bis* Q = 1,103; 1,103; 1,114; 1,137; *1,114*
col 57 Q = 1,107; 1,098; 1,115; 1,141; *1,124*.

In questo caso la massima differenza arriva a 0,010 che fa pure ritenere non esista correzione relativa nemmeno fra questi due pireliometri.

I risultati precedenti, insieme a quelli riferiti dal prof. Chistoni, dimostrano che in una misura completa, eseguita con cautela, mediante il pireliometro Ångström, difficilmente si commette un errore che arriva a 0,01 di cal. gram., per minuto e per cm.^{2}; ed appoggiano sempre più quanto asserì il prof. Chistoni, cioè che nelle attuali condizioni, il pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström è preferibile a qualunque altro attinometro, asserzione accolta dal Comitato internazionale per gli studi solari, il quale dichiarò che per le misure di radiazione solare, attualmente, lo strumento da preferirsi è il pireliometro Ångström a compensazione elettrica.

Fisica terrestre. — *Sull'interpretazione matematica dei sismogrammi.* Nota di V. Monti, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

È noto che quando dai tracciati degli strumenti sismici si vuole risalire agli elementi del movimento vero del suolo, occorre in primo luogo disporre d'un'appropriata combinazione di sismografi atti a fornire per ciascun istante gli spostamenti del terreno paralleli a tre assi cartesiani prestabiliti e le rotazioni intorno agli stessi. Su tali strumenti si possono consultare le Note pubblicate sulla determinazione dei moti sismici e sul problema generale della sismografia da M. Contarini (Rend. dell'Acc. dei Lincei, 1901 e 1902), le due Memorie *Ueber seismometrische Beobachtungen* e *Zur Methodik der seismometrischen Beobachtungen* di B. Galitzin (C. R. de la Comm. Sismique permanente, St. Petersbourg, 1902, 1904), e le osservazioni con cui io chiudevo una mia Nota precedente sulla misura della velocità di propagazione delle perturbazioni sismiche in rapporto alla sismometria razionale (Rend. dell'Acc. dei Lincei, 7 gennaio 1906).

Occorre, in secondo luogo, per ciascun istante della perturbazione e per ogni tracciato, determinare il valore della funzione $f(t)$ che esprime l'elongazione dello strumento relativo, e quelli delle derivate $f'(t)$ e $f''(t)$ da introdurre, insieme alla $f(t)$, nelle equazioni differenziali necessarie allo scopo.

Quest'ultimo còmpito è certamente di una difficoltà estrema, quando lo si voglia intendere in tutta la sua generalità; tratti anche brevi di sismogramma presentano spessissimo complicazioni così gravi e così affollate da rendere disperata l'impresa di trovare *a priori* una unica funzione $f(t)$ che vi si adatti; e, se si pensa al genere di forze a cui il tracciamento del sismogramma si deve, la cosa non può recar maraviglia.

Qualche volta dei tratti più o meno lunghi son costituiti da vibrazioni o onde sensibilmente isocrone d'ampiezza continuamente crescente o decrescente; quest'ultimo caso, p. es., è abbastanza frequente nei diagrammi di terremoti locali. Può allora prestare buoni servigi la funzione

$$f(t) = \mathrm{A} e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t,$$

dove le costanti A, α e β si determinano facilmente dalla considerazione dei punti del sismogramma in cui $f(t)$ si annulla oppure diventa massima o minima, colle risorse più usuali della matematica elementare e del calcolo differenziale.

Maggior generalità, ma sempre nel caso di onde o vibrazioni isocrone, può presentare la funzione

$$f(t) = \varphi(t) \operatorname{sen} \beta t,$$

nella quale si può tentare di trovar la forma del fattore $\varphi(t)$, dopo aver misurato β, applicando p. es. la formola d'interpolazione di Lagrange a un certo quantitativo di numeri ottenuti dalla divisione delle ordinate dei massimi e minimi del sismogramma per i valori corrispondenti di sen βt. La funzione può trovare qualche utile applicazione non solo nel caso di terremoti locali, ma anche in quello di terremoti lontani.

Però, quando si prova a eseguir misure un poco precise sui sismogrammi, si constata subito che questi non sono che casi particolari ben lontani dal costituire la maggioranza di tutti i casi possibili.

Per misure siffatte non può davvero considerarsi come sufficiente l'uso del doppio decimetro, tanto in voga negli osservatorî geodinamici per le analisi di sismogrammi da redigersi in linguaggio ordinario.

D'altra parte, è provato che anche coll'uso dei sismografi attuali, purchè razionalmente combinati, si possono ottenere dei tracciati che permettono, fino ad un certo punto, l'analisi delle vere condizioni meccaniche del suolo durante una perturbazione sismica. Perciò ragion vuole che lo strumento adoperato alla misura dei sismogrammi unisca alla sensibilità ed all'esattezza pregi d'economia tali che lo rendano raccomandabile per quel qualunque osservatorio geodinamico, dove, per avventura, si addivenisse finalmente ad una siffatta razionale combinazione di sismografi.

Il Pomerantzeff (C. R. de la Comm. Sismique permanente, St. Petersbourg, 1902), nella sua analisi del sismogramma tracciato da un pendolo orizzontale Bosch a Strasburgo il 24 giugno 1901, si servì d'una macchina da dividere, apparecchio non certo destinato, pel suo costo, a diventare d'un uso alquanto generale.

Dopo qualche tentativo, io mi sono arrestato alla disposizione seguente, la quale mi pare, almeno pei sismogrammi un poco sviluppati, assai adatta.

Una piattaforma orizzontale è scorrevole lungo un breve binario formato da due regoli d'acciaio, e, al di sopra di essa e fisso in modo invariabile, si trova un microscopio a debole ingrandimento e fornito di reticolo. La piatttaforma è pure suscettibile di movimenti laterali e di rotazioni orizzontali, per mezzo di un congegno simile a quello che si trova impiegato nel così detto *tavolino* dei microscopî.

Per i movimenti lungo il binario, la piattaforma è comandata dalla vite micrometrica d'uno sferometro, sensibile al millesimo di millimetro e collocato orizzontalmente; tale vite è atta a spingere la piattaforma in un senso, mentre pel senso contrario, quando cioè la vite vien girata a ritroso, una molla antagonista provvede automaticamente al retrocedere della piattaforma e la mantiene in contatto colla punta della vite.

Presa poi una lastrina di vetro da specchi, vi s'incide col diamante una quadrigliatura, ogni elemento della quale abbia p. es. un millimetro o due di lato. Senza che questa quadrigliatura debba essere di grande esattezza, si

colloca la lastrina sulla piattaforma mobile e si misurano, con tutte le cautele che sono del caso e che non occorre ripetere qui, le lunghezze delle singole parti in cui ogni retta della quadrigliatura risulta divisa. Assunto poi come origine un vertice di uno degli elementi, si misurano anche le distanze di questo da tutti gli altri punti d'intersezione della quadrigliatura.

Ciò fatto si sottopone alla lastrina il tratto di sismogramma da esaminarsi, per modo che il vertice origine si sovrapponga a quel punto della direttrice del sismogramma che si assume come corrispondente all'origine dei tempi; si fa pure in modo che la direttrice stessa coincida con una delle rette della quadrigliatura, e, spostando secondo che occorre la piattaforma mobile, si cerca per mezzo del microscopio quali intersezioni della quadrigliatura corrispondono a punti del sismogramma. Le coordinate di tali punti possono allora ottenersi con calcoli semplicissimi di matematica elementare.

Determinati così i valori numerici di $t_1, t_2, t_3 \ldots$ e di $f(t_1), f(t_2), f(t_3) \ldots$ per un certo numero di punti abbastanza vicini tra loro, si può ottenere il valore $f(t)$ corrispondente a un'epoca qualunque t compresa nell'intervallo, ricorrendo p. es. alla formola d'interpolazione di Lagrange, e la stessa formola permette il calcolo delle derivate di $f(t)$.

Chimica. — *Sui prodotti di idrogenazione del pirrolo a mezzo del nickel ridotto.* Nota di Maurizio Padoa [1], presentata dal Socio G. Ciamician.

In questi ultimi anni venne sperimentato con pieno successo da Sabatier e Senderens [2] un elegante processo di riduzione basato sull'azione catalitica esercitata da alcuni metalli finamente suddivisi, e specialmente fra questi in grado eminente dal nickel, in presenza dei vapori della sostanza da idrogenare mescolati ad idrogeno.

Questo processo permette di operare riduzioni che con altri metodi presentano grandi difficoltà o non riescono affatto, come la riduzione del benzolo a cicloesano, del fenolo a cicloesanolo e cicloesanone, dell'anilina a cicloesilammina e molte altre ancora.

Gli autori citati nè altri non si sono occupati finora, per quanto mi consta, di tentare con questo metodo la riduzione di corpi eterociclici; e fra questi ve ne sono parecchi pei quali le difficoltà della idrogenazione sono assai grandi o addirittura ancora insuperate.

Uno dei passaggi che ancora non si potè compiere e che pure sarebbe

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

[2] Sabatier e Senderens, *Nouvelles méthodes générales d'hidrogénation*, ecc. (1905).

stato interessante poter effettuare è quello diretto dal pirrolo alla pirrolidina: e di questo appunto ho voluto in primo luogo occuparmi.

Il pirrolo ridotto a mezzo dell'idrogeno nascente (zinco e acido acetico o cloridrico) conduce a un primo stadio della idrogenazione, cioè dà pirrolina [1]; ed è soltanto riducendo la pirrolina con acido iodidrico e fosforo che si può ottenere la pirrolidina [2].

Molti sono i processi di formazione della pirrolidina; si può ottenerla, oltre che nel modo già detto, dalla succinimide e dal pirrolidone [3] dal cianuro di etilene [4], dalla δ-clorobutilammina [5], dall'ornitina (acido α-δ-diaminovalerianico) [6] e dalla γ-aminobutiraldeide [7]. Ma per quanto i metodi siano numerosi nessuno è agevole a seguirsi, talchè si può dire che la pirrolidina è ancora una sostanza di difficile preparazione. Prima di sperimentare sul pirrolo il metodo di idrogenazione degli autori già citati, volli effettuare una riduzione su sostanza già da essi impiegata; e facendo agire nelle condizioni descritte da questi autori il nickel ridotto su una miscela di idrogeno e vapori di benzolo, ottenni con buon rendimento il cicloesano.

Ciò posto, per sperimentare col pirrolo, preparai una certa quantità di questa sostanza allo stato puro partendo da un pirrolo comune di Kalle che bolliva da 125° a 135°, e preparandone il sale potassico; ottenni così del pirrolo puro che distillava costantemente a 130°. Il nickel venne preparato per riduzione dal suo carbonato con idrogeno alla temperatura di 350°, indicata dagli autori citati per ottenere un nickel di cui l'attività sia notevole e in pari tempo di lunga durata; l'operazione venne compiuta nello stesso tubo che poi servì al passaggio dell'idrogeno e del pirrolo. Quest'ultimo veniva introdotto nella canna a mezzo di un tubo capillare comunicante con un piccolo serbatoio cilindrico munito di rubinetto (il tutto in vetro); in tal modo si poteva regolare perfettamente l'efflusso del liquido e questo man mano che giungeva a contatto delle pareti calde del tubo si volatizzava. La quantità di pirrolo che passava in un'ora era di circa 5 ccm^3. Impiegai l'idrogeno elettrolitico che prima di venire introdotto nel tubo passava attraverso amianto platinato rovente e gorgogliava per una Drechsel ad acido solforico. Il tubo che conteneva il nickel veniva tenuto a una temperatura oscillante tra 180° e 190° tenendolo immerso in una gronda di ferro piena di sabbia, situata sopra un comune fornello per combustione; la temperatura veniva osservata

(1) Ciamician e Dennstedt, Gazz. Chim. Ital. XIII, 395 (1883).

(2) Ciamician e Magnaghi, Gazz. Chim. Ital. XV, 480 (1885). — Knorr und Rabe. Berichte XXXIV, 3491.

(3) Ladenburg, Berichte, XX, 2215. — Gabriel, Berichte, XXII, 3335.

(4) Ladenburg, Berichte, XIX, 782; XX, 442. — Petersen, Berichte, XXI, 290.

(5) Gabriel, Berichte, XXIV, 3233. — Schlink, Berichte, XXXII, 947.

(6) Schulze und Winterstein, Berichte, XXXII, 3191.

(7) Wohl, Schäfer e Thiele, Berichte, XXXVIII, 4157.

con un termometro avente il bulbo immerso nella sabbia. I prodotti della reazione venivano condensati all'uscita in un palloncino raffreddato con acqua corrente.

Operando in tal modo ottenni come prodotto un liquido limpido e incoloro di forte odore ammoniacale; durante l'operazione si sviluppava anche ammoniaca. Il prodotto liquido trattato con acqua non si scioglieva che in parte; per separare i prodotti basici dal pirrolo rimasto inalterato, aggiunsi al liquido etere ed estrassi la miscela con acido cloridrico diluito.

Dalla soluzione eterea rimasta, seccata con potassa, riottenni per distillazione il pirrolo puro che impiegai per una successiva riduzione; operando per due o tre volte allo stesso modo accumulai una certa quantità di cloridrati.

La soluzione di questi, che ancora conteneva una certa quantità di pirrolo, venne distillata in corrente di vapore; in tal modo una parte del pirrolo si resinifica ed il resto distilla. Successivamente distillando pure in corrente di vapore la soluzione dopo avervi aggiunto un eccesso di potassa, passò una notevole quantità di prodotti basici: una parte di essi, solubile in acqua; il resto si separò come olio incoloro. Per ottenere la completa separazione delle basi dall'acqua, saturai il liquido con potassa; le basi oleose così separate vennero fatte bollire a ricadere su potassa fusa per seccarle completamente e per eliminarne l'ammoniaca; poi le distillai frazionatamente sull'ossido di bario. La maggior parte del prodotto distillò al disotto di 110°; poi il termometro salì rapidamente e distillò un prodotto che passava inalterato, ma di cui per l'esigua quantità non potei determinare il punto d'ebullizione esatto.

Il prodotto distillato al disotto di 110° era completamente miscibile con l'acqua; quello che bolliva alto era un olio fortemente basico poco solubile in acqua. Del prodotto più volatile la maggior parte distillò fra 80° e 90°: temperature che potevano corrispondere ai punti d'ebullizione della pirrolina (90°) o della pirrolidina (86°-88°); mi accinsi dunque ad identificare il prodotto basico ottenuto. Il cloridrato della base diede con cloruro d'oro un abbondante precipitato giallo; ottenutane la cristallizzazione, il *cloroaurato* si presentò nella forma caratteristica di aghi raggruppati a spina di pesce, propria del cloroaurato di pirrolidina. Ciò venne poi confermato dal punto di fusione (206°) e dall'analisi di cui seguono i dati

	Calcolato	Trovato
Au %	47,97	47,71
C "	11,67	11,87
H "	2,45	2,59

Preparai poi della stessa base il *cloroplatinato* che si presenta in belli aghi gialli che anneriscono a 190° e fondono a 200° scomponendosi; ed il

picrato che si separa dalla soluzione acquosa in cristalli giallo-chiari fondenti a 112°. Questi dati corrispondono tutti a quelli riferiti dagli autori [1].

La pirrolidina rimase così identificata; e questa trasformazione del pirrolo in pirrolidina può essere considerata, meglio che gli altri procedimenti noti, un metodo di separazione di questa base; il rendimento ottenuto in queste prime esperienze non è molto elevato (non più del 25 %) e ciò è dovuto, più che alla formazione di prodotti secondari, alla perdita di pirrolo nei successivi passaggi e ricuperi. Ma non è improbabile che studiando meglio, come mi propongo di fare, le condizioni dell'esperienza (lunghezza del tubo, temperatura, ecc.), si possa migliorare il rendimento.

Ed ora rimane a parlare del prodotto basico meno volatile; questo si scioglieva completamente in acido cloridrico; dal cloridrato con acido picrico acquoso si separò un picrato assai poco solubile in acqua a freddo.

Lo cristallizzai dall'alcool: si presenta in bellissimi aghi gialli sericei, fondenti a 123°; dopo averlo cristallizzato più volte dal medesimo solvente procedetti all'analisi:

	Calcolato per $C_8H_{15}N.C_6H_2(NO_2)_3.OH$	Trovato
C	47,42	47,57
H	5,12	5,39
N	15,81	15,93

Come si vede l'analisi conduce ad ammettere per questa base la formola $C_8H_{15}N$. Di questa sostanza mi riserbo di studiare più a fondo la proprietà e la costituzione; tuttavia voglio dire fin d'ora che la formula trovata corrisponde a quella di un indolo completamente idrogenato, che si potrebbe chiamare *esaidroindolina* e che non è improbabile che il pirrolo che ha spiccate tendenze alla condensazione dia luogo nelle condizioni descritte a una condensazione e contemporanea riduzione di questo genere:

$$2C_4H_5N + 4H_2 = C_8H_{15}N + NH_3.$$

È noto infatti che dal tripirrolo si ottiene indolo [2], e che dallo stesso pirrolo si può ottenere indolo [3]; che dall'α-β-dimetilpirrolo si può passare al tetrametilindolo [4]. Altri notevoli esempi della tendenza dei pirroli alle

(1) Vedi ad es. Wohl, Schäfer e Thiele, l. c.

(2) Dennstedt e Zimmermann, Berichte, XXI, 1478. — Dennstedt, ibidem, XXI, 3429. — Dennstedt e Voigtländer, ibidem, XXVII, 476.

(3) Dennstedt, Chem. Zeit. 1901, II, 1018.

(4) Dennstedt, Berichte, XXI, 3429.

condensazioni sono dati da quelle ottenute da Plancher e Tornani coi dimetilpirroli [1].

Per risolvere definitivamente la questione, è necessario sottoporre l'indolo e i suoi omologhi al medesimo processo di idrogenazione, ciò che mi propongo di fare; come pure mi propongo di tentare la riduzione di altri nuclei eterociclici, come il tiofene, il furano e i composti piridici e chinolinici.

Fisiologia. — *Sulla Fisiologia della respirazione.* I. *Osservazioni su di un caso di fistola bronchiale nell'uomo.* Nota di V. Ducceschi, presentata dal Socio L. Luciani.

Il soggetto delle osservazioni che mi accingo ad esporre fu uno studente di medicina, il sig. O. M., il quale presentava una fistola bronchiale posteriormente sul torace e che si prestò di buon grado alle mie ricerche.

Il sig. M. cadde malato di febbre tifoidea nel settembre del 1903 e fu ricoverato all'Ospedale di S. Spirito in Roma; estintasi l'infezione intestinale comparvero i sintomi evidenti di un ascesso polmonare a sinistra del torace ed il paziente fu trasportato nel dicembre all'Ospedale della Consolazione, dove il 20 febbraio del 1904 fu sottoposto ad un atto operativo (prof. R. Bastianelli) per un ascesso situato nella parte superiore del lobo inferiore del polmone sininistro. Il polmone aderiva alla pleura parietale e l'operazione consistè nello svuotamento dell'ascesso previa resezione di 8 cm. della quinta costa tra la linea paravertebrale e la scapolare. Ne residuò un seno in corrispondenza della ferita, lungo circa 7 cm., che non immetteva in alcuna cavità ma comunicava con un grosso bronco. Questo seno persistè vari mesi dopo che il paziente fu dimesso dall'Ospedale in discrete condizioni di salute ed in stato di attendere a gran parte delle sue solite occupazioni.

Verso la fine del 1904 il seno si chiuse e la guarigione fu completa; l'anno seguente il soggetto godè ottima salute e fu in grado di laurearsi nella sessione autunnale del 1905.

Io ebbi il sig. M. in osservazione per alcuni giorni del mese di ottobre del 1904. Si trattava di un individuo di media taglia, normalmente costituito ed in uno stato discreto di nutrizione. Sulla metà sinistra del torace, posteriormente, all'altezza della quinta costa, si scorgeva la cicatrice guarita della ferita operatoria; verso il terzo più interno della cicatrice, 9 cm. all'esterno della linea mediana della colonna vertebrale, ed in un punto corrispondente al quinto spazio intercostale, si notava un piccolo orificio rotondeggiante, dai bordi cicatrizzati, avente un lume di quattro mm. all'incirca; l'aria ne fuorusciva e vi penetrava in rapporto rispettivamente con la espirazione e la inspirazione, producendo un leggiero rumore di soffio che diveniva più intenso quando il soggetto parlava o faceva uno sforzo espiratorio. Il soggetto non risentiva alcuna sofferenza sulla parte; egli usava tener chiusa la fistola con un tamponcino di garza fissatovi con una fascia. Dalla fistola gemevano nella giornata poche gocce di un liquido sieroso che non aveva alcun odore. Se se ne eccettui la preoccupazione sull'esito della fistola, il soggetto si sentiva bene. Il

[1] Gazz. Chim. Italiana 1905, I, 461.

respiro era normale; le escursioni delle due metà del torace si compievano contemporaneamente ma apparivano un poco disuguali in ampiezza, con scapito della metà sinistra. La percussione mostrava una breve zona di ottusità attorno alla fistola e lungo la cicatrice; sulla stessa estensione il respiro era soffiante. Nel resto del torace i reperti della percussione e dell'ascoltazione erano normali. Il soggetto aveva solo raramente qualche colpo di tosse.

La posizione della fistola e le notizie riguardanti l'atto operativo ed i dati della specillazione facevano ritenere che il seno fistoloso comunicasse direttamente, e con maggior probabilità per mezzo di una o più diramazioni principali, col bronco che si ramifica al lobo inferiore del polmone sinistro. Che non si trattasse di una piccola comunicazione, si poteva dedurre dall'ampiezza della colonna d'aria che usciva dalla fistola nella espirazione. Il seno fistoloso comunicava certamente con l'albero bronchiale perchè se si applicava all'apertura esterna una sostanza non molto odorosa contenuta in un piccolo batuffolo di cotone ricoperto con un imbuto, il soggetto ne avvertiva subito l'odore, in modo assai intenso, mentre lo stesso odore non era avvertito dagli astanti. Il reperto della specillazione faceva escludere inoltre che il seno fistoloso comunicasse con una cavità modificante il suo volume con i moti del respiro e che determinasse così il getto d'aria attraverso la fistola.

1. *Rapporti fra i movimenti respiratorî del torace e del diaframma.* — Le prime richerche furono dirette a vedere quale fosse il decorso della pressione bronchiale in rapporto con i movimenti respiratorî del torace e dell'addome. Mi servii del metodo spirografico; per compiere questa spirografia bronchiale io introduceva nell'apertura esterna della fistola, che appariva un poco più ristretta del condotto che gli succedeva, una cannula di vetro del diametro interno di 6 mm. e provvista, in vicinanza della estremità che si introduceva nella fistola, di una leggiera strozzatura la quale corrispondeva appunto all'orificio della fistola stessa. Il tubo di vetro era lungo 35 mm. e sporgeva al di fuori del seno fistoloso per circa 15 mm.; esso aveva lo scopo di mantenere sempre uniforme il diametro dell'apertura della fistola durante la serie delle ricerche. Al disopra del tubo si applicava col mastice un imbutino di vetro che si fissava al torace mediante una leggiera fascia elastica; l'imbuto era in comunicazione per mezzo di un tubo di gomma con un tamburo del Marey. A questo modo le modificazioni di pressione dell'interno della fistola si trasmettevano alla cavità chiusa dell'imbuto, e da questa al tamburo registratore. I movimenti del torace si scrivevano servendosi di un doppio tamburo ricevitore del Marey (il comune cardiografo a tamburo del Verdin) fissato con dei nastri al torace. Per l'addome si usò un tamburo provvisto di bottone che appoggiava sulla cute della fossa epigastrica; il tamburo era tenuto in posto da un apposito sostegno. Tanto per il torace quanto per l'addome, la curva dell'inspirazione era segnata da una linea ascendente. In alcune ricerche il soggetto era seduto, in altre era disteso orizzontalmente.

Ciò che colpì l'attenzione fin dai primi esperimenti, fu che nella respirazione tranquilla il decorso della curva dei movimenti toracici non corri-

spondeva a quello della curva spirografica bronchiale, in rapporto con le fasi della respirazione; le oscillazioni inspiratorie ed espiratorie della pressione bronchiale sembravano precedere le curve rispettive dovute ai movimenti del torace. Dirò ora con maggior precisione e sulla guida di una figura come stassero le cose.

Nella fig. 1 la linea superiore (T) è la curva ottenuta dal pneumografo applicato al torace, la linea inferiore (B) è la curva delle modificazioni della pressione nell'albero bronchiale. L'inspirazione è indicata nel tracciato pneumografico da una linea ascendente, nel tracciato spirografico da una linea discendente che segna il divenir negativa della pressione intrabronchiale nella fase inspiratoria. L'esame del tracciato mostra che la pressione nell'interno dei bronchi si abbassa prima che cominci l'espansione del torace e si inalza prima che l'inspirazione toracica cessi, per tornare ad abbassarsi prima che sia terminata l'espirazione toracica. Il fenomeno risulta chiaramente se si comincia l'esame delle curve dopo di aver fatto eseguire al soggetto un brevissimo arresto espiratorio o se si fa rallentare il ritmo nel respiro, come nella fig. 1; si rilevano così assai meglio i rapporti tra le fasi della respirazione; ma tali rapporti non si modificano, se si eccettua la assenza della pausa, nel ritmo ordinario del respiro. L'interferenza tra le due curve si produce costantemente in tutta la serie delle respirazioni, per quanto la registrazione sia prolungata anche per varî minuti e ripetuta a lunghi intervalli. Per riguardo ai rapporti di tempo del fenomeno dirò che il ritardo fra l'abbassamento della pressione bronchiale ed il movimento inspiratorio del torace era di $^1/_6$ ad $^1/_4$ dell'intero atto respiratorio toracico, che durava circa due minuti secondi. Il ritardo fra il rialzarsi della pressione intrabronchiale e l'espirazione toracica era alquanto maggiore, potendo giungere a quasi un terzo dell'intera respirazione.

Se le oscillazioni della pressione bronchiale relative alle singole fasi del respiro fossero avvenute in ritardo sui movimenti del torace, si sarebbe potuto pensare che vi fosse una stenosi nel seno fistoloso per cui la trasmissione delle variazioni della pressione intrabronchiale all'apparecchio registratore fosse ostacolata. Ma poichè invece l'abbassamento inspiratorio e l'innalzamento espiratorio della pressione intrabronchiale precedevano i movimenti inspiratorio ed espiratorio del torace, bisognava ammettere che la curva spirometrica fosse influenzata da un fattore diverso dalla contrazione dei muscoli intercostali e cioè dal diaframma. La registrazione dei movimenti respiratorî dell'addome e delle oscillazioni della pressione bronchiale confermò questa supposizione, come apparisce dalla fig. 2, nella quale la dissociazione delle due curve quale si osserva nella fig. 1 è quasi del tutto scomparsa. Vi è ancora una piccola differenza, ma questa volta è a vantaggio del movimento dell'addome, ed è forse dovuta a che quando comincia l'inspirazione diaframmatica perdura ancora l'espirazione toracica; ora la pressione bronchiale non

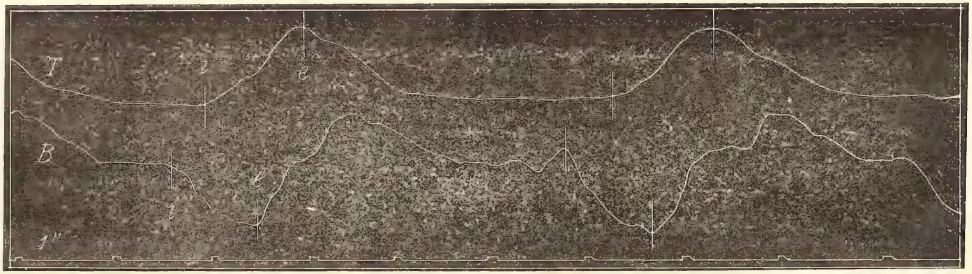


Fig. 1. — *T*, curva dei movimenti del torace; *B*, tracciato della pressione intrabronchiale; *i*, inizio della inspirazione, *e*, della espirazione. Le divisioni del tempo equivalgono ad 1''. Questo tracciato, e così pure i seguenti, si legge da sinistra a destra.

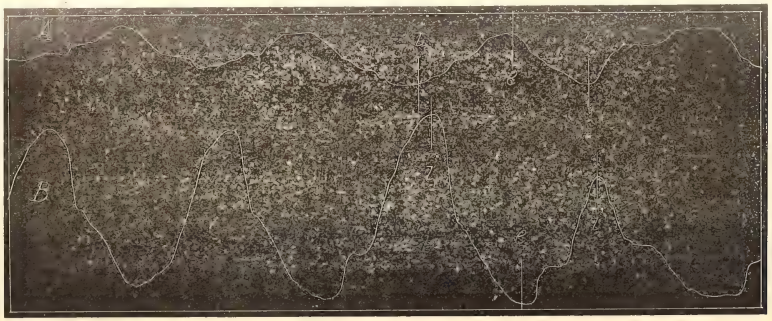


Fig. 2. — *A*, curva dei movimenti dell'addome. Le altre indicazioni come nella fig. 1.

è che la risultante di queste due influenze. Dunque l'interferenza delle oscillazioni della pressione bronchiale con i movimenti del torace si deve a che il movimento dell'aria nei bronchi ubbidisce principalmente ai moti del diaframma, sebbene nei suoi particolari rappresenti la risultante delle due azioni combinate della contrazione dei muscoli intercostali e del diaframma.

Osservando attentamente il succedersi dei movimenti respiratorî del torace e dell'addome, non era difficile l'accorgersi che l'atto inspiratorio si iniziava col sollevamento delle pareti addominali e che l'abbassamento espiratorio di queste ultime precedeva la espirazione toracica. La fig. 3 ottenuta

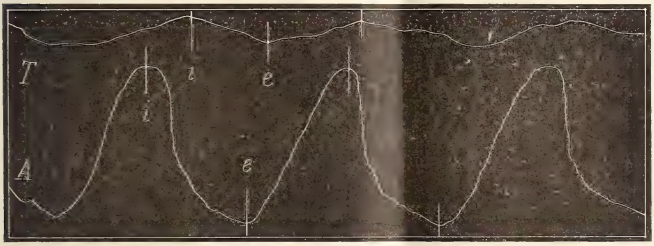


Fig. 3. — *T*, curva dei movimenti del torace; *A*, curva dei movimenti dell'addome; *i*, termine della inspirazione; *e*, termine della espirazione.

applicando il pneumografo al torace ed il tamburo semplice sulla fossa epigastrica serviranno a dare una immagine obiettiva del fenomeno.

Nel soggetto in esame esisteva dunque una dissociazione dei movimenti dei muscoli intercostali e del diaframma, costituita più specialmente dall'entrare essi in azione in tempi diversi durante l'atto respiratorio. L'interesse del fenomeno sta in ciò che esso fu notato costantemente, salvo alcune modificazioni nella intensità e nella forma, per tutta la durata delle mie ricerche che si estesero, con alcune interruzioni, dal giorno 11 al giorno 30 dell'ottobre 1904. Non si trattava quindi di un episodio passeggiero ma di un vero e proprio tipo di respirazione. Le differenze che si notavano da un giorno all'altro consistevano più specialmente nella diversa durata dell'intervallo che separava l'inizio delle due fasi dell'atto respiratorio nel torace e nel diaframma. Uno dei tipi più notevoli di tali modificazioni è dato dal tracciato della fig. 4, in cui la dissociazione interessa solo l'atto inspiratorio; in questo tracciato è rimarchevole anche la diversa durata che hanno la fase inspiratoria ed espiratoria nel torace e nel diaframma.

Raccogliendo la curva spirografica buccale per mezzo di un ampio tubo di vetro comunicante con una bottiglia della capacità di due litri in rapporto con un tamburo del Marey e tenendo chiuse le narici, se nello stesso tempo

si raccoglieva il tracciato dei moti del torace si poteva convincersi che la curva spirografica orale presentava le stesse caratteristiche della curva spirografica bronchiale, le stesse interferenze con i movimenti toracici. Ciò faceva escludere che il tracciato raccolto attraverso alla fistola bronchiale dovesse le particolarità che ho descritte a condizioni di stenosi o ad altro che deformasse la vera curva della pressione bronchiale.

La posizione seduta o la giacitura distesa, supina, del soggetto non modificarono sensibilmente i fenomeni osservati.

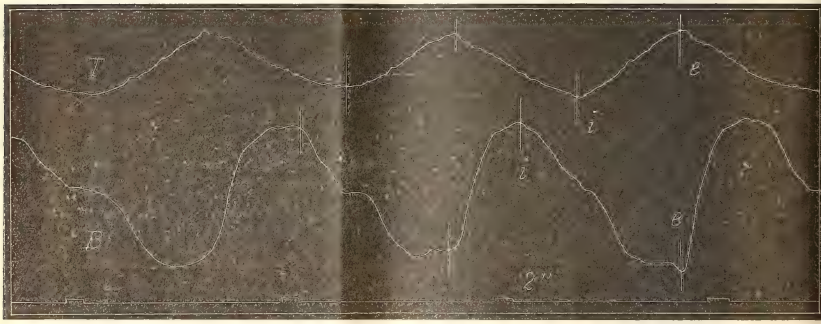


Fig. 4. — *T, B, i, e,* come nella fig. 1.

Era mia intenzione di compiere sullo stesso individuo altre ricerche oltre quelle descritte ed oltre alle osservazioni sulle modificazioni della pressione bronchiale nella fonazione, delle quali mi occuperò fra breve; ma il sig. M. fu costretto ad allontanarsi improvvisamente da Roma restando assente oltre un mese, e quando ritornò, nel dicembre 1904, la fistola era quasi totalmente richiusa.

Il fatto più importante che nella serie di ricerche compiuta mi fu dato di osservare ripetutamente e di controllare in più modi, è la dissociazione già descritta dei movimenti del diaframma e dei muscoli intercostali, che nel soggetto in esame era divenuta il tipo ordinario del respiro.

Le nostre conoscenze sulle varie forme di dissociazione nell'attività dei muscoli respiratorî si devono quasi esclusivamente al Mosso; nelle sue Memorie sulla respirazione [1] quei fenomeni hanno trovata un'ampia e rigorosa illustrazione.

[1] Mosso A., *Sui rapporti della respirazione addominale e toracica nell'uomo,* Arch. per le scienze mediche, 1878, pag. 433; *La respirazione periodica e la respira-*

Le « *interferenze nei movimenti addominali e toracici* » descritte dal Mosso sono rappresentate o dalla diversa intensità con cui si compiono in un dato istante le contrazioni dei muscoli intercostali — o dal diverso stato di tonicità di quei muscoli — o dai differenti rapporti di tempo con cui si iniziano e decorrono in essi le fasi inspiratoria ed espiratoria. Nei rapporti cronologici tali interferenze derivano o da che quelle fasi iniziano in tempi diversi nel torace e nel diaframma, oppure dalla differente durata della inspirazione e della espirazione in quei due ordini di muscoli. Questi fenomeni possono presentarsi isolati o formare una serie di combinazioni che troppo lungo sarebbe il descrivere partitamente e le quali trovano nelle pubblicazioni del Mosso una estesa documentazione grafica; la loro importanza sta nel dimostrarci essi la relativa indipendenza funzionale dei centri nervosi dei singoli gruppi di muscoli respiratorî. Le dissociazioni e gli antagonismi nell'attività del diaframma e dei muscoli intercostali che qui ho ricordate, vennero osservate per la maggior parte nell'uomo in circostanze del tutto fisiologiche; ma si tratta sempre di fenomeni transitorî legati a determinate condizioni funzionali.

Il primo cenno di questa dissociazione nei movimenti del diaframma e dei muscoli intercostali, in condizioni normali e nell'uomo, spetta per quanto io mi sappia all'Hutchinson (1), il quale facendo la ben nota distinzione dei due tipi respiratorî, il costale ed il diaframmatico, notava che nel primo il movimento respiratorio si osserva sempre in antecedenza nelle coste superiori e poi nell'addome, mentre nel secondo tipo di respirazione l'atto respiratorio comincia sempre dall'addome. Nel 1890 H. Sewall ed E. Pollard (2) constatarono graficamente in una serie di individui normali che nella posizione eretta i moti del respiro si iniziano il più spesso nel torace, ma che l'espansione estrema ed il rilasciamento espiratorio del torace e dell'addome sono simultanei. Il ritardo del movimento inspiratorio nell'addome era maggiore quando gli individui stavano distesi sul dorso. Quegli autori videro anche che nel canto la partecipazione del torace e del diaframma con i muscoli addominali è assai diversa a seconda delle variazioni del tono e della voce emessa; ci occuperemo fra breve delle osservazioni da essi fatte riguardanti la fonazione semplice.

Il risultato di tutte queste ricerche si è che le varie forme di dissociazione nei movimenti respiratorî del diaframma e del torace possono rap-

---

zione superflua o di lusso, Mem. della R. Accad. dei Lincei, 1885, pag. 457; *I movimenti respiratorî del torace e del diaframma*, Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1903, pag. 307.

(1) Hutchinson Art. *Thorax* nella Todd and Bowmann's Cyclopedia of Anat. and Physiol. citato da Sewall e Pollard.

(2) H. Sewall and M. E. Pollard, *On the relation of diaphragmatic and costal respiration*, etc., Journal of Physiol. vol. II, 1890, pag. 159.

presentare, almeno fino ad un certo limite ed in determinate circostanze, dei fenomeni del tutto normali. Che in altro grado ed in altre condizioni dell'organismo essi assumano un significato patologico si può argomentare da una recente pubblicazione del Grocco [1], che ha osservato tali dissociazioni nell'attività dei muscoli respiratorî più specialmente in forme morbose in cui era interessato il midollo allungato. Ma quali caratteri facciano distinguere queste dissociazioni respiratorie patologiche da quelle fisiologiche e conferiscano alle prime il carattere prognostico sinistro che gli attribuisce il Clinico di Firenze, non apparisce dalla pubblicazione ora citata.

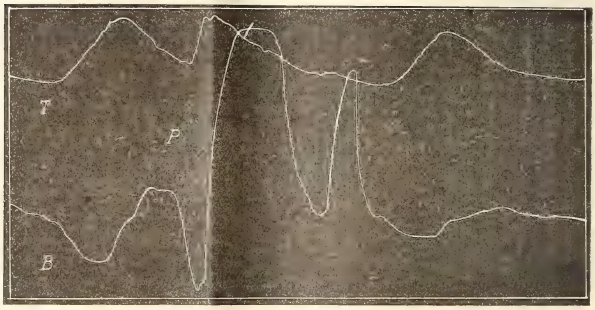


Fig. 5. — *T, B,* come nella fig. 1. In *P,* il soggetto pronunzia la parola *buon giorno.*

Nel nostro soggetto è ammissibile che la prevalenza della respirazione diaframmatica effettuatasi durante il periodo acuto della malattia polmonare, e più tardi i postumi di essa, abbiano resa stabile la forma della respirazione dissociata che si osservava nel sig. M. anche quando ogni traccia del processo acuto polmonare si era dileguata. La curva della pressione intrabronchiale ci dette una immagine fedele della precedenza nel ritmo e della prevalenza funzionale nella contrazione del diaframma sulla contrazione dei muscoli intercostali.

Il grado notevole e la fissità del fenomeno osservato mi parvero meritevoli di illustrazione e di breve commento, costituendo essi un documento assai valido a favore della dottrina della relativa indipendenza funzionale dei vari centri nervosi dei muscoli respiratorî.

2. *Modificazioni della pressione bronchiale nella fonazione.* — Il caso di fistola bronchiale che ebbbi in osservazione mi fornì l'opportunità di compiere qualche ricerca sulle modificazioni della pressione intrabronchiale

(1) P. Grocco, *Respirazione dissociata, ossia di una speciale alterazione dei movimenti respiratorî.* Rivista crit. di Clinica med., vol. V, pag. 333.

durante la fonazione. Sewal e Pollard che studiarono i movimenti del torace e dell'addome mentre i soggetti in esame pronunziavano qualche parola, videro che nella fonazione entravano in attività specialmente i muscoli addominali ed il diaframma. Le ricerche che io feci scrivendo le oscillazioni della pressione intrabronchiale ed i movimenti del torace mi fecero consta-

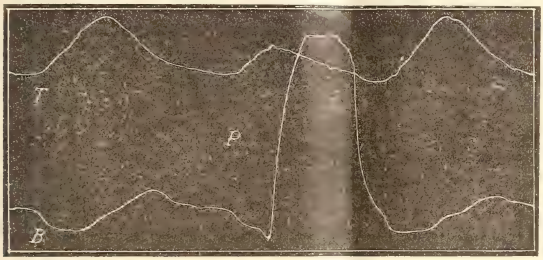


Fig. 6. — *T, B,* come nella fig. 1. In *P* il soggetto dice *no.*

tare che anche il mio soggetto di studio si serviva di preferenza del diaframma per espirare nella fonazione. La fig. 5 corrisponde al momento in

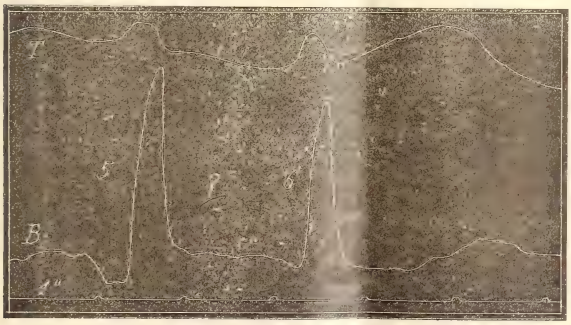


Fig. 7. — *T, B,* come nella fig. 1. In *5,* il soggetto dice *si,* in *6* dice *no.*

cui il soggetto pronunzia la parola *buon giorno;* anche il torace si trova in attitudine espiratoria, ma è facile accorgersi che i notevoli aumenti della pressione bronchiale non possono essere dovuti ai muscoli intercostali; d'altra parte era facile constatare con l'ispezione l'energico abbassarsi della regione epigastrica che coincideva con la fonazione. Lo stesso valga per la fig. 6, che

rappresenta il movimento del torace e le oscillazioni della pressione bronchiale nel momento in cui il soggetto pronunzia il monosillabo *no*; in questo caso l'espirazione toracica è minore che nelle ordinarie respirazioni, mentre l'elevazione della pressione è assai ampia. Nella fig. 7 è rappresentato un fenomeno che io ho osservato più volte durante la fonazione energica ed in special modo nell'emissione di monosillabi staccati; in questo caso non solo il torace non partecipa all'espirazione fonetica, ma sotto l'impulso del rapido ed energico movimento del diaframma, esso si dilata passivamente. Questa dilatazione della cassa toracica quando si compiono rapidi ed intensi moti del diaframma può constatarsi anche poggiando la mano sul torace stesso. Naturalmente anche i muscoli dell'addome partecipano alle brusche scosse espiratorie che avvengono durante la fonazione; si può infatti constatare che durante la fonazione a voce alta, le pareti addominali si tendono contraendosi vivacemente. Ma quale parte spetti alle pareti addominali e quale al diaframma nel processo della fonazione non è agevole il determinarlo con precisione.

Patologia vegetale. — *Ricerche intorno al modo di caratterizzare le alterazioni prodotte alle piante coltivate, dalle emanazioni gassose degli stabilimenti industriali* [1]. Nota del dott. Ugo Brizi, presentata dal Socio G. Cuboni.

Nelle vicinanze di stabilimenti industriali le emanazioni gasose che fuoriescono, producono, come è noto, assai di frequente, lesioni o disturbi funzionali nelle piante coltivate, a distanza alcune volte assai grande dal luogo di produzione di esse. Ciò è causa di quotidiane controversie fra industriali ed agricoltori, che danno luogo sovente a perizie legali per accertare le cause di danno.

Di questo argomento moltissimi autori si sono occupati, ed abbiamo già, sia nell'analisi chimica, sia nella ricerca microscopica, dei mezzi sufficienti per potere nella maggior parte dei casi fare, abbastanza sicuramente, diagnosi generica di danni prodotti da vapori acidi.

Come è noto i gas che più frequentemente sono causa di danni, sono in primo luogo i vapori solforosi, anidride solforosa od acido solforoso o solforico, meno frequenti i vapori fluoridrici ed idroclorici.

Nella pratica non è sempre possibile fare una più precisa diagnosi, ed attribuire le lesioni che si trovano sulle piante all'uno piuttosto che all'altro gas, per cui nelle località dove diverse fabbriche o stabilimenti funzionano

[1] Laboratorio di Patologia vegetale della R. Scuola Superiore di Agricoltura di Milano, febbraio 1906.

contemporaneamente, producendo gas diversi, non si sa spesso a chi attribuire la responsabilità dei danni.

L'analisi chimica non ci dà però sempre un grande aiuto in tale questione, perchè molti dei composti che l'analisi rivela, entrano come costituenti normali e in quantità assai variabili, delle ceneri delle piante. La stessa ricerca chimica non potrebbe dar risultati sicuri se non con analisi comparative e minute non sempre facili o possibili, giacchè l'esperienza dimostra che alcuni gas, come l'acido fluoridrico, possono danneggiare gravemente le foglie verdi, pur essendo in quantità estremamente piccola, e tale da non lasciar spesso neppure traccia all'analisi chimica.

Di più l'analisi chimica comparativa fra piante sane e supposte danneggiate da vapori acidi, ha il grave inconveniente che spesso le piante che si suppongono alterate da fumi, sono invece danneggiate da altre cause sopratutto parassitarie, e in tal caso presentano ugualmente una differenza, alcune volte assai grande, di dati analitici, differenza che potrebbe venir attribuita all'azione dei fumi.

L'esame microscopico è di un prezioso aiuto, in primo luogo perchè ci permette di determinare subito se trattasi invece di malattia parassitaria, ed anche perchè ci permette di avere dei caratteri, come lo scrivente dimostrò ampiamente in altra pubblicazione, per determinare quando le lesioni sulle foglie siano prodotte da acido solforoso, da acido cloridrico, o da disturbi fisiologici, come scottatura per colpo di sole o per freddo intenso.

Finora però non furono mai descritti o indicati caratteri netti e precisi per poter distinguere, colla ricerca microscopica minuta, le lesioni prodotte esclusivamente da vapori idrofluorici.

La questione è di grande importanza pel fatto che vapori idrofluorici si producono e sfuggono, più o meno, salvo dove gli apparecchi di condensazione sono perfetti, funzionano bene e costantemente, dalle oramai numerose fabbriche di concimi chimici che producono perfosfati, partendo dalle fosforiti, le quali contengono sempre una certa quantità di fluoruri, specialmente di calcio.

All'intento di contribuire a risolvere questo interessante problema per la pratica, ho eseguite nello scorso anno numerose esperienze, studiando i caratteri delle lesioni sperimentali prodotte dall'azione di vapori idrofluorici, e confrontandole con quelle che ho di fatto riscontrate in vicinanza di fabbriche di perfosfati minerali.

Riservandomi di pubblicare, col sussidio di figure, l'intero lavoro, descrivendo anche in modo particolareggiato le modalità delle esperienze, riassumo le conclusioni alle quali sono giunto, che dimostrano come sia possibile, in certe condizioni, affermare con certezza se, certe lesioni che si manifestano sulle foglie di alcune piante coltivate, sopratutto dei gelsi, siano dovute o meno all'azione nociva di vapori idrofluorici.

Le esperienze furono eseguite sottoponendo rami di gelso, in atmosfera confinata, all'azione di quantità variabili di vapori di acido fluoridrico puro, e, per avere condizioni simili a quanto può avvenire in natura, anche a vapori di fluoruro di silicio i quali ultimi appunto si svolgono nelle fabbriche di perfosfati, in seguito al trattamento delle fosforiti con acido solforico.

In tutti i casi, il modo di comportarsi e i caratteri delle lesioni sperimentali furono, nelle foglie di gelso, che sole vennero per ora studiate, quasi identici.

Il metodo usato fu lo stesso già adoperato da Ost e da Schmitz-Dumont, soltanto che le campane di vetro di determinata capacità, e tutte le parti in vetro dell'apparecchio vennero spalmati di paraffina per evitare l'azione corrosiva dei vapori idrofluorici.

In una prima serie di esperienze, alcuni rami giovani di gelso furono sottoposti per circa tre ore all'azione di una piccola quantità di vapori di acido fluoridrico puro fumante, circa $^1/_{1000}$ in volume.

Mantenendo l'aria nell'interno dell'apparecchio perfettamente secca, ed evitando con particolari disposizioni l'entrata di vapore d'acqua nell'interno dell'apparecchio, dopo un'ora circa si notava che le foglie giovanissime cominciavano ad imbrunire leggermente all'apice, imbrunimento che in seguito rapidamente si estendeva a tutto il margine della foglia, la quale già dopo due ore cominciava ad accartocciarsi leggermente.

Le foglie così colpite venivano tolte successivamente e sottoposte alla indagine microscopica, in modo da avere la opportunità di osservare il progressivo sviluppo delle alterazioni.

Ulteriori esperienze furono fatte facendo agire i vapori di acido idrofluorico in presenza di acqua allo stato di vapore, iniziando cioè l'esperienza quando le foglie dei rami di gelso avevano quasi saturata l'aria contenuta nell'apparecchio con vapor d'acqua di traspirazione.

Prove analoghe furono poi istituite con rami di gelso adulti, adoperando, con aria mantenuta perfettamente secca, vapori di fluoruro di silicio.

In tutti i casi, le porzioni della lamina foliare del gelso imbrunite per opera dei gas, perdono immediatamente la facoltà di traspirare. La sottrazione di acqua d'imbibizione delle pareti delle cellule epidermiche è tanto violenta che, quando peraltro la foglia non è ancora appassita e quando le parti imbrunite si conservano ancora turgide, la porzione imbrunita è resa *impermeabile*, verosimilmente perchè riesce profondamente alterata la sua struttura molecolare. Infatti tutte le prove eseguite, senza eccezione, quando l'azione dei vapori acidi era recente, sulle foglie di gelso, hanno dimostrato che, in corrispondenza della porzione di lamina imbrunita, non vi era più eliminazione d'acqua nè per traspirazione cuticolare, nè stomatica, il che era assai facile provare col metodo solito della carta al cobalto o alla pellicola di collodion.

Tale sottrazione d'acqua è meno rapida e meno violenta, quanto più è spessa la cuticola, la quale oppone una valida resistenza. È questa la ragione per la quale le foglie già adulte risentono danni molto minori e occorre per queste, a tutte le altre circostanze pari, una quantità di vapori di HF, e una durata d'azione assai più lunga per determinare le caratteristiche lesioni sulla lamina.

Nelle foglie giovani nelle quali la cuticola è in formazione ed è assai sottile, la disidratazione della membrana delle cellule epidermiche è invece rapidissima, e si inizia precisamente ai margini e all'apice di accrescimento della foglia, dove la cuticola è anche meno spessa, come l'esame istologico dimostra. Che a ciò sia dovuta questa maggior facilità di disidratarsi della epidermide delle foglie giovani, ho potuto dimostrare ripetendo le esperienze con foglie di gelso ugualmente giovani, preventivamente spalmate di un sottile strato di vaselina pura. In tal modo le foglie, a tutte altre circostanze uguali, resistettero fin a quattro ore di più, prima di presentare traccie di imbrunimento all'apice; si dimostrarono in qualche caso molto più resistenti delle foglie adulte

Non è perciò affatto esatto quanto alcuni affermano, e come generalmente si ritiene, che cioè simili lesioni che si formano sulle foglie di gelso, siano dovute alla causticità della soluzione acida che si forma in presenza di acqua liquida, la quale scorrendo o localizzandosi ai margini e all'apice vi determina dalle bruciature.

Il fenomeno avviene, è vero, con intensità alquanto maggiore, nell'aria umida, probabilmente perchè il fluoruro di silicio, quando l'aria è umida si trasforma, come è noto, dando silice gelatinosa ed acido idrofluosilicico, il quale è assai dannoso e di azione più pronta, ma si produce perfettamente anche quando la superficie delle foglie sia completamente asciutta.

Spruzzando leggermente le foglie di un ramo di gelso con una soluzione acquosa di acido fluoridrico al 0,5%, ed esponendo le foglie in esperimento al sole o all'aria in modo da provocare una rapida evaporazione, si formano solo allora delle vere bruciature dovute all'azione caustica della soluzione acida, la quale nelle singole goccioline, aumentando man mano il titolo di concentrazione colla evaporazione, finisce col bruciare l'epidermide della foglia. Ma in tal caso le bruciature sono circoscritte all'area bagnata, sono almeno in principio di un colore rossastro o rosso vivo, analoghe a quelle già descritte altrove e cagionate dalla azione caustica dell'acido solforoso, e ben diverse anche nei caratteri anatomici ed istologici da quelle prodotte invece dalla sottrazione d'acqua di imbibizione.

Infatti, nelle prime la porzione ustionata diventa fragilissima e manifesta una vera e propria distruzione di tessuti, che non si ha invece quando i vapori agiscono allo stato gasoso, come nelle esperienze accennate.

L'esame microscopico delle lesioni sperimentali ottenute nel modo suindicato ha dimostrato che esse sono ben diverse da quelle prodotte sia naturalmente, sia artificialmente, da vapori solforosi, e sopratutto da SO_2. Infatti in queste ultime si nota, quando l'alterazione è recente, una contrazione e depressione di tessuti che denota la scomparsa del turgore in tutto il mesofillo, il che non avviene nel caso delle lesioni sperimentali da HF.

In esse è solo la parete esterna delle cellule della epidermide che, privata con violenza dell'acqua di imbibizione, perde la permeabilità, ma il tessuto a palizzata resta turgido per molto tempo. Infatti nessun fenomeno plasmolisico si nota negli elementi del palizzata in corrispondenza delle lesioni recenti, il che avverrebbe senza fallo se la sottrazione d'acqua si estendesse e propagasse al mesofillo, come avviene invece nelle lesioni da SO_2, nelle quali il carattere più saliente delle ustioni fresche, osservate e preparate colla nota tecnica, è appunto quello di presentare nelle cellule del mesofillo il progressivo distacco dell'ectoplasma, e la conseguente rapida perdita delle proprietà vitali di tutto il protoplasto.

Non ho osservata mai vera plasmolisi in nessuna delle lesioni sperimentali ottenute con HF, non solo quando esse sono appena iniziali, ma anche se spinte fino al punto in cui l'intera foglia di gelso era circondata da un largo bordo marginale di color bruno nerastro, che si spingeva attraverso gli spazi interneurali. Questo carattere basta a far distinguere subito le lesioni da SO_2 da quelle prodotte invece da HF, come ho potuto convincermi anche con prove sperimentali comparative, trattando contemporaneamente foglie di gelso giovani con SO_2 col metodo già altrove descritto.

Le lesioni da HF, come risulta da quanto ho accennato, non meritano perciò il nome di ustioni o corrosioni come alcuni autori, quali Ost, Schmitz-Dumont, Haselhoff le chiamano, giacchè non vi è affatto corrosione di tessuti.

Altri caratteri differenziali presenta l'esame istologico del mesofillo. La membrana delle cellule del palizzata imbrunisce leggermente pur rimanendo le cellule turgide, turgore che si può mantenere artificialmente a lungo su grossi frammenti di foglia di gelso, e che dimostra come l'ectoplasma non abbia perduta la sua vitalità. Ciò è anche provato dal fatto facile a constatare, che quest'ultimo per lungo tempo non assorbe e non lascia passare una soluzione acquosa di eosina; quando in seguito il protoplasto ha perduto le proprietà vitali, e che lascia passare la sostanza colorante, esso non presenta un apprezzabile distacco dalla membrana.

In seguito i cloroplastidi si scolorano ingiallendo e facendosi poi di una tinta dorata, ma non presentano mai il fenomeno del rapido gonfiamento seguito dalla dissoluzione completa, come nel caso dell'SO_2.

Questo carattere, facile ad osservarsi ed assai evidente, ci permette, oltre che di distinguere le lesioni dovute ad HF da quelle dovute a SO_2, anche quelle prodotte da HCl. Infatti in quest'ultimo caso, almeno nelle lesioni

iniziali, i cloroplastidi si scolorano interamente, disorganizzandosi anch'essi in seguito, sebbene lentamente.

Inoltre i cloroplastidi del palizzata, in corrispondenza delle lesioni artificiali da HF, anche dodici ore dopo cessata l'esperienza, in preparati a fresco, si colorano subito e facilmente in rosso intenso col reattivo di Millon, colorazione, che come è noto, e come è facile constatare operando su preparati a fresco di foglie sane, non si ottiene, nel caso normale, che difficilmente, questa colorazione invece non assumono affatto i cloroplastidi nel caso delle lesioni da SO_2 e da HCl.

Di più, i granuli d'amido fuorusciti dai cloroplastidi, ed abbondanti nelle cellule del palizzata delle giovani foglie del gelso, non subiscono notevoli alterazioni nè si rigonfiano affatto, mentre nel caso di lesioni da SO_2 si rigonfiano grandemente, fino a scomparire.

Questi caratteri ed altre particolarità che accennerò nel lavoro completo, sono, a mio giudizio, bastevoli *quando la lesione sia recente*, a distinguere sufficientemente se le foglie di gelso (giacchè le esperienze per ora sono limitate a questa pianta) siano alterate per causa di gas nocivi. Fra i tre nocivi più frequenti, cioè vapori di HF, di SO_2 o di HCl, credo, collegando le presenti ricerche con quelle altrove [1] pubblicate, di poter affermare la possibilità di riuscire a distinguere qualle prodotte da ciascuno di essi.

Le esperienze accennate nella presente Nota, ebbero poi la conferma nello studio di lesioni recenti, non sperimentali ma prodottesi su gelsi in vicinanza di fabbriche di perfosfati in varie località dell'Italia settentrionale.

Ho detto che, naturalmente, è indispensabile che le lesioni siano molto recenti perchè siano visibili e controllabili, i caratteri microscopici suesposti. Infatti nelle foglie del gelso, sopratutto in quelle giovanissime, le porzioni imbrunite e lesionate, subito muoiono, presto si alterano e facilmente vengono assalite con rapidità da muffe ubiquitarie se l'ambiente è umido, finiscono col disseccarsi, diventando fragilissime, se è invece asciutto.

[1] Staz. Sperim. Agrar. ital., XXXVI, pagg. 279-384.

Patologia vegetale. — *Nuove ricerche sopra i batteri della Mosca olearia.* Nota di L. Petri, presentata dal Corrispondente G. Cuboni.

Ho già fatto conoscere in altre due Note preliminari [1] come l' intero periodo larvale della mosca olearia si svolga con la coesistenza, nei ciechi cardiaci, di un batterio riferibile [2] all'*Ascobacterium luteum* Babes. Questo microorganismo nei suoi rapporti con la vita della larva non presenta i caratteri di una specie banale, non si trova infatti mai nel pericarpio delle ulive attaccate dall'insetto e la sua presenza quindi nell' intestino non può esser attribuita all'ingestione di un nutrimento inquinato. Inoltre la particolare e costante localizzazione nel tubo digerente unitamente alla sua energica azione lipolitica, lasciano supporre che esso almeno parzialmente sostituisca nella funzione digestiva le secrezioni dei ciechi gastrici nell'alimentazione della larva.

È probabile quindi che veri rapporti simbiotici esistano fra insetto e batteri, e per determinare se effettivamente si verifichi un mutualismo fra i due organismi le mie ricerche sono state rivolte alla realizzazione di quelle condizioni sperimentali per le quali, escluso l'intervento di germi esterni, lo sviluppo della mosca si svolgesse in modo da poter fornire i dati che contribuissero alla risoluzione di alcuni quesiti i quali necessariamente per primi si presentano; e cioè se i batteri sieno completamente espulsi dalla larva prima della ninfosi o se, passati all'adulto, sieno poi da questo nuovamente trasmessi alla larva.

Le ricerche eseguite in questi ultimi mesi e che per ora riassumo brevemente, aggiungendo qualche figura per meglio chiarire la concisa descrizione, si riferiscono alla coltura della mosca in ambiente sterile ed ai rapporti del batterio coi diversi stadi di sviluppo dell'insetto. Esse confermano innanzi tutto la costanza della presenza dell'ascobatterio nell'intero periodo larvale e questo fatto acquista già una certa importanza quando larve costituite, specialmente nel tubo digerente, come quelle della mosca olearia (per es. quella della mosca delle ciliege) presentano i quattro ciechi sempre completamente vuoti di microrganismi, anche quando questi ultimi sieno contenuti abbondantemente nei frutti attaccati dalle larve (specialmente *saccaromiceti*).

[1] Questi Rendiconti, vol. XIII e XIV, 1904-05.

[2] Questo riferimento non deve esser ritenuto ancora per definitivo; le ricerche in proposito continuano anche riguardo alla sua identificazione con un ascobatterio a colonie gialle comune nei tubercoli della rogna dell'ulivo.

Per effettuare la coltura della mosca in ambiente perfettamente sterile, le ninfe di 6 a 8 giorni sono state sterilizzate esternamente mediante il passaggio successivo: 1° in una soluzione acquosa di sublimato al 2 % (per 3 minuti), 2° in alcool a 90° (½ minuto), 3° in tubi sterili completamente asciutti per esser poi rapidamente fatte cadere nei recipienti di coltura. Questi ultimi sono disposti in modo da poter provvedere al nutrimento delle mosche,

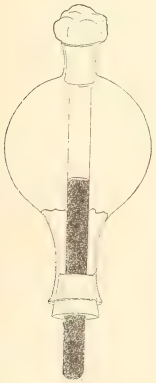


Fig. 1.

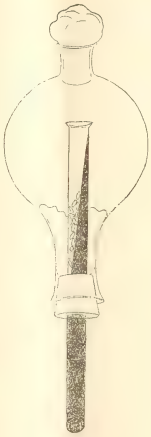


Fig. 2.

e nello stesso tempo fornire un controllo costante della sterilità del recipiente dove le mosche sono allevate. Le figure quì unite ne mostrano schematicamente la costruzione. Un pallone di vetro della capacità di un litro a due aperture è munito a una di queste di un tappo di sughero portante in un foro centrale un lungo e grosso tubo da saggio, di 25 mm. circa di diametro, riempito per metà del seguente substrato nutritivo: agar gr. 1,5; peptone (Merck) gr. 1; glucosio anidro gr. 1; saccarosio gr. 6, acqua distillata gr. 100. L'altra apertura del pallone è chiusa da cotone contro il quale è spinto il tubo da saggio che viene in tal modo otturato per impedire, durante la sterilizzazione, un parziale essiccamento dell'agar e una conseguente condensazione di vapor acqueo sulle pareti del pallone, inconveniente che spesso si verifica malgrado le più accurate precauzioni e che rende il pallone inadatto alla vita delle mosche. Del cotone è pure posto fra il collo del pallone e il tubo da saggio. Prima da versare l'agar nel tubo, tutto

l'apparecchio meno il tappo di sughero è sterilizzato a 150° C. per mezz'ora. La sterilizzazione definitiva, tenendo l'apparecchio come mostra la fig. 1, è eseguita in una stufa ad aria secca a 100° C. per un quarto d'ora per tre giorni consecutivi.

La stufa a vapore circolante non può esser adoperata per l'inconveniente già lamentato della condensazione del vapor acqueo sulla superficie interna delle pareti del pallone. Il raffredamento dell'apparecchio dopo l'ultima sterilizzazione è compiuto mentre l'apparecchio stesso trovasi in una posizione tale da determinare il consolidamento dell'agar secondo una superficie inclinata. Le ninfe dopo la sterilizzazione esterna vengono rapidamente fatte cadere dal tubo dell'ultimo passaggio in quello contenente l'agar dell'apparecchio di coltura. Quest'ultima operazione è così rapida, che il contatto dell'aria esterna non è più lungo di quello che si verifica in un trapianto ordinario di coltura.

Il tubo da saggio dell'apparecchio è ora allontanato, tirandolo dall'estremità esterna, dal cotone che chiude l'apertura per cui sono passate le ninfe (fig. 2). L'agar nutritiva adoperata è un substrato favorevole allo sviluppo delle mosche e a quello dei batteri più comuni dell'aria, in special modo poi vi si sviluppano abbondantemente i bacilli della larva. Apparecchi più semplici e più sensibili per ciò che riguarda il controllo della sterilità del recipiente di coltura sono stati adoperati facendo uso di matracci Erlenmeyer con uno strato di agar al fondo, oppure dei grossi tubi da saggio contenenti alcuni centimetri cubici della medesima agar. Gl'insuccessi più comunemente sono dovuti allo sviluppo di *Penicillium glaucum*. Dopo un mese circa da che le mosche erano nate, venivano gettate rapidamente nei recipienti di coltura da un tubo sterilizzato, due o tre olive sterilizzate pur esse all'esterno con sublimato.

La deposizione delle uova nelle condizioni descritte avviene dal 35° al 45° giorno dalla nascita. (Temperatura media 25° C.).

Gli esperimenti furono ripetuti per due generazioni di mosche servendosi di 20 ninfe di 5-8 giorni per ciascun apparecchio di coltura. I risultati ottenuti in quelle colture, nelle quali la sterilizzazione dell'apparecchio e quella esterna delle ninfe si è dimostrata perfettamente effettuata e gl'inquinamenti dall'esterno non si sono verificati, si possono riassumere come segue:

1° Le larve nate da uova depositate in olive sterili da mosche nate e vissute in ambiente sterile, presentano i soliti batteri nelle tasche gastriche anche prima di uscire dall'involucro dell'uovo.

2° La maggior parte delle colture in ambiente sterile condotte nel modo descritto, presentano dopo 10 giorni circa dalla nascita dell'adulto un abbondante sviluppo dei batteri della larva sopra la superficie dell'agar.

3° Con l'originarsi delle colonie batteriche, coincide la morte della maggior parte delle femmine e più raramente dei maschi.

Se la trasmissione dei batteri dall'adulto all'uovo avvenga quando questo è ancora contenuto nei tubi ovarici, oppure durante la deposizione, lo ignoro completamente. Il fatto di trovare i batteri nell'intestino della larva quando questa è ancora racchiusa nell'involucro dell' uovo avvalora forse la prima supposizione, ma sussiste sempre il dubbio se in questo stadio della larva perfettamente costituita l'involucro dell'uovo non presenti qualche soluzione di continuità in corrispondenza dell'armatura boccale. Gli esperimenti eseguiti per ottenere in mezzi artificiali sterili lo sviluppo della larva da uova tolte asetticamente dagli ovari della mosca al momento della deposizione, hanno dato per ora risultati negativi. Le piastre d'agar sementate col prodotto dello spappolamento delle uova rimangono sempre sterili; quest' ultimo risultato ha però un valore molto relativo come mostrerò in seguito. Un fatto degno di nota è il trovare, dopo la deposizione, un certo numero di batteri nella cavità che nel pericarpio dell'oliva accoglie l'uovo. Se questi batteri siano della stessa specie di quelli che si trovano nell' intestino della larva non ho potuto determinarlo, giacchè trasportati sui mezzi ordinari di coltura non si sono mai moltiplicati.

Lo sviluppo del bacillo della larva che si verifica nella maggior parte delle colture della mosca in ambiente sterile dopo alcuni giorni dalla nascita degli adulti, dimostra innanzi tutto che il bacillo stesso trovasi effettivamente nell' insetto perfetto. Esso non poteva provenire che dalle mosche, giacchè le ninfe deposte da più di un mese sopra l'agar non avevano mai dato origine a nessuna colonia.

Inoltre alcuni tubi aperti e contenenti agar nutritiva esposti periodicamente come controllo nel termostato dove erano le colture, non mostrarono mai sviluppo di colonie del batterio in questione. La formazione di queste colonie coincide d'altra parte con la morte delle femmine e in rari casi di qualche maschio. L'intestino delle mosche appena morte si presenta completamente vuoto, scomparendo pure i grossi accumuli di batteri che nello stato normale dell'insetto vi sono contenuti. Questi batteri trasmessi dalla larva all'adulto, come dimostrano le colture della mosca in ambiente sterile, espulsi per un fenomeno patologico dall'intestino, riprendono nel substrato favorevole al loro sviluppo la vita soprafitaria dimostrando con le caratteristiche morfologiche delle loro colonie l'indentità con i batteri dell'intestino larvale.

Probabilmente la natura speciale del nutrimento fornito alle mosche ha provocato nel loro tubo digerente la moltiplicazione anormale del microorganismo e la conseguente espulsione seguita dalla morte dell'insetto. L' ingestione dei batteri insieme all'alimento sembra non avvenire, o avvenendo, non è questa una causa di morte per quelle mosche che sono sopravvissute, giacchè alcuni maschi per lungo tempo hanno potuto vivere negli apparecchi di coltura inquinati dal batterio. Lo sviluppo anormale di quest'ultimo sembra avvenire più spesso nelle femmine e forse esclusivamente; ricerche ulteriori

sono necessarie per determinare bene questo punto; la temperatura elevata (28°-30° C.) favorisce il verificarsi del fenomeno che coincide allora anche col 4° giorno della nascita degli adulti. La sola natura del nutrimento non sembra sufficiente a provocarlo; concorrono senza dubbio altre condizioni riguardanti specialmente lo stato fisiologico in cui trovasi il batterio nell'intestino della mosca. Devo far notare che i risultati delle colture dell'insetto in ambiente sterile sono in aperta contraddizione con quanto avrebbesi potuto supporre riferendosi ai dati dell'analisi batteriologica fatta coi metodi ordinari (per aerobi ed anaerobi) della ninfa, del tubo intestinale e degli ovari dell'adulto. Infatti sono sempre rimaste sterili le piastre preparate con agar nutritiva e sementate con diluizioni derivate dallo spappolamento della ninfa sterilizzata previamente all'esterno, degli ovarî e dell'intestino medio tolti asetticamente dalla mosca. Anche le piastre sementate col contenuto delle tasche gastriche della larva spesso rimangono sterili, e ciò si verifica specialmente quando si tratti di larve giovani; e anche nei casi di abbondante sviluppo di colonie il materiale batterico di sementa è sempre di una quantità grandissima in confronto al numero delle colonie formatesi, ciò che dimostra che molti dei batteri non si moltiplicano. Il numero di queste forme non coltivabili varia a seconda dell'età e delle condizioni biologiche della larva; nei primi stadî infatti gli elementi coltivabili mancano quasi del tutto, aumentano e costituiscono la maggioranza dei batteri contenuti nei ciechi gastrici negli ultimi periodi larvali precedenti la ninfa, e quando la larva per cause esterne venga a morte. In questi casi il batterio si moltiplica attivamente dando origine anche ad elementi capsulati come nelle colture. Questo diverso comportamento del microorganismo di fronte ai terreni colturali ordinari è in relazione a una modificazione morfologica. Le forme allungate, che non sono forme d'involuzione, non si moltiplicano coi metodi ordinari, e queste costituiscono la maggior parte del contenuto batterico intestinale; quelle brevi cocciformi, corrispondenti alla forma saprofitica quale si riscontra nelle colture, si moltiplicano attivamente coi metodi ordinari e vanno aumentando di numero con l'età della larva e in dati periodi della vita dell'adulto. Sperimentalmente ho potuto dimostrare che tanto le forme allungate che quelle brevi sono realmente modificazioni della stessa specie.

Delle larve giovani, dopo essere state sterilizzate all'esterno mediante una soluzione acquosa di sublimato al 2 % e lavate poi in acqua distillata bollita sono state immerse in agar nutritiva liquida (a 39° C.) contenuta in tubi da coltura. Questi ultimi erano agitati in modo da fare andare al fondo le larve e quindi rapidamente posti nell'acqua fredda; le larve così rimanevano imprigionate negli strati profondi dell'agar che si consolidava e morivano ben presto per asfissia. Dopo 15 o 20 giorni (temp. 27° C.) si formava un'aureola intorno al corpo delle larve prodotta dallo sviluppo del bacillo capsulato.

Al decimo giorno, togliendo le larve dal tubo ed esaminando al microscopio i ciechi gastrici, questi si mostrano ripieni dei soliti batteri allungati ora in filamenti che si segmentano in articoli brevi cocciformi. Gli insuccessi che si verificano in colture cosifatte sono dovuti al fatto che le larve riescono talvolta ad aprirsi una via attraverso l'agar, risalendo nella parte superiore del tubo ed andando a formare la pupa fra il cotone di chiusura.

Per ovviare a questo inconveniente ho trovato utile adoperare agar al 2 % anzichè all'1,5 %. Altre volte prende grande sviluppo un bacillo saprofita che ordinariamente entra a far parte dei processi di marcescenza delle olive bacate, esso sfugge all'azione del sublimato perchè probabilmente rimane chiuso nelle cavità stimmatiche della larva durante la sterilizzazione. Questo batterio forma delle colonie bianche perlacee. Quando la ninfa si forma alla superficie dell'agar, si sviluppa anche allora l'ascobatterio in corrispondenza dell'apertura anale da cui insieme all'intima intestinale viene espulso all'esterno prima della ninfosi.

A questo momento esso ha riacquistato le piccole dimensioni della forma comune saprofitaria.

L'esistenza di uno stato d'*incoltivabilità* del batterio coi mezzi ordinari, spiega i risultati in apparenza contraddittori delle colture delle mosche in ambiente sterile e quelli dell'analisi batteriologiche dei diversi periodi di sviluppo e degli organi dell'adulto. Infatti, basandosi sui dati di queste ultime, nè la ninfa, nè l'insetto perfetto presenterebbero il bacillo capsulato, asserzione che le colture delle mosche in ambiente sterile hanno dimostrata falsa. E d'altra parte l'esame microscopico viene a confermare i dati delle esperienze ed a colmare le lacune lasciate dal semplice metodo colturale di indagine batteriologica.

Mi era nota sino dal principio di queste ricerche la presenza di batteri nell'intestino dell'adulto; ma perchè le colture di questi microorganismi non erano mai riuscite e perchè nell'insetto appena nato erano sfuggiti alla mia osservazione, ritenni allora che si trattasse di germi ingeriti con gli elementi senza alcun rapporto con quelli larvali.

Riassumo ora brevemente i risultati sin qui ottenuti mediante l'esame microscopico. Nella larva, dalla schiusa dell'uovo all'incrisalidamento, i batteri sono contenuti, come ho già detto, nei quattro grossi ciechi cardiaci, la loro localizzazione rispetto alla intima dell'imbuto sarà descritta in seguito, essi mancano nell'esofago, nelle ghiandule salivari e solo di rado ne ho osservati nell'intestino medio evidentemente da considerarsi come il prodotto di una esuberante moltiplicazione dei batteri stessi nei quattro ciechi. Nella larva matura vicina allo stadio di proninfa, ma ancora mobile, le tasche gastriche si presentano completamente vuote di batteri, l'intestino medio invece ne presenta dei forti accumuli in via di espulsione. La larva già rac-

colta su sè stessa ma nella quale l'acqua bollente produce la completa distensione, presenta uno scarso numero di batteri in generale subito sotto l'imbuto. Nello stadio susseguente quando cioè l'acqua bollente non provoca più l'allungamento del corpo, i pochi batteri rimasti si trovano nell'imbuto e nell'esofago.

Nella ninfa del 6° giorno fino a quella del 17° giorno non ho per ora trovato traccia di batteri; la ricerca delle spore eseguita col metodo di Möller ha dato risultati negativi. Non escludo però che durante i processi d'istolisi il batterio sporifichi; è da notare che esso entra nel numero di quelle specie che negli ordinari terreni colturali non formano mai spore.

Quando l'adulto è quasi completamente formato e vicino alla nascita, allora in piccolissimo numero i batteri si presentano in un diverticolo esofageo impari, dorsale, provvisto nella regione distale di un epitelio ghiandolare in attiva secrezione. I batteri si trovano nel lume molto ridotto di questa regione ghiandolare e molto probabilmente ivi si moltiplicano a spese del secreto epiteliale.

Nel rimanente del tubo intestinale non se ne ha traccia. L'adulto appena nato non differisce, per quanto riguarda la localizzazione dei batteri, da ciò che ho già detto; dopo 20 ore dalla nascita effettuata in ambiente sterile, e mantenuto l'insetto in completo digiuno, i batteri si sono notevolmente moltiplicati nel diverticolo esofageo nel quale diminuisce la secrezione aumentando il lume quasi completamente riempito dai batteri. Nel resto dell'intestino non se ne ha traccia. Dopo 30 ore dalla nascita, l'adulto nato e mantenuto in ambiente sterile e in completo digiuno, mostra i primi batteri nell'intestino medio e nell'esofago. Le sezioni dimostrano come avvenga un passaggio dei batteri del diverticolo esofageo nell'esofago e nell'intestino medio, probabilmente come prodotto di rifiuto in seguito a eccessivo sviluppo del microorganismo; questa migrazione certamente passiva dalla regione esofagea all'intestino medio avviene per tutta la vita dell'adulto, e una grande quantità di batteri si trovano riuniti così in ammassi ovoidali o poligonali prendendo l'aspetto di un bolo alimentare. Io non posso affermare con sicurezza se questi agglomerati batterici sieno espulsi all'esterno; essi si trovano sempre nell'intestino medio per tutta la vita dell'adulto. Non ho mai notata una batteriolisi; anzi nella regione intestinale confinante coi tubi ovarici i batteri si presentano in attiva moltiplicazione, non ne ho mai notati negli ovarî.

Nelle mosche morte in seguito a una moltiplicazione anormale dell'ascobatterio nell'interno del loro tubo digerente (pag. 241) questi agglomerati batterici mancano completamente. La diversità sessuale sembra non apportare alcuna differente disposizione dei batteri nell'intestino dell'adulto; forse una differenza esiste nello stato fisiologico in cui trovansi questi ultimi nel maschio e nella femmina.

Il cieco impari, dorsale dell'esofago, misura dai 240 ai 250 μ nel suo maggiore diametro, è posto innanzi al ganglio sopraesofageo e presenta una parte superiore sferoidale biloba con un epitelio ghiandolare inegualmente sviluppato, e un'altra inferiore conica allungata in dotto escretore sboccante nell'esofago quasi al principio della faringe.

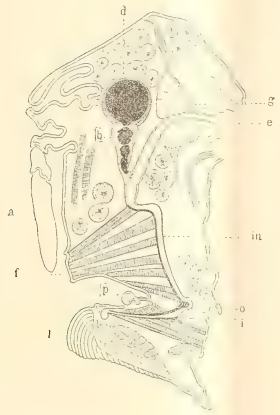


Fig. 3. — Schema di una sezione sagittale mediana della testa dell'adulto; *a*, antenna; *b*, agglomerati di batteri nel dotto escretore di *d*, diverticolo impari dorsale dell'esofago pieno di batteri; *e*, esofago; *f*, *fulcrum*; *g*, ganglio sopraesofageo; *i*, ipofaringe; *in*, intestino boccale; *l*, labello (in parte); *o* labbro superiore; *p*, palpo (in parte).

La contrattilità di questa grossa vescicola permette un'eiaculazione dei batteri che la riempiono o all'esterno, o nell'intestino medio, e questo fatto ben dimostrato dalle sezioni microtomiche spiega la comparsa delle colonie del batterio larvale dopo la nascita degli adulti nelle colture della mosca in ambiente sterile. L'emissione del batterio per l'apertura boccale, è forse in rapporto con la trasmissione del microrganismo stesso dall'adulto alla larva avvenendo sempre, durante la deposizione dell'uovo, un contatto replicato della proboscide con l'ovopositore. Tutti questi fatti i quali ora ho accennato e che senza dubbio sono di notevole interesse per la conoscenza della biologia della mosca olearia, saranno largamente descritti quando con altre ricerche saranno tolte molte lacune che lo scarso materiale della stagione passata non mi ha permesso ancora di colmare.

I fatti principali messi in evidenza dalle presenti ricerche si possono riassumere nelle conclusioni seguenti:

1° I batteri non vengono espulsi completamente dall'intestino della larva prima della ninfosi.

2° I batteri tornano a svilupparsi e a rendersi visibili in un diverticolo esofageo degli ultimi stadi ninfali.

3° Nell'adulto appena nato i batteri si sviluppano attivamente nella ghiandola esofagea e da questa migrano anche nell'intestino medio anche in insetti mantenuti in completo digiuno.

4° I batteri nella ninfa, nell'adulto e in minor grado nella larva, si trovano in uno stato speciale tale da non permettere ordinariamente la loro coltura diretta sui mezzi artificiali.

5° Il passaggio da questo stato speciale, probabilmente dovuto alla esistenza simbiotica, a quello puramente saprofitario sembra avvenire nell'intestino stesso, quando in condizioni non ancora ben determinate il nutrimento delle mosche sia favorevole allo sviluppo del batterio. Nelle larve morte questo passaggio avviene costantemente.

6° Le larve che si sviluppano da uova deposte in ulive sterilizzate esternamente da mosche nate e vissute in ambiente sterile, posseggono i batteri nel loro tubo digerente.

Batteriologia casearia. — *Ricerche bacteriologiche sul formaggio Gorgonzola.* Nota del prof. Costantino Gorini, presentata dal Socio G. Briosi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Commemorazione del Socio senatore G. Scarabelli Gommi Flamini, letta dal Socio F. Bassani nella seduta del 4 febbraio 1906.

Invitato dal signor Presidente a commemorare il compianto socio nazionale senatore Giuseppe Scarabelli Gommi Flamini, morto il 28 Ottobre 1905, adempio con trepidanza al mesto ufficio, poichè sento purtroppo ch'io non riuscirò a rendergli un omaggio corrispondente ai suoi meriti. Il buon volere mi valga e mi sorregga l'indulgenza dell'Accademia, che anche in questi ultimi mesi, chiamandomi fra i suoi membri effettivi, mi ha dato una grande prova di benevolenza, per la quale rinnovo oggi l'espressione della mia gratitudine.

Giuseppe Scarabelli Gommi Flamini nacque ad Imola il 16 Settembre del 1820 da Giovanni, medico, e da Elena Gommi [1]. La sua vita è un bell'esempio di operosità intellettuale, uno di quegli esempî che, per il decoro e il vantaggio della società, dovrebbero essere largamente imitati. Appartenente a una famiglia cospicua per natali e per censo, preferì agli ozî dell'esistenza lo studio e il lavoro, e dedicò tutto sè stesso al bene della scienza e della patria. Istruito fino ai vent'anni in famiglia, dove attinse sodi principî di morale pratica, che trovarono in lui un terreno particolarmente adatto, egli mostrò dalla prima giovinezza una spiccata tendenza per la geologia, al cui svolgimento contribuirono in modo notevole le bellezze naturali dei dintorni della sua città nativa e sopratutto, com'egli stesso racconta, quell'amena collinetta del Castellaccio, posta a breve distanza da Imola, che lo attraeva con le sue conchiglie sparse tra le sabbie e che più tardi doveva essere illustrata così sapientemente da lui. Verso il 1841, desideroso di coltivarsi nelle scienze naturali, si recò a Bologna, indi a Firenze e poco dopo a Pisa, dove col Savi, col Piria e col Matteucci, insegnava allora mineralogia e geologia Leopoldo Pilla. Certo i precetti di questo naturalista, il cui nome glorioso è stato recentemente ricordato in quest'aula dall'efficace parola del socio prof. Taramelli, che ne ha messo in rilievo il fervido ingegno e l'opera feconda di scienziato e d'insegnante, esercitarono un'influenza benefica sullo Scarabelli, educandone la mente alle ricerche geologiche e sviluppandone lo spirito di osservazione. E al maestro, senza dubbio, volle porgere un tributo di riconoscenza il nostro compianto collega quando, il 12 Giugno del 1844, gli esponeva in una lettera, inserita nei Nuovi Annali delle Scienze naturali di Bologna, il risultato delle sue prime indagini scientifiche. È un tenue lavoretto giovanile, costituito di due sole pagine, che dà alcuni cenni geologici sui dintorni del lago di Lugano, ma già si scorge, tra le incertezze del principiante, oltre il suo fervore per la geologia, l'attitudine a osservare e descrivere i fenomeni naturali. Di essa fornì poco dopo un altro saggio con la relazione di una gita al Vesuvio, fatta il 24 Gennaio del 1845, al ritorno da un viaggio scientifico in Sicilia, e diede in progresso di tempo le prove migliori, pubblicando numerose opere di geologia pura e applicata, di geodinamica, di geografia fisica e di paletnologia.

[1] Il 21 Aprile 1722 Giacomo Gommi sposò Alessandra Codronchi e ne ebbe due figli: Giovanni (capostipite del ramo che per Nicola ed Ermogene sopravvive nel conte Riccardo Gommi) e Nicola. Dal matrimonio di quest'ultimo, avvenuto il 24 Ottobre 1746, con Geltrude Merighi (che, figlia unica di Francesco Merighi di Mordano e di Elena Flamini, ultima della gente Flaminia, aveva unito, per testamento materno, alle sostanze e al nome dei Merighi le sostanze e il nome dei Flamini) nacque il 14 Aprile 1751 Francesco Gommi Flamini, che fu padre a Giacomo e ad Elena, madre del nostro socio, al quale lo zio Giacomo, morto senza figli, lasciò nel 1860 beni e nomi. In Giuseppe Scarabelli, dunque, si sono spenti un ramo dei Gommi e la progenie dei Flamini.

Campo principale delle sue ricerche fu la Romagna e sopratutto il circondario della sua città nativa, alla quale portò grande affezione e rivolse per più di mezzo secolo cure intelligenti ed assidue.

Il lavoro sui depositi miocenici del versante Nord-Est dell'Appennino fra Bologna e Senigallia, ch'egli comunicò nel '51 alla Società geologica di Francia, pur tenuto conto degli appunti che gli mosse il Rivière, contiene osservazioni interessanti sui loro rapporti reciproci e ingegnose riflessioni intorno alla formazione dei varî minerali nei gessi e al metamorfismo di questi.

Anche i suoi studî geologici, con la carta relativa, sulla Repubblica di S. Marino, fino allora pochissimo nota, ch'egli aveva percorsa rapidamente nel '44 e che visitò un'altra volta quattr'anni dopo allo scopo di farne un esame particolareggiato, sparsero luce sulla vera posizione dei gessi e delle argille da cui questi sono accompagnati e rafforzarono l'opinione di lui sulla esistenza di un antico lago nella valle del Senio, di cui, rilevando e confermando una tradizione popolare, aveva precedentemente trattato con buona copia di fatti, esponendone le cause di origine, l'estensione e le vicende. I caratteri litologici dei varî sedimenti che compongono il Monte Titano e delle sostanze minerali che vi stanno racchiuse vi sono esposti con accuratezza e perizia, al pari delle aggiunte introdotte alla bella e minuta descrizione delle argille scagliose data dal Bianconi. Così possono dirsi esatte le determinazioni dei fossili (sebbene, in generale, quegli avanzi si presentino, com'è noto, in uno stato di conservazione assai difettoso, che lascia spesso dei dubbî) e la sua opinione, lievemente modificata più tardi, sull'età, tuttora controversa, dell'arenaria calcarea, ch'egli riferisce al Miocene medio.

Un'altra Memoria, messa fuori due anni più tardi, comprende la descrizione della carta geologica della provincia di Bologna, alla quale, spinto dal consiglio di qualche collega, si accinse con esitazione per le difficoltà che presentava lo studio di una regione già investigata da molti. Naturalmente, la monografia ha parecchie lacune e può dar luogo a varie obiezioni; tuttavia segna un progresso nelle conoscenze di allora, perchè fornisce nuove prove a conferma di alcune risultanze cronologiche ottenute da precedenti osservatori e specialmente dal Murchison, che in un rapido esame aveva profondamente compreso la natura e l'andamento generale dei depositi miocenici di quella regione; e ne modifica altre, discutendo, per esempio, intorno ai limiti fra l'Eocene e il Miocene, inclinando ad ascrivere a quest'ultimo sistema una larga zona di terreno riferito dianzi all'Eocene, dissentendo parzialmente dal predetto geologo inglese sull'età pliocenica delle marne biancastre, delle argille e delle sabbie ferruginose, dando notizie sui giacimenti fossiliferi e su quelli contenenti avanzi dell'uomo e della sua industria, parlando sui minerali utili e riassumendo le conclusioni di ogni ordine a mano a mano ottenute, le quali talvolta sono forse sproporzionate ai fatti osservati, ma dimostrano in ogni modo la diligenza e l'impegno delle ricerche eseguite.

Così la descrizione della carta geologica della provincia di Ravenna, che gli parve opportuno di pubblicare quasi a complemento della precedente, sebbene molto sommaria, comprende interessanti considerazioni sulle ragioni dell'andamento dei corsi d'acqua che solcano quella contrada e accurate osservazioni sui terreni che la costituiscono, in rapporto con quelli del Bolognese, sulle abbondanti ossa di mammiferi scoperte nei sedimenti quaternarî, sui resti umani trovati nei depositi moderni, molto estesi, sulle cause dei fenomeni offerti dai vulcanetti di fango, sulla natura delle acque minerali e sui materiali di cui può giovarsi l'industria.

Altre carte geologiche da lui rilevate riguardano le provincie di Ancona e di Forlì e il Monte Castellaccio presso Imola.

Per le sapienti ricerche di Vito Procaccini Ricci, benemerito cultore di studî geologici, nei primi anni del secolo scorso erano state raccolte nel territorio senigalliese molte ricchezze paleontologiche, delle quali lo stesso Procaccini aveva dato fin dal 1828 qualche notizia preliminare e s'era poi fatto nuovamente parola nel primo Congresso degli Scienziati italiani tenuto a Pisa nel 1849. Lo Scarabelli acquistò la ricca collezione dagli eredi dello scopritore, e Abramo Massalongo ne illustrò gli avanzi vegetali in quella splendida « Flora fossile del Senigalliese », comparsa nel '59 e corredata di 45 bellissime tavole, che può considerarsi come una delle migliori monografie del celebre naturalista veronese. Il nostro socio svolse la parte geologica dell'opera, alla quale unì la menzionata carta geologica del Senigalliese e dell'Anconitano. descrivendo la natura e l'estensione del deposito e i suoi rapporti stratigrafici con i terreni che gli sono associati, paragonandolo con altri che per il complesso dei caratteri erano da ritenersi contemporanei ad essi e dando l'elenco, accompagnato da brevi cenni, dei fossili animali, che, in verità, meriterebbero uno studio completo. Alcuni di questi, già prima citati da altri e conservati male, sono, secondo ogni verisimiglianza, determinati inesattamente; così com'è inesatta la supposta corrispondenza di una parte delle filliti con quelle di Novale, nel Vicentino, certamente più antiche. Invece vi è giustamente confermata l'opinione espressa dal Pilla nel suo trattato di geologia sulla contemporaneità del giacimento senigalliese con l'analogo della Sicilia, e vi è dichiarato altrettanto giustamente che i fossili marchigiani in discorso offrono i maggiori rapporti con la fauna e la flora pliocenìche.

Di molto interesse è il volume, venuto alla luce nel 1880, sulla geologia della provincia di Forlì, frutto di lunghe e minuziose ricerche, che lo Scarabelli aveva iniziate trent'anni prima, quando le condizioni politiche del paese le rendevano assai malagevoli. Nel 1863 il Consiglio provinciale di Forlì, con lodevolissima deliberazione, decideva la formazione della carta geologica della propria provincia, ordinando che fosse rilevata nella scala di 1:50000, eguale a quella adottata dal Governo per la gran Carta geolo-

gica dell'Italia decretata nel 1861, e disponendo che formasse parte della intera monografia economica amministrativa della provincia stessa. L'incarico di rilevare la detta carta venne affidato a lui e al socio prof. Capellini, che avrebbe portato nell'impresa laboriosa il prezioso contributo della sua competenza. Ma questi, colpito pochi giorni dopo da grave lutto di famiglia, dovette rinunciare all'ufficio, che lo Scarabelli continuò da solo, attendendovi con ogni cura e riuscendo a dare una veramente buona Memoria, ricca di osservazioni e di risultati importanti. Studî più recenti hanno dimostrato invero che ampie zone calcaree e marnoso-arenacee da lui ascritte al Cretacico spettano invece all'Eocene, e che qualche altro riferimento cronologico va lievemente cambiato o non è sufficientemente avvalorato da prove paleontologiche. Inoltre la recisa opinione dell'autore (a quanto pare, da lui stesso modificata più tardi) sull'età esclusivamente cretacea delle argille scagliose non può essere accettata integralmente. Ciò non toglie peraltro il valore dell'opera, nella quale lo Scarabelli abbandona opportunamente qualche idea espressa in lavori precedenti, come quella sulla partecipazione delle rocce serpentinose a determinare il sollevamento dell'Appennino. È pure assai pregevole l'annessa carta geologica, accompagnata da molte sezioni naturali e teoretiche: rilevata prima al 50000, sopra la topografica eseguita appositamente dall'Ufficio tecnico provinciale di Forlì (ed esposta fuori concorso alla Mostra industriale di Bologna del 1869 e due anni dopo a quella di Forlì, dove venne premiata insieme con l'intera collezione di rocce, di minerali e di fossili), fu poi ridotta per ragioni economiche al 100.000, e più tardi, riprodotta in scale diverse, figurò nel '73 all'Esposizione di Vienna e nel '78 all'altra di Parigi.

Ai precedenti lavori di geologia storica ne vanno aggiunti altri minori, fra i quali giova ricordarne due per le interessanti osservazioni di stratigrafia e di geodinamica che vi sono contenute.

Uno di essi, pubblicato nel '64, riguarda un argomento già trattato dallo Scarabelli molti anni prima, vale a dire i gessi di una parte del versante Nord-Est dell'Appennino tra Bologna ed Ancona, la cui carta geologica era stata presentata e premiata alla prima Esposizione italiana di Firenze. Vi è parlato sulla posizione reciproca di alcuni membri di quei terreni terziarî, in paragone con gli omologhi del Bolognese, e specialmente sull'origine metamorfica dei gessi, in appoggio della quale egli aveva scritto in varie riprese fin dal 1847, discutendo una volta anche col Coquand a proposito dei gessi di Pomarance nel Volterrano, da lui messi a confronto con quelli della Perticara e invocati, contro l'opinione del geologo francese, a sostegno della predetta genesi.

L'altro, stampato nel '97, quand'egli aveva già settantasei anni, costituisce la parte geologica dello studio compiuto dal Foresti sui fossili del Pliocene inferiore raccolti nei colli fiancheggianti il Santerno presso Imola,

ch'erano stati parzialmente esaminati in addietro dal Meneghini, e stabilisce la stratigrafia della regione, presentando in un profilo l'andamento dei depositi miocenici e pliocenici fra Ancona e l'Idice, in relazione con l'Eocene e col Cretacico prima del loro sollevamento, e dando due sezioni dei colli dianzi accennati.

Lo Scarabelli volle anche tentare ardui problemi di geotettonica e di orogenesi (che, in verità, per essere risoluti o semplicemente dilucidati richiederebbero studî molto profondi), trattando brevemente sulle cause dinamiche delle dislocazioni degli strati negli Appennini e sulla probabilità che il sollevamento delle Alpi si sia effettuato sopra una linea curva.

Per ciò che si riferisce al primo soggetto, egli inclinava a credere che gl'invertimenti della Spezia e i sollevamenti delle elissoidi apuane e pisane fossero stati prodotti da un generale e graduato arretramento dell'Appennino ligure-bolognese verso il Mediterraneo, per effetto di una pressione laterale sofferta dell'Appennino stesso a Nord-Est, allorchè precisamente il grande asse sinclinale entro cui scorre ora il Po assumeva l'attuale sua direzione, industriandosi di chiarire e di avvalorare l'ipotesi col ricorso a sezioni naturali e col sussidio di esperimenti pratici.

Quanto al sollevamento delle Alpi, lo Scarabelli dall'esame analitico dell'orografia e della idrografia di queste montagne e della valle padana cerca di rimontare alla causa dell'una e dell'altra. Egli traccia le direzioni medie dei crinali delle Alpi e degli Appennini e delle vallate dei principali fiumi dell'Italia settentrionale, e trova che i varî tratti della valle del Po corrispondono alle basi di triangoli isosceli, i cui lati eguali sono costituiti dalle direzioni dei relativi prossimi tratti della catena alpina. Questa ed altre considerazioni ed astrazioni teoriche lo inducono a ritenere che le Alpi si sieno generate per effetto di un sollevamento curvilineo con consecutiva fratturazione in poliedri spostati ai lati di questo asse curvo di sollevamento, e che il tratto maggiore della valle padana, parallelo all'Appennino, rappresenti una grande sinclinale tra questo e le Alpi. Ardite concezioni invero, specialmente per quel tempo (1866), le quali dinotano la mente speculativa dell'autore, che si attentava di affrontare questioni tanto difficili.

Altri lavori del nostro socio dimostrano la praticità del suo ingegno e la tendenza a ricerche sperimentali. Egli costrusse infatti parecchi modelli di stratigrafia generale didattica e di stratigrafia speciale bolognese-imolese; istituì esperimenti per definire se le impronte così dette problematiche provengano dalla superficie superiore o inferiore degli strati e per dedurne conseguentemente l'origine diversa, ed eseguì saggi intorno alle figure dovute a viscosità e a quelle analoghe ai Nemertiliti, che, studiati su esemplari caratteristici, con sezioni variamente dirette, gli pareva doversi piuttosto considerare come deiezioni di un animale ancora sconosciuto. Ideò e fece comporre uno strumento, l' « orizo-clinometro », presentato all' Esposizione di Genova

del 1892, il quale ha lo scopo di determinare con rapidità ed esattezza la direzione e l'inclinazione di quei filoni e di quegli strati che lasciano allo scoperto, al tetto delle osservazioni, soltanto un breve tratto della loro superficie inferiore, come avviene spesso nelle gallerie di miniere e in quelle ferroviarie. Rilevò inoltre la notevole flessione subìta da una croce in arenaria, eretta nel 1750 in Imola e adesso non più esistente, spiegandone le cause, e compilò un abbozzo di guida geologica nella regione appenninica compresa fra il percorso ferroviario Pistoia-Bologna-Ancona-Fossato, tracciando sopra una grande carta geografica della regione accennata parecchie sezioni dalla cresta dell'Appennino al mare, e aggiungendo l'indicazione dei punti più interessanti da esaminare e delle collezioni paleontologiche degne di essere visitate.

Lo Scarabelli non si occupò soltanto di geologia pura, ma anche di geologia applicata, alla quale annetteva molta importanza. Già nel '44 egli sosteneva l'utilità degli studî geologici per gl'ingegneri, e in varî lavori successivi eccitava con insistenza la gioventù a coltivare con interesse questa scienza, la quale, ritenuta quasi di lusso da coloro che non la professano, contiene invece, al pari di altre, in grado eminente applicazioni utilissime. E nelle monografie geologiche delle varie provincie illustrate curava sempre di mettere in evidenza i prodotti naturali vantaggiosi e gli usi molteplici a cui possono servire, insistendo sulla convenienza che molti s'industriassero di trarne profitto e proponendo la istituzione di premî per coloro che ricercassero e rinvenissero nuovi giacimenti coltivabili o intraprendessero su larga scala l'estrazione di materiali già noti, e ne estendessero l'impiego a scopi non ancora tentati in quei luoghi, con la introduzione di metodi di preparazione più economici e più perfezionati.

Anche la questione relativa ai pozzi bianchi e neri della città d'Imola, in relazione con l'idrografia sotterranea e con l'igiene, gli offrì oggetto di utili ricerche, quando, nel '72, assessore di quel Comune, fu nominato membro e relatore della Commissione incaricata di riferire sull'importante problema, ch'egli studiò con molta diligenza e con l'esattezza richiesta dalla natura del lavoro, suggerendo i provvedimenti opportuni, fra i quali la costruzione delle fogne, l'abolizione dei pozzi neri assorbenti e una trivellazione verticale, che avrebbe fornito la città di buona acqua potabile.

A quest'ultimo argomento dei fori artesiani egli rivolse cure assidue e notevoli, dandogli il contributo della sua competenza di geologo pratico e della sua fede in un lieto successo. Considerando i benefici effetti che ne avrebbe potuto ritrarre la regione, provveduta generalmente di acqua potabile scarsa e insalubre, e allo scopo di far evitare indagini infruttuose e spese inutili, già nel 1850, in un lavoretto elementare e senza pretese, destinato, per così dire, ai profani, egli fece conoscere le sue idee sulla diversa probabilità di riuscita di questi fori nel territorio imolese. Esposta la legge sulla quale il

fatto si basa, le necessarie condizioni litologiche e di giacitura dei terreni acquiferi e i processi di ricerca, indica, con la scorta delle sue osservazioni geologiche e di esperimenti eseguiti da lui stesso e da altri, i punti del predetto territorio che meglio si prestano allo scopo e quelli dove i tentativi riuscirebbero vani, e conchiude augurandosi che si pratichino numerose trivellazioni, le quali, pur non fornendo acqua zampillante, darebbero tuttavia risultati soddisfacenti, perchè questa si sarebbe incontrata a piccola profondità, nè la spesa per estrarla col mezzo di pompe sarebbe stata notevole. Qualche anno dopo, sempre col fine d'incoraggiare l'intraprendenza del pubblico, diede i particolari di un artesiano praticato a Conselice, presso Lugo di Ravenna, dall'ingegnere Eugenio Canevazzi e ottimamente riuscito, la cui acqua zampillante, incontrata alla profondità di solo 50 metri, si elevava a circa due dal suolo, con una temperatura di 15° centigradi. Più tardi, trattando delle condizioni igieniche d'Imola, mostrò l'opportunità di scavarvi un pozzo artesiano; e più tardi ancora, quasi ottantenne, ritornando sull'argomento con una lettera a stampa, indirizzata al direttore di quella Cassa di Risparmio, di cui chiedeva l'appoggio, sostenne che le condizioni stratigrafiche favorivano il progetto di una trivellazione nella predetta città, posta in una leggera sinclinale di strati costituiti da sabbie gialle e da argille turchine, nella quale il Santerno depose le proprie alluvioni terrazzate, e fabbricata appunto sopra una di queste. Ed aggiunse che, contrariamente all'opinione da lui espressa in addietro, la zona acquifera scorrente fra le sabbie e le argille presenta un dislivello con la città di 80 metri, sufficiente, a suo giudizio, per ottenere dal pozzo acque zampillanti. Il progetto venne eseguito nell'ultimo trimestre del '98, a spese della citata Cassa di Risparmio, dalla Ditta Ing. A. Bonariva, e la perforazione arrivò alla profondità di 136 metri. L'acqua fu incontrata a 56, dove saliva fino a 6 metri e mezzo sotto suolo; a 126, giunse e si arrestò a un metro e ottanta centimetri, presentandosi limpida, incolora, inodora e chimicamente potabile.

Di paleontologia non si occupò che all'inizio de' suoi studî, dando nel 1846 il catalogo dei resti di mammiferi raccolti dal suo concittadino Giuseppe Cerchiari nelle sabbie gialle dell'Imolese, che allora ascriveva al Pliocene, ma qualche anno dopo riferì giustamente al Quaternario. Tuttavia intorno a questa giovane scienza egli aveva concetti molto sagaci. Era convinto dell'importanza dei fossili e riconosceva il grande valore del criterio paleontologico per la determinazione cronologica dei terreni; e nelle sue pubblicazioni di geologia pura, come in quelle di geologia applicata, citava costantemente gli avanzi organici rinvenuti da lui o da altri, curando sempre di dare precise notizie sulla loro provenienza e tenendone stretto conto. Solo rarissime volte azzardava qualche dubbio, parendogli di riscontrare in uno stesso giacimento specie comuni a più di un piano: il che fino a un certo punto era realmente vero, ma dipendeva sopratutto da determinazioni specifiche parzialmente ine-

satte o da rimestamento di fossili. Non andava peraltro all'esagerazione: per esempio, non ammetteva che si potessero stabilire basi di ordinamenti stratigrafici con la sola scorta delle osservazioni paleontologiche, nè approvava le soverchie distinzioni di forme, quasi fondate sopra un'idea preconcetta, della presenza, cioè, esclusiva ed assoluta di certe forme in ogni assisa, dando luogo ad un eccessivo frazionamento di piani geologici, ingiustificato e dannoso. Così deplorava il metodo di coloro che vorrebbero rintracciare minutamente la corrispondenza di depositi situati a grande distanza gli uni dagli altri, in modo da stabilire il sincronismo non solo fra membro e membro, ma, potrebbe dirsi, fra strato e strato, come se la vita animale e vegetale di cui celano gli avanzi non fosse dovuta andar soggetta in addietro, al pari di oggi, al complesso di molte influenze locali.

Invece lo Scarabelli coltivò con zelo indefesso la paletnologia, in cui raggiunse un posto molto notevole mediante la pubblicazione d'importanti lavori, concernenti la Romagna e le Marche.

Già nel 1850 egli aveva richiamato, uno fra i primi in Italia, l'attenzione degli studiosi sulle armi di pietra, illustrando in una Nota corredata di belle figure quelle scoperte nei dintorni di Goccianello, a pochi chilometri da Imola. Di esse e di altre trovate successivamente nell'Imolese riparlò più tardi, indicando tutti i luoghi e le condizioni speciali del suolo in cui si rinvennero e dando per maggiore chiarezza una cartina geologica. Pubblicò anche due tavole disegnate da lui stesso e destinate a dimostrare la scheggiatura delle pietre levigate quaternarie della predetta regione: la prima riproduce le forme delle pietre mounstieriane, ordinate secondo il numero progressivo delle loro scheggiature; la seconda dà le figure che dimostrano il passaggio dalle forme mounstieriane a quelle acheuliane mediante scheggiature fatte in contorno alle superficie concoidi delle pietre.

Ma la sua principale produzione in questo ramo di scienza si svolse a cominciare dal 1870 con gli scavi nella caverna detta del Re Tiberio, nella valle del Senio, già prima esplorata a scopo scientifico dal Tassinari e dallo Zauli. Tali scavi, eseguiti con la massima cura, gli diedero agio di raccogliere nei varî piani del terriccio numerose ossa e avanzi copiosi dell'industria umana, i quali gli permisero di stabilire il progressivo avanzamento di civiltà degli uomini che vi si erano ricoverati e sparsero nuova luce sulle lunghe vicende da loro successivamente subìte.

Anche la rinomata grotta di Frasassi presso Fabriano, che era già stata studiata da parecchi scienziati, gli fornì argomento di nuove indagini, contenute in una monografia inserita nelle Memorie di questa Accademia e assai pregevole non solo per i risultati paletnologici, ma eziandio, e sopratutto, per le osservazioni geologiche, poichè studia particolarmente i terreni di quella contrada e i loro fossili, dando pure l'elenco delle specie di cefalopodi e di brachiopodi raccolte da lui nel Lias superiore e nel Titoniano

dell'Appennino centrale. Egli scruta le cause probabili che produssero e ampliarono la caverna; ne descrive separatamente gli avanzi rinvenuti nello strato inferiore dell'ammasso terroso, comprese le ossa di mammiferi, determinate insieme con lo Strobel, e gli altri scoperti nello strato superiore, cercando d'interpretarne gli usi, istituendo numerosi ed efficaci confronti e giungendo a conclusioni di molto interesse, riconosciute anche dalla Società geologica italiana, quando, nell'83, essa visitò la grotta sotto la presidenza del senatore Capellini e con la guida dello Scarabelli, che per l'occasione aveva pubblicato un bel profilo geologico da Colcetto a Serra S. Quirico.

Nel '72 iniziò le ricerche nella piccola collinetta del Castellaccio, costituita di sabbie, di ghiaie e di argille sabbiose plistoceniche (e della quale, come s'è detto dianzi, pubblicò più tardi anche la carta geologica), che si eleva a meno di 40 metri sulla riva destra del Santerno, a poco più di un chilometro da Imola. L'ameno piano che ne forma la vetta e la distesa incantevole di paese che si gode di lassù fecero sorgere nella mente dello Scarabelli l'idea che tali condizioni di luogo avessero dovuto invitare qualche antichissima famiglia umana a piantarvi la propria dimora. Nè le sue supposizioni, confortate pure da cronache patrie, furono fallaci, giacchè le coscienziose e prolungate ricerche, che fin dal principio avevano destato l'interesse e provocato il parere del socio prof. Pigorini, dello Strobel, del Chierici e di altri specialisti, lo posero in grado d'illustrare nel 1887 la stazione preistorica sul Monte del Castellaccio, riferibile a un'età compresa tra la fine dell'epoca della pietra e l'inizio di quella del bronzo, in una monografia molto pregevole, la cui pubblicazione fu largamente sussidiata dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio e riscosse il plauso generale. L'opera è fornita di ottime tavole, comprendenti le figure di numerosi e interessantissimi oggetti scoperti e i rilievi di piante e sezioni, per i quali l'autore ebbe successivamente a collaboratori gl'ingegneri Domenico Casati e Giuseppe Marani.

Da ultimo, lo Scarabelli fece tra il 1892 e il 1898 il rilevamento di un'altra stazione preistorica dell'Imolese, da lui scoperta a S. Giuliano, casa colonica della parrocchia di Toscanella, nel comune di Dozza: è da sperare che il lavoro, ultimato nel 1900 e ancora inedito, del quale il socio prof. Brizio diede poco tempo fa comunicazione alla R. Deputazione di Storia patria per le provincie di Romagna, vegga presto la luce [1].

[1] La stazione preistorica di Toscanella, simile per l'impianto a quella del Castellaccio, ma assai più recente di questa, sorgeva circa due chilometri a valle della via Emilia, sulla sponda sinistra del torrente Sellustra. Il senatore Scarabelli ne rilevò con esattezza la pianta e le sezioni di varie trincee e vi raccolse molta copia di oggetti in terra cotta, osso e bronzo, ora in gran parte esposti nel Museo di Bologna, per conto del quale vennero eseguiti tutti gli scavi. Di essa egli ebbe la fortuna di scoprire anche il sepolcreto, che però consisteva esclusivamente di scheletri distesi con il cranio a Nord-Ovest e i piedi

A ragione dunque può dirsi ch' egli portò un contributo molto efficace allo studio della paletnologia, intorno alla quale aveva idee pratiche e logiche, che esprimeva tra il '70 e il '90. Così, per esempio, riteneva che questa scienza « non sempre fosse stata abbastanza coltivata geologicamente, tanto rispetto alla condotta dei lavori di ricerca, quanto nella loro descrizione »; onde ne erano derivate, a giudizio di lui, incertezze e oscurità e asserzioni inesatte e dannose. Così gli pareva che la nostra paletnologia, sorta da poco tempo e da ricerche ristrette e incomplete, « troppo si affrettasse a voler sempre vedere tribù diverse quasi in tutti i luoghi dove un oggetto più, un oggetto meno, di una forma piuttosto che di un' altra, era stato scoperto »; per modo che ne risultavano distinzioni e frazionamenti eccessivi, forse tutt'altro che utili. Così, pur non dichiarandosi incredulo verso le grandi scoperte scientifiche, disapprovava la facilità con la quale talvolta si vuole decidere sulla maggiore o minore antichità di certe armi e utensili, pretendendo di definirla unicamente dal grado diverso di perfezione di lavoro con cui sono formati; mentre tuttodì si hanno sott'occhio le prove più chiare di utensili od ornamenti che, secondo i luoghi e le persone che ne usano, si trovano, contemporaneamente ed anche a breve distanza, foggiati rudemente o con molta eleganza e costituiti di materia grossolana o preziosa. Così dubitava che la levigatura di certe armi di pietra (valgano le asce e i mazzuoli) fosse criterio sufficiente per giudicarle tutte posteriori, senza alcuna eccezione, ad altre, come le frecce in selce, rozzamente scheggiate; poichè la differente preparazione poteva dipendere non tanto dall'epoca, quanto dalla opportunità o dalla necessità di servirsi di rocce diverse secondo l' uso a cui erano destinate le singole specie di armi o in base alle condizioni litologiche locali, e di lavorarle variamente in rapporto con la natura del materiale adoperato e con l' impiego delle armi stesse. — Può darsi che tutte queste riflessioni dello Scarabelli si ritengano ovvie, ma ciò non toglie che siano anche giuste.

Da quanto s'è detto fin qui risulta che l'opera scientifica del compianto nostro socio durò quasi sessant'anni e si svolse con profitto intorno a varî rami delle discipline naturali, quantunque egli, nella sua modestia, si chiamasse talvolta « amatore geologo, semplice osservatore di fatti e poco più di un paziente raccoglitore di oggetti ». Fornito di una bella intelligenza e di una mente equilibrata e serena, egli era anche provveduto di una forte volontà, che, associata alla robustezza dell'organismo, gli dava una particolare resistenza al lavoro e gli permetteva di lottare quasi sempre vittoriosamente contro gli ostacoli.

Naturalista vero, amava l' intima essenza delle cose, anzichè la loro superficiale apparenza, e si atteneva strettamente all'esposizione dei fatti,

---

a Sud-Est. I crani di questi scheletri, esaminati dal prof. Sergi, furono attribuiti a individui della razza da lui detta Mediterranea (E. Brizio, in Atti e Memorie della R. Deputazione di Storia patria per le provincie di Romagna, serie III, vol. XVIII, pagg. 337-338, Bologna, 1900).

quali si mostravano nella loro integrità, rilevando con diligenza lodevole, ma senza uggiosa pedanteria, anche quelli che a primo aspetto potevano sembrare inconcludenti e sapendone trarre interessanti deduzioni. Pieno di buon senso e di logica, non dava soverchio valore a certi fenomeni osservati in un luogo e non ne generalizzava la spiegazione a quelli del medesimo ordine riscontrati altrove senza essersi prima assicurato ch'essi vi si riproducevano con un aspetto simile. Interprete perspicace dei fenomeni naturali, era cauto e prudente nei giudizî, ripetendo più volte le osservazioni e cercando il perchè di ogni fatto; nè rifuggiva dal dichiarare la sua ignoranza piuttosto di esporre un concetto non sufficientemente fondato. Pertinace nelle sue idee scientifiche, quando gli sembravano giuste e di utile applicazione, le sosteneva con fervore, cercando di renderle sempre più convincenti con l'aggiunta di nuovi fatti; pronto d'altra parte a modificarle se le riconosceva inesatte. Nella trattazione delle varie questioni esponeva lealmente gli argomenti contrarî al suo modo di vedere e li esaminava con calma efficace. Persuaso che dal dissenso fra le diverse opinioni scaturisce la luce, che è guida alla verità, non era alieno dalla discussione, che serbava sempre nel campo obiettivo, accogliendo con attenzione deferente gli appunti che gli venivano mossi e oppugnandoli con garbo, da gentiluomo. Lodava volentieri il buono e criticava con forma cortese ciò che non gli pareva tale, dicendone serenamente le ragioni. Nei suoi lavori citava sempre chi l'aveva aiutato, dando a ciascuno il suo. Di essi, alcuni, eseguiti cinquant'anni fa e con mezzi assai scarsi, sono molto sommarî e, naturalmente, non armonizzano in ogni punto con i moderni progressi della scienza; ma tutti, in generale, sono condotti con buon metodo di ricerca e specialmente con un ordine esemplare e contengono osservazioni originali e giudiziose riflessioni. Sono anche scritti bene, con una leggera sfumatura di sentimento artistico che piace; nei più vecchi, forse, lo stile è un po' antiquato e prolisso e qualche volta lievemente retorico, benchè sempre dignitoso, ma poi s'è venuto a mano a mano modificando nei successivi. Non sono studî affrettati, ma stesi con calma, con ponderazione, senza la febbre deplorevole di chi vuol produrre a ogni costo.

Molte altre benemerenze dello Scarabelli, che gli procurarono altissimi onori, meritamente conferiti alla sua intelligente attività e al suo patriottismo, ne resero il nome vie più caro e apprezzato. Italiano fervente, offrì il braccio all'impresa generosa del riscatto nazionale e nel '48 si arruolò volontario, combattendo contro gli Austriaci come maggiore addetto allo Stato maggiore del colonnello Ferrari; in seguito fece parte delle cospirazioni della Giovane Italia, nè mai si lasciò intimidire dalle terribili circostanze in cui ebbe a svolgersi la sua opera di patriotta. Nel '59 fu membro della Giunta provvisoria di Governo, consigliere di Stato presso il Commissariato delle Romagne, vice-presidente della Deputazione provinciale di Bologna e presidente della Commissione che presentò a Vittorio Emanuele II il voto di annessione delle sue provincie al Regno d'Italia. Primo sindaco d'Imola, dal '60 al 66, v'iniziò

un notevole rinnovamento edilizio e scolastico, conseguendo nel 61 la medaglia d'argento per i lavori di statistica comunale. Nella stessa città ebbe altri uffici onorifici: fu presidente a vita dell'Asilo infantile, fatto sorgere da lui prima del 50 e largamente beneficato nel suo testamento; della Cassa di Risparmio, pure istituita dallo Scarabelli nel 1855, del Consorzio dei Mulini e del Museo civico di Storia naturale, ch'egli fondò nel 57 con Giuseppe Liverani, Odoardo Pirazzoli, Giacomo Tassinari e Vincenzo Toschi, donando al Comune le loro private collezioni, e che si accrebbe a mano a mano sopratutto col materiale scientifico raccolto o acquistato da lui, raggiungendo ben presto un notevole interesse locale. Per moltissimi anni fu capo del Consorzio agrario circondariale imolese e, come tale, attivissimo precursore del risveglio agricolo di quella regione. Nel 64, mentr'era sindaco, venne eletto senatore. Fu tra i soci fondatori della Società geologica italiana, che lo chiamò subito fra i suoi consiglieri e nell'88 lo acclamò presidente. Fece parte per lungo tempo del Reale Comitato geologico d'Italia. Il 2 Agosto 1898 fu nominato socio nazionale di questa Accademia, alla quale apparteneva in qualità di corrispondente dal 1° Agosto 1887.

Nel disimpegno di questi molteplici uffici e di altri che gli vennero più volte affidati dal Governo intorno a questioni agrarie e geologiche, egli impiegò tutta la sua attività, portandovi il prezioso contributo della mente e del cuore.

Sì, anche del cuore. Poichè Giuseppe Scarabelli non soltanto possedeva ingegno e dottrina, ma aveva pure una bell'anima. Di carattere integro e vigoroso, si prefisse di non piegare mai verso qualsivoglia men che onesta tendenza. In apparenza austero, nutrì sentimenti delicati. Franco e leale con tutti, dignitosamente gentile, buono e caritatevole, fu riverito ed amato. Ebbe affezione immensa per la moglie, contessa Giovanna Alessandretti, vedova del conte Pietro Faella, che sposò verso il '60, e, non avendone avuto figliuoli, adottò generosamente come suoi i due figli che le erano nati dal primo matrimonio. Nel 94 gli morì la consorte, lasciandogli un gran vuoto nel cuore. D'altra parte, la lunga durata della sua esistenza gli aveva prodotto un graduale isolamento, e già da varî anni ripeteva tristamente al nipote carissimo prof. Giovanni Toldo [1], geologo (il quale segue con molto onore la via luminosa tracciata dall'estinto), che quasi più nessuno viveva dei compagni della sua gioventù. Ma, sorretto dalla tempra fortissima, non soffrì mai avvilimento morale e, confortato dallo studio e dalle tenere cure della famiglia adottiva, visse serenamente fino all'ultimo dì.

[1] A questo egregio collega, il quale, accogliendo la mia preghiera, mi fornì con grandissima cortesia molte notizie sulla vita del senatore Scarabelli, desidero esprimere pubblicamente i sentimenti della mia riconoscenza. E tanto più gli sono grato, poichè anch'egli, per incarico della Presidenza della Società geologica italiana, ebbe a scrivere la commemorazione del compianto geologo, che già da alcuni giorni ha trasmessa alla Segreteria della predetta Società.

In Giuseppe Scarabelli Gommi Flamini si è spento il Nestore dei geologi italiani, alla cui memoria benedetta s'inchinano riverenti la Scienza e la Patria.

LAVORI

DEL SENATORE

GIUSEPPE SCARABELLI GOMMI FLAMINI

a) — Pubblicazioni.

Osservazioni geologiche nelle vicinanze del Lago di Lugano in Lombardia. Brano di lettera al Prof. Leopoldo Pilla. — Cimento, anno II, pp. 242-244, in-8°. Pisa, Tip. della Minerva, 1844.

Cenno sopra un viaggio in Sicilia compiuto nei mesi di Dicembre e Gennaio 1845 e relazione di una gita al Vesuvio fatta nel dì 24 Gennaio dello stesso anno. Lettera al Prof. Silvestro Gherardi. — Nuovi Annali delle Scienze naturali, serie II, tomo III, pp. 227-231, in-8°. Bologna, Tip. Sassi nelle Spaderie, 1845.

Una parola sulle ossa fossili dell'Imolese. — Nuovi Annali delle Scienze naturali, ser. II, tom. VI, pp. 81-84. Bologna, 1846.

Catalogue des mammifères fossiles du terrain pliocène d'Imola, en Romagne. — Bull. de la Société géol. de France, 2e série, tom. III, p. 442. Paris, 1846 [in A. Toschi, Ossements fossiles découverts à Imola. Loc. cit., p. 440-442].

Sui depositi delle ossa fossili esistenti nell'Imolese. Lettera al ch. sig. Antonio Toschi. — Nuovi Annali delle Scienze naturali, serie II, tom. X, pp. 297-302, con una sez. geologica. Bologna, 1848.

Sulla diversa probabilità di riescita dei pozzi artesiani nel territorio imolese. Osservazioni. — Opuscolo di pp. 22, in-8°, con una tavola di sezioni geologiche. Imola, presso Vincenzo Dal Pozzo, 1850.

Intorno alle armi antiche di pietra dura che sono state raccolte nell'Imolese. — Nuovi Annali delle Scienze naturali, serie III, tomo II, pp. 258-266, in-8°, con una tavola (V). Bologna, Tip. Sassi, 1850.

Note sur l'existence d'un ancien lac dans la vallée du Senio en Romagne. — Bulletin de la Société géol. de France, IIe série, tom. VIII, pp. 195-202, con una tavola (IV). Paris, 1851 [Letta nella riunione straordinaria della detta Società tenuta ad Épinal nel 1847].

Sur la formation miocène (terrain tertiaire moyen) du versant N.-E. de l'Apennin, de Bologne à Sinigaglia. — Bull. de la Société géol. de France, IIe série, tom. VIII, pp. 239-251, con una tavola (IV). Paris, 1851.

Studi geologici sul territorio della Repubblica di S. Marino fatti nel 1848. — Opuscolo di pp. 26, in-8°, con carta e sezioni geologiche. Imola, Dal Pozzo, 1851.

Sopra i depositi quaternari dell'Imolese. Rettifica di alcune opinioni intorno alla giacitura delle ossa fossili. Lettera al ch. sig. Dott. Antonio Toschi. — Annali di scienze matematiche e fisiche, tomo III, pp. 33-41, in-8°, con una tavola di sezioni geologiche. Roma, Tip. delle Belle Arti, 1852.

Carta geologica della Provincia di Bologna e descrizione della medesima. — Opuscolo di pp. 27, in-8°, con la detta

Carta. Imola, Ignazio Galeati e figlio, 1853.

Sopra di un conglomerato calcare gessificato. Lettera al ch. sig. Antonio Toschi. — Nuovi Annali delle Scienze naturali, serie III, tom. IX, pp. 71-76, in-8°. Bologna, Tip. Sassi nelle Spaderie, 1854 [Vedi la Nota seguente].

Note sur le métamorphisme de certains gypses (indicata anche col titolo: Sur le gypse de Pomarance en Toscane). — Bull. de la Société géol. de France, IIe série, tom. XI, pp. 346-347. Paris, 1854 [Vedi la Nota precedente].

Descrizione della Carta geologica della Provincia di Ravenna. Opuscolo di pp. 27, in-8°, con la detta Carta. — Nuovi Annali delle Scienze naturali, serie III, tomo X, pp. 211-228 e 337-346, con tav. II. Bologna, Tip. dell'Ancora, 1854.

Sur un sondage artésien exécuté à Conselice, près Ferrare (pres. il 15 Settembre 1856). — Bull. de la Soc. géol. de France, IIe série, tom. XIV, pp. 102-105. Paris. 1857. (Vedi anche l'Incoraggiamento, giornale di Agric., Ind. e Comm., anno 8°, nuova serie, n.° 35, p. 138. Ferrara, 1856) [I fossili trovati nella trivellazione sono determinati da G. Tassinari].

Sur une Nassa des marnes subapennines voisine de *N. prismatica* Brocchi sp. (*N. Deshayesi* n. sp.). Extrait d'une lettre à M. Deshayes. — Bull. de la Société géolog. de France, IIe série, tom. XIV, p. 105. Paris, 1857.

Carta geologica del Senigalliese e dell'Anconitano, rilevata nel 1857. Bologna, Lit. Pancaldi [Vedi Studi sulla flora fossile e geologia stratigrafica del Senigalliese].

Studii sulla flora fossile e geologia stratigrafica del Senigalliese. — Un vol. di pp. VII-506, in-4° [Parte I: Scarabelli, Geologia stratigrafica, di pp. 37, con la Carta geologica del Senigalliese e dell'Anconitano. - Parte II: A. Massalongo, Flora fossile, con 45 tavole]. Imola, Tip. d'Ignazio Galeati e figlio, 1859.

Sui gessi di una parte del versante N.-E. dell'Appennino. Lettera al Professore Domenico Santagata. — Opuscolo di pp. 21, in-8°, con una tav. di sezioni. Imola, Tip. d'Ignazio Galeati e figlio, 1864.

Sulle cause dinamiche delle dislocazioni degli strati negli Apennini. Lettera al Prof. G: Capellini. — Atti della Società ital. di Scienze naturali, vol. VIII, pp. 362-364. Milano, Giuseppe Bernardoni, 1865.

Sulla probabilità che il sollevamento delle Alpi siasi effettuato sopra una linea curva. Lettera al ch. sig. Dott. Cesare D'Ancona. — Opuscolo di pp. 29, in-8°. con una tavola rappresentante la valle del Po dopo il sollevamento delle deposizioni plioceniche. Firenze, Succ.^ri Le Monnier, 1866.

Guida del viaggiatore geologo nella regione Apennina compresa fra le ferrovie italiane Pistoia-Bologna, Bologna-Ancona e Ancona-Fossato. Scala per le distanze 1:400000; scala per le altezze, ideale. [Fatta nel 1866]. — Un foglio lungo 70 centimetri e largo 50. Milano, Stab. Giuseppe Civelli, Gennaio 1870.

Notizie sulla Caverna del Re Tiberio. Lettera al ch. sig. Prof. Antonio Stoppani. — Atti della Società italiana di Scienze naturali, vol. XV, pp. 40-57, con una figura interc. Milano, Tip. di Giuseppe Bernardoni, 1872.

La Croce dei Cappuccini in Imola. Lettera scientifica scritta dal Cav. Giuseppe Scarabelli Gommi Flamini alla signora Isabella Toldo il giorno delle sue nozze col signor Rinaldo Ricci Bitti. — Un opuscolo di pp. 11, in-8°, con figura. Imola, Tip. d'Ignazio Galeati e figlio, 1873.

Brano di lettera al Prof. Pigorini intorno alle scoperte fatte sul Castellaccio. — Annuario scientifico ed industriale, anno X (1873), pp. 219-220, in-8°. Milano, Fratelli Treves, 1874.

I pozzi bianchi e neri della città d'Imola in relazione colla idrografia e l'igiene. Rapporto dell'Assessore Comm. Giu-

seppe Scarabelli Gommi Flamini al R. Sindaco d'Imola. — Opuscolo di pp. 18, in-4°. Con una tavola indicante l'area della città d'Imola divisa in quadrati di 300 metri ciascuno, portanti l'indicazione delle medie profondità dei peli d'acqua dei pozzi ivi esistenti. Imola, Tip. d'Ignazio Galeati e figlio, 1874.

Scavi nella terramara del Castellaccio presso Imola. Lettera al Prof. Strobel. — Bullettino di Paletnologia it., anno I, pp. 150-151. Parma, Tip. della Società per gli operai tipografici, 1875.

La terramara del Castellaccio presso Imola. Lettera al Prof. Strobel. — Bullettino di Paletnologia italiana, anno 3°, pp. 21-24, in-8°. Reggio dell'Emilia, Tip. degli Artigianelli, 1877.

Sugli scavi eseguiti nella Caverna detta di Frasassi (Provincia di Ancona). — Mem. della R. Acc. dei Lincei, Classe di Scienze fis., mat. e nat., serie 3ª, tomo V, pp. 78-106, con 2 tavole. Roma, Tip. Salviucci, 1880.

Descrizione della Carta geologica del versante settentrionale dell'Appennino fra il Montone e la Foglia [o Geologia della Provincia di Forlì]. — Un vol. di pp. 106, in-4°, con 7 fig. intercalate nel testo, carta geologica e tavola di sezioni. Questa opera fa parte della Monografia statistica, economica, amministrativa della Provincia di Forlì (Geologia) [Tip. d'Ignazio Galeati e figlio in Imola]. — Forlì, a spese provinciali, 1880.

Carta geologica del versante settentrionale dell'Apennino compreso fra i fiumi Montone e Foglia, rilevata alla scala di 1 : 50000 e ridotta a quella di 1 : 100000. — Bologna, Stab. lit. G. Thumb, 1880. [Vedi Descrizione geologica del versante ecc.].

Carta geologica del Monte Castellaccio e dintorni presso Imola, alla scala di 1 : 5000. (Con sezione alla scala di 1 : 2500). — Stab. Lit. Virano e Teano. Roma, 1881.

Sulla età delle argille scagliose. — Boll. della Soc. geol. it., vol. II, p. 93. Roma, Tip. Salviucci, 1883.

Sezione geologica nelle valli del Sentino e dell'Esino (Provincia di Ancona). Stab. lit. C. Virano, Roma, 1883. — Bollettino della Società geologica it., vol. II, tav. V. Roma, 1883.

Stazione preistorica del Monte del Castellaccio presso Imola scoperta ed interamente esplorata da G. Scarabelli Gommi Flamini. Un vol di pp. VI + 95, in-4° gr., con 23 tavole in litografia, delle quali 3 grandi colorate. — Imola, tip. d'I. Galeati e figlio, 1887.

Tavole due (I e II), dimostranti la scheggiatura delle pietre lavorate, quaternarie, dell'Imolese. — Bologna, Lit Wenk, 1888.

Discorso d'apertura dell'adunanza generale della Società geologica italiana tenuta in Rimini il 6 Settembre 1888. — Boll. della Soc. geol. ital., vol. VII, pp. 241-243. Roma, Tip. della R. Acc. dei Lincei, 1888.

Sulle pietre lavorate a grandi scheggie del Quaternario presso Imola. — Bullettino di Paletnologia italiana, serie II, tomo VI, anno XVI, pp. 157-166, in-8°, con una cartina geologica (tav. V). Parma, Luigi Battei, 1890.

Necessità di accertare se le impronte così dette fisiche e fisiologiche provengono dalle superfici superiori o dalle inferiori degli strati. Osservazioni sopra il *Nemertilites Strozzii* Meng. — Bollettino della Soc. geol. it., vol. IX, pp. 349-357, in-8°, con 2 tav. (IX e X). Roma, 1890.

Orizo-clinometro (Scarabelli). Nota esplicativa intorno al modo di servirsene. — Pp. 2, in-fol., con fig. Imola, Tip. Galeati, 1892.

Sopra alcuni fossili raccolti nei colli fiancheggianti il fiume Santerno nelle vicinanze d'Imola. — Boll. della Società geol. it., vol. XVI, pp. 201-241, con due tavole. Roma, 1897.

Nuovi studi sulla probabilità di felice risultato di una perforazione artesiana in Imola. Lettera al Direttore della

Cassa di Risparmio in Imola. — Op°. di pp. 7, in-4°, con una tavola di sezioni geologiche. Imola, Tip. d'Ignazio Galeati e figlio, 1898.

Osservazioni geologiche e tecniche fatte in Imola in occasione di un pozzo artesiano eseguito a spese della Cassa di Risparmio dalla spettabile Ditta Ing. A. Bonariva nell'ultimo trimestre 1898. — Pagine 2, in-fol., Imola, Tip. Galeati, 1899.

Nota — Nell'elenco manoscritto dei lavori dello Scarabelli, regalato dall'estinto al prof. Toldo, è compresa anche una Nota: « Sulla utilità degli studî geologici per gl'ingegneri (1844) »; ma non risulta se e dove sia stata pubblicata.

b) — **Manoscritti.**

Relazione [ultimata nel 1900] sul rilevamento della Stazione preistorica di San Giuliano, nel comune di Dozza, eseguito negli anni 1892-1898.

c) — **Modelli e strumenti**
[*conservati nel Museo civico d'Imola*].

Nove modelli geologici: sette di stratigrafia generale didattica (1892) e due di stratigrafia speciale bolognese-imolese (1900).

Saggi di esperimenti relativi alle impronte fossili così dette problematiche, alle figure analoghe ai Nemertiliti e a quelle dovute a viscosità. (Queste ultime venivano eseguite con lastre di legno o di vetro o di marmo, appoggiate su belletta di argilla oppure di gesso, e poi staccate per sollevamento parziale, laterale: esse erano utilizzate dallo Scarabelli per ricavarne paesaggi).

Orizo-clinometro Scarabelli, « strumento per rilevare a un tempo, speditamente e senza l'aiuto di calcoli, l'orientazione e l'inclinazione di quegli strati terrestri dei quali non fossero in vista se non che le superfici inferiori » [Vedi la Nota esplicativa per l'uso di detto strumento, pubblicata nel 1892].

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 febbraio 1906.

Achiardi G. (d') — I minerali dei marmi di Carrara (Parte seconda). Pisa, 1905. 8°.

Bargagli P. — Stefano Bertolini. (Dal Bull. della Soc. Ent. Ital., anno XXXVI. Trim. 4°, 1904). Firenze, 1905. 8°.

Bassani F. — In memoria di Leopoldo Villa. Napoli, 1905. 8°.

Berlese A. — Sopra una nuova specie di Mucedinea parassita del *Ceroplastes Rusci*. (Dal « Redia », vol. III, fasc. 1°). Firenze, 1906. 8°.

Carnazzi P. — Dilatazione e compressibilità delle miscele. (Dal Nuovo Cimento, S. V, vol. IX, marzo 1905). Pisa, 1905. 8°.

Carnoy H. — Notice sur M. E. Lebon. (Dict. biogr. intern. des Écrivains). Paris, s. a. 8°.

Catalogue photographique du Ciel. Vol. 1. Paris, 1905. 4°.

Fusari R. — A proposito di un cranio presentante l'osso parietale tripartito. (Dall'Arch. di Anat. e di Embriol. Vol. II, fasc. 3). Firenze, 1903. 8°.

Id. — Alberto von Kölliker. Torino, 1905. 8°.

Id. — Alcune osservazioni di fina anatomia nel campo del sistema nervoso periferico. (Dal Giorn. della R. Acc. di Med. di Torino, 1902, nn. 8, 9). s. l. ed a 8°.

Id. — Caso di sdoppiamento totale e simmetrico di un tratto del midollo spinale con canale vertebrale chiuso ed ipertricosi lombare. (Giorn. della R. Acc. di Medicina di Torino. Vol. VII, anno LXIV, fasc. 2°). Torino, 1901. 8°.

Id. — Contributo allo studio della forma e della disposizione dei villi intestinali. (Ist. di Anat. normale della R. Univ. di Torino). Torino, 1904. 8°.

Fusari R. — Contributo allo studio delle terminazioni nervose nei muscoli striati di « Ammocoetes branchialis ». (Acc. R. delle Scienze di Torino, 1904-1905). Torino, 1905. 8°.

Id. — Giovanni Battista Laura. (Ann. della R. Univ. di Torino, 1901-1902). Torino, 1902. 8°.

Id. — Giulio Bizzozzero. (Abd. aus den Anat. Anzeiger, XIX. Band. 1901). Jena, 1901. 8°.

Id. — Présentation de préparations microscopiques démontrant les terminaisons nerveuses dans les muscles striés, dans l'épiderme et dans l'épithélium de la cavité buccale de l'*Ammocoetes branchialis*. (Ext. des Compt. rend. de l'Ass. des Anatomistes. I° Session. Lyon, 1901).

Id. — Sui fenomeni che si osservano nella mucosa del canale digerente durante lo sviluppo del feto umano. (Dall'Arch. per le Scienze Mediche. Vol. XXVIII, 1904). Torino, 1904. 8°.

Id. — Sulla divisione e sulle fessure marginali dell'osso parietale nella specie umana. (Arch. per le Scienze Mediche. Vol. XXVIII). Torino, 1904. 8°.

Garbasso A. — Vorlesungen über theoretische Spektroskopie. Leipzig. 1906. 8°.

Goppelsroeder F. — Anregung zum Studium der auf Capillaritäts- und Adsorptionserscheinungen beruhenden Capillaranalyse. Basel, 1906. 8°.

Jacob C. et Flusin G. — Étude sur le Glacier Noir et le Glacier Blanc dans le Massif du Pelvoux. (Ext. de l'Annuaire de la Soc. des Touristes du Dauphiné, n. 30, 1904). Grenoble, 1905. 8°.

Janet C. — Anatomie de la tête du Lasius Niger. Limoges, 1905. 8°.

Janet C. — Description du matériel d'une petite installation scientifique, Ire Partie. Limoges, 1903. 8°.

Id. — Observations sur les Fourmis. Limoges, 1904. 8°.

Kölliker A. — Die Entwicklung der Elemente des Nervensystems. (Sond. aus: « Zeitschrift für wissensch. Zoologie, LXXXII). Leipzig, 1905. 8°.

Lebon E. — Sur le nombre des nombres premiers de 1 à N. (Compt. rend. du Congrès des Soc. savantes en 1905. Sciences). Paris, 1905. 8°.

Leonardi G. — Diagnosi di Cocciniglie nuove. (Dal « Redia ». Vol. III, fasc. 1°). Firenze, 1906. 8°.

Id. — Generi e specie di Diaspiti. Saggio di sistematica delle Fioriniae. (Dal « Redia ». Vol. III, fasc. 1°, 1905). Firenze, 1906. 8°.

Lussana S. — A proposito di uno studio recente sul calore specifico del gas. (Dal nuovo Cimento, S. V, Vol. X, sett. 1900). Pisa, 1905. 8°.

Meli R. — Sulla *Vola Planariae*, Simonelli (*Pecten*), fossile nei terreni pliocenici e quaternarî dei dintorni di Roma. (Sunto estr. dal Boll. della Società Zool. Ital., fasc. VII-VIII, S. 2ª, Vol. VI). Roma, 1905. 8°.

Osmons H. (d') — Notice sur M. E. Lebon. (Les Arch. Biogr. contemporaines. Revue mens. ecc.). Paris, s. a. 8°.

Pflüger E. — Ob der Zucker im Harn durch Gährung mit Sécherheit nachgewiesen werden kann? (Physiol. Labor. in Bonn). Bonn, 1906. 8°.

Id. — Ueber die durch chirurgische Operationen angeblich bedingten Glykosurien. Bonn, 1906. 8°.

Rosenbusch H. — IV. Studien im Gneisgebirge des Schwarzwaldes. II. Die Kalksilikatfelse im Rench- und Kinzigitgneis. III. Die Kalksilikatfelse von der Fehren bei Neustadt i. Schw. (Sonderabd. aus den Mitteil. d. Grossh. Bad. Geol. Landesanstalt. V. Bd. 1 Heft, 1905).

Sauve A. — Filtro spettroscopico. (Estr. dalle Mem. della Soc. degli Spettroscopisti ital. Vol. XXXI, 1902). Catania, s. a. 4°.

Id. — Spettroelioscopio, (Estr. dalle Memorie della Soc. degli Spettroscopisti italiani. Vol. XXXIII, 1904). Catania, s. a. 4°.

Silvestri F. — Contribuzioni alla conoscenza biologica degli Imenotteri parassiti. I. Biologia del *Litomastix truncatellus* (Dalm.) (2ª Nota preliminare). Portici, 1906. 8°.

V. C.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1906). Fasc. 4°. 1° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 7°-8°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VI. Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 febbraio 1906.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Pavanini. Sul problema dei due corpi nella ipotesi di un potenziale newtoniano ritardato (pres. dal Corrisp. *Levi-Civita*) . . . . . Pag. 197
Orlando. Alcune applicazioni dell'integrale di Fourier (pres. dal Socio *Cerruti*) . . . . » 205
Magini. Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore (pres. dal Corrisp. *Battelli*) (*) . . . . . » 208
Chistoni. Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1902 e nell'estate del 1903 (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . . . » »
Id. Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1904 e nell'estate del 1905 (pres. *Id.*) (*) . . . . . » 214
Teglio. Contributo allo studio del pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström (pres. *Id.*) . . . . . » »
Monti. Sull'interpretazione matematica dei sismogrammi (pres. dal Corrisp. *Battelli*) . . » 217
Padoa. Sui prodotti di idrogenazione del pirrolo a mezzo del nickel ridotto (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . . » 219
Ducceschi. Sulla fisiologia della respirazione. I. Osservazioni su di un caso di fistola bronchiale nell'uomo (pres. dal Socio *Luciani*) . . . . . » 223
Brizi. Ricerche intorno al modo di caratterizzare le alterazioni prodotte alle piante coltivate dalle emanazioni gassose degli stabilimenti industriali (pres. dal Socio *Cuboni*) . . » 232
Petri. Nuove ricerche sopra i batteri della Mosca olearia (pres. *Id.*) . . . . . » 238
Gorini. Ricerche bacteriologiche sul formaggio Gorgonzola (pres. dal Socio *Briosi*) (*) . » 246

PERSONALE ACCADEMICO

Bassani. Commemorazione del Socio senatore prof. *G. Scarabelli Gommi Flamini* . . . » »
BULLETTINO BIBLIOGRAFICO . . . . . » 263

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. *Roma 4 marzo 1906.* **N. 5.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 marzo 1906.

Volume XV.° — Fascicolo 5°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. – *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. – *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. – *c*) Con un ringraziamento all'autore. – *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 marzo 1906.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Osservazioni della cometa 1905 c Giacobini fatte all'equatoriale di 39 cm. d'apertura all'Osservatorio al Collegio Romano.* Nota del Socio E. Millosevich.

La cometa venne scoperta la mattina del 7 dicembre a Nizza dall'astronomo Giacobini. Potè essere osservata a levante prima dell'alba mentre si accostava al perielio, che raggiunse il 22 gennaio. L'astro, per la piccola distanza perielia (0,22), crebbe assai in luce, ma durante il periodo del massimo splendore trovossi immerso nel lume crepuscolare, dal quale potè sottrarsi assai tardi.

Dalla parte di levante io osservai l'astro, il giorno dopo della scoperta, come segue:

1905 dic. 7 $15^h44^m7^s$ R.C.R α app. com. $14^h26^m3^s.41$ ($9^n.667$); δ app. com. $+20°34'33''.9$ (0.720).

Altre gravi occupazioni astronomiche non mi permisero di osservare o far osservare l'astro se non quando di già trovavasi a ponente. Le ultime osservazioni sono le seguenti:

1906 febbr.	17	6^h44^m	1^s RCR	;	α app. com.	$0^h41^m11^s.99$ (9. 581)	;	δ app. com.	$-14°25'27''.4$ (0. 816)
»	»	6 57 30	»	;	»	0 41 15. 96 (9. 596)	;	»	-14 25 3. 6 (0. 810)
»	18	6 46 18	»	;	»	0 47 53. 35 (9. 579)	;	»	-13 39 11. 4 (0. 814)
»	»	7 1 53	»	;	»	0 47 57. 65 (9. 596)	;	»	-13 38 38. 7 (0. 808)
»	25	6 55 0	»	;	»	1 28 38. 40 (9. 566)	;	»	-8 33 41. 3 (0. 801)
»	»	7 4 53	»	;	»	1 28 40. 56 (9. 578)	;	»	-8 33 25. 4 (0. 799)
»	»	7 18 56	»	;	»	1 28 43. 23 (9. 593)	;	»	-8 33 6. 3 (0. 795)
»	27	7 19 55	»	;	»	1 38 43. 41 (9. 590)	;	»	-7 13 33. 1 (0. 792)

La seconda osservazione del 17, la prima del 18 e la seconda del 25 debbonsi al dott. E. Bianchi; la seconda del 18 e la terza del 25 spettano all'assistente volontario Giovanni Zappa.

Fisica. — *Sulla resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza.* Nota del Corrispondente A. Battelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sull'integrazione di una notevole equazione differenziale a derivate parziali.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Socio V. Cerruti.

Se, generalmente, poniamo

$$\mathfrak{D}_k = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

dove k denota una grandezza indipendente da x, y, z, t, non è inopportuno far conoscere un metodo, chiaro ed abbastanza semplice, per l'integrazione dell'equazione differenziale

$$\mathfrak{D}_{k_1} \mathfrak{D}_{k_2} \ldots \mathfrak{D}_{k_n} = 0, \tag{1}$$

anche in casi particolari [1].

Noi supponiamo, in principio, che $k_1, k_2, \ldots, k_n$ siano grandezze tutte differenti fra di loro; poi stabiliamo che della funzione regolare $u(x, y, z, t)$, soluzione della (1), siano noti, per $t = 0$, i valori $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ldots, \frac{\partial^{2n-1} u}{\partial t^{2n-1}}$. Chiameremo rispettivamente $V_0(x, y, z)$, $V_1(x, y, z)$, ..., $V_{2n-1}(x, y, z)$ questi valori noti.

Ora scriviamo

$$u(x, y, z, t) = \tag{2}$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma \sum_{\nu=1}^{n} \left[A_\nu(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\varepsilon_\nu t} + A'_\nu(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\varepsilon'_\nu t} \right] e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$\varepsilon_\nu = + k_\nu \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \qquad \varepsilon'_\nu = - k_\nu \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

[1] In una precedente mia Nota, inserita nel fascicolo di febbraio, ho mostrato che importanza possa avere la (1) in alcune questioni di fisica matematica. Il metodo ivi dato, per integrarla in un caso particolarissimo, è molto meno semplice di questo che ora adoperiamo. Debbo far notare che una prima idea del procedimento, secondo il quale

La funzione u, così definita, verifica, come è chiaro, la (1). Sono soltanto da determinarsi le A_ν, A'_ν, perchè siano verificate le condizioni che debbono essere valide per $t = 0$.

Queste condizioni forniscono subito $2n$ equazioni come la seguente (dove μ assume i valori $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$):

$$V_\mu(x, y, z) =$$

$$(3) \qquad \iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma \sum_{\nu=1}^{n} [\varepsilon_\nu^\mu A_\nu(\alpha, \beta, \gamma) + \varepsilon_\nu'^\mu A'_\nu(\alpha, \beta, \gamma)]\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}.$$

Ma se ci ricordiamo di un teorema di Fourier, che, per le funzioni di tre variabili s_1, s_2, s_3, può così formularsi:

$$f(s_1, s_2, s_3) =$$

$$(4) \qquad \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\, e^{i[\lambda_1(s_1-\sigma_1)+\lambda_2(s_2-\sigma_2)+\lambda_3(s_3-\sigma_3)]}\, d\sigma_1\, d\sigma_2\, d\sigma_3,$$

e paragoniamo (3) con (4), otteniamo $2n$ equazioni come quest'altra:

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} [\varepsilon_\nu^\mu A_\nu(\alpha, \beta, \gamma) + \varepsilon_\nu'^\mu A'_\nu(\alpha, \beta, \gamma)] = \\ &\frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} V_\mu(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \end{aligned}$$

E se, dunque, le k sono tutte fra di loro differenti, noi troviamo un sistema di $2n$ equazioni di primo grado, con determinante non nullo, atto a determinare le $2n$ funzioni A_ν, A'_ν. In questo caso, la (1) può, dunque, ritenersi integrata, perchè basta sostituire nella formula (2) queste A_ν, A'_ν, date dal sistema (5).

Un po' meno semplice, anche se lasciamo le k tutte differenti fra di loro, si presenta l'integrazione della (1), quando sia noto, per esempio, u, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \ldots, \frac{\partial^{2n-1} u}{\partial z^{2n-1}}$ per $z = 0$. Questi elementi noti sono funzioni di x, y, t. Ricaviamoci il valore di $u(x, y, z, t)$, per z positivo, e vedremo subito che assolutamente analogo sarebbe il metodo per ricavare $u(x, y, z, t)$, dove fosse z negativo: bisogna, per altro, trattare separatamente i due casi. Ciò che facciamo per z vale, *mutatis mutandis*, anche per x, y.

---

si riconduce l'integrazione delle equazioni d'equilibrio elastico del suolo isotropo all'integrale di Fourier, è già nella Memoria di Lamé e Clapeyron *Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes*. Ringrazio qui l'illustre prof. Cerruti d'avermi dato precisa indicazione relativa a tale Memoria, molto degna certamente d'essere letta e studiata.

Poniamo

$$u(x, y, z, t) =$$

$$(6) \qquad \iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} [B_\nu(\alpha, \beta, \varepsilon)\, e^{i\gamma_\nu z} + B'_\nu(\alpha, \beta, \varepsilon)\, e^{i\gamma'_\nu z}]\, e^{i(\alpha x + \beta y + \varepsilon t)},$$

ma qui dobbiamo leggere

$$\gamma_\nu = +\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{k_\nu^2} - (\alpha^2 + \beta^2)}\ , \quad \gamma'_\nu = -\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{k_\nu^2} - (\alpha^2 + \beta^2)}\,,$$

sempre quando $\alpha, \beta, \varepsilon$ siano tali che la grandezza $\frac{\varepsilon^2}{k_\nu^2} - (\alpha^2 + \beta^2)$ sia positiva, e dobbiamo invece leggere

$$\gamma_\nu = \gamma'_\nu = +i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\varepsilon^2}{k_\nu^2}}\,,$$

ogni volta che ciò non avvenga. Questo provvedimento non toglie, come è chiaro, la continuità di γ_ν, γ'_ν.

Finchè $\alpha, \beta, \varepsilon$ variano in modo che *tutti* i valori γ_ν, γ'_ν differiscano fra di loro, noi potremo determinare $B_\nu(\alpha, \beta, \gamma)$, $B'_\nu(\alpha, \beta, \gamma)$ con un sistema perfettamente analogo a (5). Supponiamo invece che la variazione di α, β, γ fuori da questo campo abbia portato γ_1 a coincidere con γ'_1, lasciando invece le altre tutte differenti. Allora, nella (6) le due grandezze B_1 e B'_1 hanno lo stesso coefficiente, e ci basterà determinare la funzione $B_1 + B'_1$, al che si presta perfettamente un sistema analogo a (5), privato, se vogliamo, dell'ultima equazione. È facile vedere che analoga possibilità si presenta quando altre γ si portano a coincidere colla rispettiva γ'.

Rimangono da studiarsi i precedenti problemi, quando, per l non maggiore di n, sia, per esempio, $k_1 = k_2 = \cdots = k_l$; supponiamo che, per $t = 0$, si conosca u e le sue $2n - 1$ prime derivate rispetto a t: qui stabiliamo

$$u = u_0 + t u_1 + t^2 u_2 + \cdots + t^{l-1} u_{l-1}$$

$$u_h(x, y, z, t) =$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, [A_h(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\varepsilon_h t} + A'_h(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\varepsilon'_h t}]\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, l - 1)$$

$$u_0(x, y, z, t) =$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma \sum_{\nu=1}^{n} [A_\nu(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\varepsilon_\nu t} + A'_\nu(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\varepsilon'_\nu t}]\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}.$$

Procedendo come prima, troviamo un sistema di equazioni di primo grado, analogo a quello rappresentato dall'equazione (5), ma è un po' meno facile dimostrare l'indipendenza delle equazioni che vi figurano. Il determinante, che nell'altro sistema si presentava come un prodotto di differenze, qui presenta inoltre, come il lettore potrà vedere facilmente, $2n - 2l$ fattori multipli d'ordine l, e si vede poi subito che è diverso da zero, quando le $\varepsilon, \varepsilon'$, da $\varepsilon_l, \varepsilon'_l$ in poi, sono tutte fra loro differenti. Nel caso di $n = l$, si dimostra che il determinante non è nullo, perchè, se fosse nullo, sarebbe anche nullo, nel determinante che corrisponde al caso di n diverso da l, il primo minore principale d'ordine $2l$, il che darebbe coefficiente nullo al prodotto dei termini principali del suo aggiunto. Per un lettore che sia pratico dell'algebra basterà questo semplice accenno.

Se, per $z = 0$, fossero noti i valori $u, \frac{\partial u}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial^{2n-1} u}{\partial z^{2n-1}}$, volendo calcolare $u(x, y, z, t)$, porremmo

$$u = u_0 + z u_1 + z^2 u_2 + \cdots + z^{l-1} u_{l-1}$$

$$u_h(x, y, z, t) =$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\varepsilon \left[B_h(\alpha, \beta, \varepsilon)\, e^{i\gamma_h z} + B'_h(\alpha, \beta, \varepsilon)\, e^{i\gamma'_h z} \right] e^{i(\alpha x + \beta y + \varepsilon t)}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, l - 1)$$

$$u_0(x, y, z, t) =$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, d\varepsilon \sum_{\nu=l}^{n} \left[B_\nu(\alpha, \beta, \varepsilon)\, e^{i\gamma_\nu z} + B'_\nu(\alpha, \beta, \varepsilon)\, e^{i\gamma'_\nu z} \right] e^{i(\alpha x + \beta y + \varepsilon t)},$$

assumendo i valori delle γ, γ' in diverso modo, secondo che si voglia $u(x, y, z, t)$ per z positivo o per z negativo; come precedentemente. Ciò che è detto per z vale anche, con opportuni adattamenti, per x e per y.

Giova notare come l'integrazione della (1), in tutti i casi esaminati, sia ricondotta all'integrale di Fourier.

Fisica. — *Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore* [1]. Nota del dott. R. Magini, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

1. Nella Nota precedente [2], allo scopo di seguire l'ordine di esposizione adottato nei testi teorici di elettrostatica, ho messo per primo in evidenza il caso di un disco al potenziale $V \neq 0$, posto parallelamente e ad egual distanza da altri due grandi piatti al potenziale zero, ed ho poi scritto le formole (2), (3), (4), (8), tutte esprimenti capacità, come se la carica fosse distribuita soltanto su una sola faccia del disco. Così nel § 8 il calcolo procede come se invece di due grandi piatti, ne esistesse uno solo. Perciò, mentre le formole delle striscie addizionali sono perfettamente a loro posto, e debbono essere ritenute rigorosamente esatte, perchè ricavate dal calcolo proprio nel caso del disco posto in mezzo agli altri due; le formole esprimenti la capacità non rappresentavano effettivamente che la semicapacità *totale*, cioè il semirapporto della carica su ambedue le faccie del disco al suo potenziale. Quelle formole (comprese quelle di Maxwell, che vennero perciò divise per metà) furono così scritte, perchè praticamente non si adopera che un grande piatto al potenziale zero, e perchè allora esse rappresentano senz'altro la capacità *effettiva* del disco, come è facile mostrare.

Se consideriamo infatti un piatto di grandezza finita caricato ad un potenziale V, posto sopra e parallelamente ad un piatto assai grande legato alla terra, le quantità di elettricità sparse sulle due faccie sono del tutto differenti in grandezza, mentre esse sono eguali se il piatto considerato è posto in mezzo ad altri due. Quelle quantità sono così differenti, che si può ritenere l'ettricità come sparsa soltanto sopra una sola faccia, e precisamente su quella che è rivolta al grande piatto. In questa la carica è la stessa che se la densità fosse uniforme e se la superficie appartenesse ad un piano infinito, aumentata però della carica della striscia addizionale; la quantità sull' altra è invece infinitesima di fronte a questa. Le due cariche sono infatti approssimativamente (cfr. J. J. Thomson, *Notes on Recent* ecc., § 235):

$$\frac{V}{4\pi d}\left(l + \frac{d}{\pi}\right), \tag{1}$$

$$\frac{V}{4\pi^2}\log\left\{1 + \frac{\pi l}{d} + \log\left(1 + \frac{\pi l}{d}\right)\right\}, \tag{2}$$

dove l esprime la lunghezza di una striscia avente per larghezza l'unità, presa nel piatto di grandezza finita e supposta limitata da un orlo rettilineo; V, il

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Pisa.

[2] V. questi Rendiconti a pag. 6.

potenziale; d, la distanza dei piatti. Se, per semplicità, ed al solo fine di formarsi un'idea della grandezza approssimativa della carica sulla faccia esterna del nostro disco di cm. 15 di raggio, noi supponiamo $l = \pi R^2$ e $d =$ cm. 0,1, si vede subito che, mentre la (1) conduce a trovare una capacità di cm. 562,525, la (2) non aggiunge a questa che cm. 0,25, cioè nemmeno la duemillesima parte.

Ora, tanto nel caso di un grande piatto quanto in quello di due, la quantità di elettricità sparsa rispettivamente sulla faccia *interna* o su ciascuna delle due faccie, è la stessa (Maxwell, *Elec. and Magn.*, § 202; J. J. Thomson, l. c., §§ 235, 236) che se la distribuzione fosse uniforme anche in prossimità dell'orlo e la stessa che per due piatti infiniti, con la larghezza del piatto in esame aumentata della solita striscia addizionale; quindi si può asserire che, a meno della capacità infinitesima che dovrebbe essere aggiunta dipendentemente dalla debolissima carica esistente sulla faccia *esterna*, le formole delle striscie addizionali considerate nella Nota precedente, sono con la stessa approssimazione applicabili ad un piatto posto di fronte ad un altro molto più esteso di esso, e al potenziale zero. Ciò che rappresenta appunto la disposizione più usata nella pratica.

La grandezza della striscia addizionale rimane, come è evidente, la stessa nell'un caso e nell'altro; solamente, poichè ora d esprimerà la distanza fra il disco ed il grande piatto, mentre prima indicava quella fra i grandi piatti, dovremo porre $2d$ al posto del primitivo d. La capacità del disco sarà nel nuovo caso eguale alla semicapacità, di cui si è parlato sopra. Rimangono quindi applicabili senz'altro alla nuova disposizione le considerazioni svolte nella precedente Nota.

Sommando la (1) e la (2), dopo averle divise per V, si ha:

$$\frac{V}{4\pi d}\left(l + \frac{d}{\pi}\right) + \frac{1}{4\pi^2}\log\left\{1 + \frac{\pi l}{d} + \log\left(1 + \frac{\pi l}{d}\right)\right\},$$

che può scriversi:

$$\frac{1}{4\pi d}\left[l + \frac{d}{\pi}\left(1 + \log\left\{1 + \frac{\pi l}{d} + \log\left(1 + \frac{\pi l}{d}\right)\right\}\right)\right],$$

od anche:

$$(3) \qquad \frac{l}{4\pi d}\left[1 + \frac{d}{\pi l}\left(1 + \log\left\{1 + \frac{\pi l}{d} + \log\left(1 + \frac{\pi l}{d}\right)\right\}\right)\right],$$

che esprime la capacità totale della striscia considerata.

Da questa espressione si potrebbe subito ricavare quella della striscia addizionale, e svolgere per questa le considerazioni del caso. Ma ciò sarebbe inutile, perchè la formola che si ricaverebbe dalla (3), oltre non essere troppo comoda per il calcolo, non presenta che una relativa precisione, provenendo la (1) e la (2), e quindi anche la (3), da sviluppi incompleti di esponenziali.

2. Sarà perciò preferibile studiare le formole date dal Kirchhoff [1]. Ho già detto che questi, dopo avere constatato che la soluzione data dal Clausius

[1] Monatsber. der Akad. d. Wiss. zu Berl., 15, 1877.

per la carica di un condensatore circolare non può rappresentare esattamente lo stato delle cose, perchè valevole soltanto nel caso in cui la grossezza delle armature si possa considerare come estremamente piccola di fronte alla loro distanza, si propose di studiare il caso più generale di un condensatore con o senza anello di guardia, introducendo nel calcolo e tenendo nel debito conto l'influenza della grossezza, quando essa non è trascurabile.

Valendosi del metodo indicato nella precedente Nota, il Kirchhoff studiò il caso in cui l'elettricità è distribuita su superficie di rotazione conduttrici, e suppose poi che tali superficie fossero appunto quelle di due lastre costituenti un condensatore circolare, eguali fra loro, di grossezza b, di raggio R, poste parallelamente l'un l'altra a distanza $2d$. Il calcolo suppone R come finito, d e b come piccoli rispetto a R. Detti $+1$ e -1 i potenziali delle due armature, il Kirchhoff calcola per tutti i punti delle superficie e del campo elettrostatico, la funzione potenziale e la funzione di flusso; e confrontando poi la espressione di quest'ultima con un'altra già trovata in precedenza ed in cui figura una costante, dà senz'altro il valore di questa costante, la quale non è altro che il doppio della quantità di elettricità contenuta nella intiera lastra del condensatore portata al potenziale $+1$. Questa quantità è:

$$\frac{R^2}{4d} + \frac{R}{2\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)R}{e\,d^2} + \frac{b}{2d}\log\frac{2d+b}{b}\right\}, \tag{4}$$

dove e indica la base dei logaritmi neperiani. Naturalmente, la carica dell'altro disco è della stessa grandezza e di segno contrario.

Passiamo ora allo studio della (4).

3. Per il principio delle immagini elettriche, la distribuzione su un piatto a potenziale $+V$ è la medesima come se invece di un altro piatto a potenziale $-V$ e alla distanza $2d$, avessimo un piatto assai esteso al potenziale zero, posto parallelamente al primo e a distanza d da esso. Quindi la (4), che, per esprimere la capacità del condensatore formato dai due dischi, dovrebbe ancora essere divisa per metà, rappresenta senz'altro la capacità, già corretta, del condensatore formato dal disco circolare posto in presenza di un grande piatto legato alla terra, che è proprio il caso che c'interessa.

Osservando la (4), si scorge subito che, data quest'ultima disposizione, il primo termine non esprime altro che la capacità del disco ricavata dalle sue dimensioni, astraendo dalla perturbazione prodotta dagli orli. Ci occuperemo quindi del secondo termine, che rappresenta invece la correzione della capacità, cioè l'aumento di capacità dovuto alla influenza degli orli, e cercheremo anche di determinare la larghezza della striscia addizionale. Supponendo, al solito, la distribuzione come uniforme, potremo immaginare riunite, con la stessa densità, nella così detta striscia addizionale, le maggiori cariche effettivamente esistenti sulla superficie, in vicinanza dell'orlo, sull'orlo (inteso come spigolo) e sulla superficie cilindrica laterale del disco.

Allora, chiamando λ la larghezza di questa striscia, potremo porre la capacità C del condensatore sotto la forma:

$$\frac{R^2}{4d} + \frac{2\pi R . \lambda}{4\pi d};$$

e poichè per C_a, correzione della capacità, è

$$(5) \qquad C_a = \frac{R\lambda}{2d'} = \frac{R}{2\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)R}{e\,d^2} + \frac{b}{2d}\log\frac{2d+b}{b}\right\},$$

così si ha subito:

$$(6) \qquad \lambda = \frac{d}{\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)R}{e\,d^2} + \frac{b}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\}.$$

Misurando l'influenza dell'orlo dalla larghezza λ della striscia, si può facilmente vedere come essa cambi con la grossezza e con la distanza. Derivando la (6) rispetto a b si ottiene:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial b} = \frac{1}{2\pi}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right);$$

dunque quell'influenza cresce con l'aumentare della grossezza, b e d essendo sempre numeri positivi. La stessa cosa avviene per la correzione C_a.

E derivando la (6) rispetto a d, si ha:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial d} = \frac{1}{\pi}\left\{\log\frac{4\pi R}{e} + \log\frac{2d+b}{d^2} - 1\right\},$$

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial d^2} = -\frac{1}{\pi}\left\{\frac{2(d+b)}{d(2d+b)}\right\} = \frac{-1}{\pi}\left\{\frac{1}{d} + \frac{b}{d(2d+b)}\right\},$$

$$\frac{\partial^3\lambda}{\partial d^3} = \frac{1}{\pi}\,\frac{b(4d+b)}{d^2(2d+b)^2},$$

la quale terza derivata è una quantità essenzialmente positiva e sta perciò ad indicare che l'influenza dell'orlo cresce e diminuisce col crescere e diminuire della distanza dei piatti. Questo resultato ed il precedente riguardante la grossezza sono perfettamente conformi a quelli già ottenuti nella I Nota dall'esame della formola di J. J. Thomson.

E derivando la (5) rispetto a d, si ha;

$$\frac{\partial C_a}{\partial d} = -\frac{R}{2\pi}\left\{\frac{1}{d} + \frac{b}{2d^2}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\},$$

quantità negativa; quindi, la correzione della capacità diminuisce quando cresce la distanza dei piatti, per quanto poi, effettivamente, essa rappresenti, pure diminuendo, una parte sempre più rilevante delle capacità totali relative ai successivi valori della distanza, come sarebbe facile mostrare. Ora, poichè

$$\lambda = \frac{2d\,C_a}{R},$$

e λ è crescente con d, mentre C_a è decrescente con esso, risulta subito che la correzione della capacità diminuisce più lentamente di quel che non aumenti la distanza.

4. Osservando la (5) e la (6), si scorge d'un tratto che facendo cambiare nello stesso rapporto tutte le dimensioni nel condensatore, sostituendo cioè contemporaneamente a R, b, d i nuovi valori kR, kb, kd, dove k è un numero, si hanno per la striscia addizionale e per la correzione di capacità del nuovo condensatore i nuovi valori $k\lambda$ e kC_a. Ciò permetterà di risparmiare i calcoli per la ricerca della larghezza della striscia addizionale e della correzione di un condensatore, ogni qual volta si conosceranno i valori di λ e di C_a per un altro condensatore che sia legato al primo da una relazione di similitudine.

Viceversa, questo resultato teorico è facilmente suscettibile di verifica sperimentale; così, se la formola di Kirchhoff, da cui siamo partiti, rappresenta bene lo stato delle cose, dovremo trovare che effettivamente l'influenza degli orli è direttamente proporzionale al rapporto di similitudine dei due condensatori. Non è vero, per altro, il rovescio. Infatti, il resultato precedente discende anche dalla formola di Thomson; per questo lato le formole di Kirchhoff e di Thomson conducono ad eguali conseguenze. Eppure, come vedremo fra poco, esse danno per la capacità, per la larghezza della striscia e per la correzione, resultati numerici completamente diversi.

5. Per giudicare dell'influenza degli orli e per fare la verifica delle formole esaminate, può capitare di avere bisogno di calcolare facilmente λ e C_a per un condensatore che non differisca da un altro preso per confronto e di cui siano noti questi due elementi, che per la grandezza del disco, ossia del raggio. Supposto allora che i due condensatori abbiano a comune b e d, e che R e nR sieno i rispettivi raggi, avremo per i due valori di λ:

$$\lambda_{\mathrm{R}} = \frac{d}{\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)}{e\,d^2} + \log \mathrm{R} + \frac{b}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\},$$

$$\lambda_{n\mathrm{R}} = \frac{d}{\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)}{e\,d^2} + \log n\mathrm{R} + \frac{b}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\},$$

dalle quali, sottraendo, si ricaverà subito:

$$\lambda_{n\mathrm{R}} - \lambda_{\mathrm{R}} = \frac{d}{\pi}(\log n\mathrm{R} - \log \mathrm{R}) = \frac{d}{\pi}\log n. \tag{7}$$

Cioè, l'aumento dell'influenza degli orli con l'aumentare del raggio di un condensatore circolare è, a parità di tutti gli altri elementi, proporzionale al logaritmo neperiano del rapporto del nuovo al vecchio valore del raggio.

Per la correzione della capacità si ha analogamente:

$$C_{a_R} = \frac{R}{2\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)}{e\,d^2} + \log R + \frac{b}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\},$$

$$C_{a_{nR}} = \frac{nR}{2\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)}{e\,d^2} + \log nR + \frac{b}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\},$$

e sottraendo, dopo avere diviso per n la seconda espressione:

$$\frac{C_{a_{nR}}}{n} - C_{a_R} = \frac{R}{2\pi}\}\log nR - \log R\{ = \frac{R}{2\pi}\log n,$$

e quindi

$$C_{a_{nR}} = n\,C_{aR} + \frac{nR}{2\pi}\log n. \tag{8}$$

E poichè $\lambda_{nR} - \lambda_R$ e $C_{a_{nR}} - C_{a_R}$ sono rispettivamente indipendenti, l'una dallo spessore e dal raggio, l'altra dallo spessore e dalla distanza, vuol dire che gli incrementi della larghezza della striscia addizionale sono indipendenti, a parità di rapporto fra i raggi, dal valore dei raggi stessi e della grossezza; e quelli della correzione della capacità, sempre a parità dello stesso rapporto, sono indipendenti dalla grossezza e dalla distanza dei piatti.

6. Ponendo nella (4) $b = 0$, il che equivale a trascurare la grossezza del disco, si ha l'espressione:

$$\frac{R^2}{4d} + \frac{R}{2\pi}\log\frac{8\pi R}{ed}, \tag{9}$$

che ha la stessa forma di quella data dal Clausius. Essa esprime la capacità del disco quando la grossezza è infinitesima.

Applichiamo la (5) e la (6) al disco circolare per il quale $R = 15$ cm., $b =$ cm. 0,5, e facciamo successivamente $d =$ cm. 0,05 e $d =$ cm. 1. Si hanno allora, rispettivamente, per la larghezza della striscia addizionale e per la correzione della capacità, i seguenti valori:

per $d =$ cm. 0,05: $\lambda =$ cm. 0,16921; $C_a =$ cm. 25,381;
per $d =$ cm. 1: $\lambda =$ cm. 1,76909; $C_a =$ cm. 13,268.

La prima correzione equivale all'aggiunta di una parte su 44,324; la seconda, all'aggiunta di una parte su 4,239. Usando la formola ridotta (9) si avrebbe, rispettivamente, per le stesse distanze:

$\lambda =$ cm. 0,12618; $C_a =$ cm. 18,927;
$\lambda =$ cm. 1,57005; $C_a =$ cm. 11,775.

Com'è naturale, i valori ricavati dalla (8) sono notevolmente inferiori a quelli ottenuti dalle (5) e (6). Le correzioni della (9) equivalgono infatti all'aggiunta di una parte su 54,440 ed a quella di una parte su 4,777. Però,

malgrado che in essa non figuri la grossezza, dà dei risultati superiori a quelli ottenuti nella I Nota dalla formola di Thomson, che considera invece la grossezza del disco come un elemento principale. Infatti, per $d =$ cm. 0,05, la formola di Thomson conduce solo alla correzione di una parte su 106, mentre la (9) ne aggiunge una su 54 e la (8) una su 44.

7. Per la verifica delle formole e delle proposizioni e regole ricavate, si dovrà forzatamente nella maggior parte dei casi ricorrere all'uso dell'anello di guardia, e fare il confronto tra la capacità del disco quando è circondato dall'anello e quella dello stesso disco quando invece ne è privo.

Ora, se l'artificio dell'anello di guardia creasse, come si ammette in pratica, una distribuzione elettrica uniforme sulla superficie del disco, allora quel confronto riuscirebbe assai facilitato e la capacità del disco, quando esso fosse munito di anello, dovrebbe essere rigorosamente la stessa, sia che venisse ricavata dall'esperienza, sia che fosse dedotta dal calcolo delle sue dimensioni. Ma, purtroppo, la distribuzione elettrica non è in vicinanza del taglio perfettamente uniforme, e la influenza del bordo, pure essendo di molto ridotta, non può dirsi del tutto annullata. Lo spazio d'aria situato fra il disco e l'anello crea una disuguaglianza nella distribuzione, e se anche si suppone, come si fa sovente, che l'anello sia foggiato in modo da costituire un vero e proprio vaso cilindrico conduttore, si potrà benissimo ritenere che sulla faccia interna del disco non si trovino cariche elettriche dal momento che il disco e l'anello formano un vaso quasi completamente chiuso e tutto allo stesso potenziale; ma non potremo bensì trascurare *a priori* la magggiore carica, sia pur debole, esistente sull'orlo considerato come spigolo e come superficie laterale in presenza di un'altra allo stesso potenziale.

Occorrerà quindi formarsi un'idea della grandezza di questa perturbazione, e vedere come essa varii con la larghezza del taglio e con la distanza del disco dal grande piatto.

Ed è ciò che farò in una Nota successiva, valendomi delle formole di Maxwell, di J. J. Thomson e di Kirchhoff.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1904 e nell'estate del 1905.* Nota di Ciro Chistoni, presentata dal Socio P. Blaserna.

In una precedente Nota [1] ho esposto tutto ciò che si riferisce alla stazione di osservazione col pireliometro Ångström a compensazione elettrica

[1] *Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1902 e nell'estate del 1903* (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. XV, 1° sem. 1906, pag. 208-213).

sul Monte Cimone. Negli anni 1904 e 1905 si fece uso del pireliometro n. 39 *bis*, per mezzo del quale si calcola Q (intensità della radiazione espressa in gr. cal. per min. e cm²) mediante la relazione $Q = 29{,}0 i^2$ dove i è la intensità della corrente elettrica compensatrice espressa in Amp. L'amperimetro del quale si fece uso è il S. H. 53352 con derivazione 12320.

Il pireliometro n. 39 *bis* (¹) è stato uno dei primi costruiti colle striscie di manganina, per modo che il coefficiente che moltiplica i^2 per ottenere Q riesce indipendente dalle variazioni di temperatura.

Le ore sono espresse in tempo medio dell'Europa centrale ed

h = altezza media del sole durante il tempo dell'osservazione,
B = pressione barometrica a 0° diminuita di 500 mm.,
t = temperatura dell'aria,
f = forza elastica del vapore acqueo contenuto nell'atmosfera,
u = umidità relativa dell'atmosfera.

L'estate 1904 si prestò per ottenere degli importanti e numerosi risultati; tutt'altro che favorevole è stata l'estate del 1905, che fu relativamente assai nuvolosa.

Non si creda che avendo io dovuto lasciare il Cimone ai primi di agosto del 1905 per recarmi ad Alcalà de Chisbert ad osservare l'eclisse totale di sole del 30 agosto, le osservazioni pireliometriche sul Cimone siano state trascurate. Aveva già da tempo addestrate alle misure due persone di mia fiducia, l'ing. Videmari dell'Osservatorio meteorologico di Sestola e il sig. G. Giacomozzi macchinista dell'Istituto fisico della R. Università di Modena. Il Cimone dal 17 luglio a tutto il 31 agosto non è mai stato abbandonato, e se le osservazioni pireliometriche non si fecero, dipese unicamente dalla cattiva stagione.

Aveva già tutto disposto perchè si facessero continue misure durante l'eclisse parziale di sole del 30 agosto (²), e l'ing. Videmari che in tale giorno si era prestato a sostituire il Giacomozzi (che alla sua volta scese a Sestola e potè eseguire alcune determinazioni) riuscì a fare una sola misura alle $9^h{,}18^m$. Da quell'ora la nebbia portata dal vento forte, non permise di tentare altre misure pireliometriche.

(¹) *Sul pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XIV, 1° sem. 1905, pp. 340-346 e pp. 451-456).

(²) Il mio amico M. Rajna professore di astronomia nella R. Università di Bologna, aveva già calcolati i dati necessari, per conoscere le ore (in tm. dell'Europa Centrale) del principio, della fase massima e della fine dell'eclisse corrispondenti al Cimone. E precisamente il principio doveva avvenire a $13^h, 11^m{,}5$; la fase massima (0,82) alle $14^h\ 27^m{,}8$ e la fine a $15^h, 38^m{,}8$.

Monte Cimone 1904

Giorno	Ora	*h*	*i*	Q	B 500+	*t*	*f*	*u*	*Annotazioni*
	h m	o							
17 luglio	8.23	46,5	0,211	1,291	94,3	12,0	7,9	75	Bianchiccio; caligine bassa
» »	11.23	63,9	0,220	1,404	94,6	12,4	7,9	74	Cu vaganti; bel cielo intorno al ⊙
» »	12.23	67,1	0,222	1,429	95,1	12,8	8,4	77	Id.
» »	14.23	56,3	0,216	1,353	94,5	13,2	7,5	66	Id.
» »	15.23	46,5	0,218	1,378	94,2	13,0	7,9	70	Id.
18 »	8.23	35,8	0,206	1,230	92,6	12,5	5,7	52	Str. all'orizzonte; bianchiccio
» »	9.23	46,4	0,207	1,243	92,6	12,6	5,6	51	Str. Cu vaganti
» »	10.23	56,1	0,210	1,278	92,7	13,0	5,7	51	Sereno
» »	11.23	63,8	0,210	1,278	92,9	13,2	5,5	51	Id.
» »	12.23	66,9	0,221	1,417	92,8	13,4	7,4	65	Id.
» »	13.23	63,8	0,213	1,316	92,6	13,5	7,3	63	Cu all'orizzonte
» »	14.23	56,1	0,210	1,278	92,4	13,6	7,5	64	Id.
» »	15.23	46,4	0,205	1,219	92,2	13,8	7,1	61	Sereno
» »	16.23	35,8	0,198	1,137	92,0	13,8	7,8	65	Bianchiccio; Cu sparsi
19 »	8.23	35,7	0,204	1,207	90,1	12,8	5,8	53	Bianchiccio; caligine bassa
» »	9.23	46,3	0,210	1,278	90,1	13,3	7,5	65	Bello intorno al ⊙; Cu vaganti
» »	10.23	56,0	0,214	1,328	90,0	13,6	7,8	66	Id.
» »	12.23	66,7	0,219	1,391	89,8	13,8	5,2	44	⊙ libero; Ni con pioggia sulle Alpi Apuane
» »	13.23	63,6	0,218	1,378	89,9	14,0	4,8	40	⊙ libero in bel cielo; caligine bassa
» »	14.23	56,0	0,215	0,341	89,3	14,0	5,0	41	Id. e vento forte da NNW
» »	15.23	46,3	0,214	1,328	89,3	14,6	5,7	46	Id.
» »	16.23	35,7	0,207	1,243	89,1	14,8	5,8	46	Cu vaganti; vento forte
20 »	9.23	46,2	0,219	1,391	89,5	12,4	5,8	53	Lucido intorno al ⊙; caligine bassa
» »	10.23	55,8	0,219	1,391	89,6	12,6	5,9	53	Sereno
» »	11.23	63,4	0,219	1,391	89,9	13,2	4,6	39	Id.
» »	12.23	66,5	0,220	1,404	90,1	13,5	8,1	71	⊙ libero; Cu sparsi
» »	13.23	63,4	0,214	1,328	90,1	13,6	7,3	63	Id.
» »	16.23	35,6	0,202	1,183	90,2	14,0	8,7	73	Id.
» »	17.23	24,9	0,193	1,080	90,2	13,5	8,1	71	Sereno
21 »	8.23	35,5	0,207	1,243	91,9	14,0	3,6	29	Caligine bassa; ⊙ con lieve aureola
» »	9.23	46,0	0,209	1,267	92,1	14,2	3,3	26	Caligine bassa; ⊙ libero
» »	10.23	55,7	0,213	1,316	92,4	14,2	5,2	42	Id.
» »	11.23	63,3	0,214	1,328	92,5	14,7	5,9	48	Qualche Cu all'orizzonte
» »	12.23	66,3	0,214	1,328	92,6	15,0	7,5	60	Cu vaganti vicino al ⊙
» »	14.23	55,7	0,210	1,279	92,5	15,3	8,6	67	Id.
» »	16.23	35,5	0,200	1,160	92,6	15,3	8,8	68	Bianchiccio
» »	17.23	24,8	0,191	1,058	92,2	15,0	8,8	70	Str. Cu sparsi
22 »	9.23	45,9	0,210	1,279	92,6	14,2	10,4	88	⊙ con aureola; Cu e Str. all'orizzonte
27 »	8.23	34,7	0,196	1,114	88,4	12,8	5,5	50	⊙ libero; Cu all'orizz. da E a S e ad W; nebbia sulle Alpi. Si vedono distintamente ad occhio nudo Modena, Reggio e Parma

Monte Cimone 1904

Giorno		Ora	h	i	Q	B 500+	t	f	u	Annotazioni
		h m	°							
27	luglio	9.23	45,1	0,203	1,195	88,4	13,0	6,0	54	⊙ libero; cielo un po' più offuscato verso N.
28	"	8.23	34,5	0,199	1,149	89,0	11,5	6,2	60	⊙ libero; cielo id. con veli sparsi
"	"	9.23	45,0	0,206	1,231	89,2	12,0	6,5	62	Id.
"	"	10.23	54,5	0,210	1,279	89,2	12,6	6,6	61	Veli vaganti intorno al ⊙; grossi Cu a S.
30	"	8.23	34,2	0,207	1,243	92,0	8,8	6,8	81	Orizz. caliginoso; qualche velo vagante; aureola intorno al ⊙
"	"	9.23	44,7	0,205	1,219	92,1	9,2	7,3	83	⊙ fra veli; Cu vaganti.
31	"	8.23	34,1	0,211	1,291	93,6	11,4	4,5	43	Nebbia rara all'orizz. S; ⊙ libero in campo lucido
"	"	9.23	44,5	0,226	1,481	93,9	11,6	6,0	58	⊙ in campo lucido; Str. Cu a NW lontanissimi
"	"	10.23	54,0	0,235	1,601	94,0	11,9	5,8	56	⊙ in campo lucido; Id. qualche velo fra i Cu orizzonte nebbioso
"	"	11.23	61,3	0,214	1,328	94,3	12,0	6,2	60	Qualche velo intorno al ⊙
"	"	12.23	64,2	0,216	1,353	94,3	12,4	6,0	56	Veli in prossimità del ⊙; il resto del cielo sereno
"	"	14.23	54,0	0,210	1,279	94,6	13,2	6,0	53	Bianchiccio; Ci vaganti
1	agosto	8.23	33,9	0,204	1,207	94,6	12,8	6,5	58	⊙ libero; orizzonte caliginoso
"	"	9.23	44,3	0,209	1,267	94,6	13,3	6,5	58	Sereno
"	"	10.23	53,8	0,224	1,455	94,7	13,6	7,0	61	Id.
"	"	12.23	63,9	0,236	1,615	94,9	14,2	7,0	60	Lucido intorno al ⊙; Cu sparsi all'orizzonte
4	"	11.23	60,3	0,213	1,316	94,9	9,7	6,1	68	Bianchiccio; qualche Cu all'orizzonte S.
"	"	12.23	63,2	0,214	1,328	95,2	9,9	6,8	73	Cu in vicinanza del ⊙; bianchiccio.
"	"	13.23	60,3	0,214	1,328	95,2	10,4	6,8	74	Biancastro; qualche Cu all'orizzonte
"	"	15.23	43,8	0,207	1,243	95,1	10,6	6,8	73	Id.
"	"	16.23	33,4	0,198	1,137	96,0	10,8	7,2	73	Biancastro; Cu erranti.
5	"	8.23	32,2	0,203	1,195	93,6	11,9	4,0	37	Bianchiccio
"	"	9.23	43,6	0,216	1,353	93,7	11,6	4,5	43	Id.
"	"	10.23	53,0	0,218	1,378	93,9	12,2	4,6	43	Id.
"	"	11.23	60,1	0,217	1,366	94,0	12,3	5,0	44	Id.
"	"	12.23	62,9	0,216	1,353	93,9	12,7	6,2	55	Id. nebbia all'orizzonte
"	"	13.23	60,1	0,196	1,114	94,0	13,0	6,6	58	⊙ con aureola; Cu all'orizzonte Sud
"	"	14.23	53,0	0,207	1,243	94,0	12,7	7,3	68	Aureola; Cu prossimi al ⊙
"	"	15.23	43,6	0,207	1,243	93,9	12,9	6,8	61	Aureola; Cu all'orizzonte Sud
"	"	16.23	32,2	0,196	1,114	93,7	13,6	6,3	55	Aureola; Cu a Sud ed in prossimità del ⊙
6	"	8.23	33,0	0,202	1,183	94,4	11,8	6,4	62	Bianchiccio
"	"	9.23	43,4	0,211	1,291	94,8	12,2	6,7	63	Id.
"	"	10.23	52,7	0,212	1,304	94,9	12,5	7,2	67	⊙ con leggera aureola
7	"	8.23	32,8	0,206	1,231	96,0	13,0	6,4	57	Ci. Str. verso Sud; ⊙ libero
"	"	10.23	52,5	0,212	1,304	96,2	14,2	6,4	52	⊙ libero; Cu e veli sparsi
"	"	11.23	59,6	0,213	1,316	96,2	14,6	7,4	60	Id.
8	"	8 23	32,6	0,203	1,195	95,0	14,0	9,2	78	Orizzonte caliginoso
"	"	9.23	43,0	0,210	1,279	95,1	14,2	10,8	84	Id.
"	"	10.23	52,3	0,210	1,279	95,3	14,8	9,7	78	Id.

Monte Cimone 1904

Giorno		Ora	*h*	*i*	Q	B 500+	*t*	*f*	*u*	*Annotazioni*
		h m	°							
8	agosto	11.23	59,3	0,215	1,341	95,4	14,8	9,7	78	Orizzonte caliginoso; qualche Cu vagante
»	»	12.23	62,1	0,215	1,341	95,3	15,0	10,4	83	Id. e qualche velo
9	»	8.22	32,5	0,209	1,267	92,4	15,2	5,3	42	⊙ in campo lucido; orizzonte fosco
»	»	9.22	42,8	0,220	1,403	92,5	15,5	7,5	58	Id.
»	»	10.22	52,1	0,224	1,455	92,6	15,6	8,8	67	Id.
»	»	11.22	59,1	0,228	1,508	92,6	15,8	10,6	81	Id. e veli all'orizzonte
»	»	12.22	61,8	0,233	1,574	92,5	15,9	10,8	82	⊙ in campo bello; Cu vaganti
10	»	8.22	32,3	0,210	1,279	89,1	14,2	8,1	68	⊙ libero; orizz. nebbioso e pieno di grossi Cu
»	»	9.22	42,6	0,216	1,353	89,0	14,5	8,1	66	Id.
12	»	9.22	42,2	0,209	1,267	91,1	13,4	7,4	64	⊙ libero; caligine e Str. all'orizzonte
»	»	10.22	51,4	0,216	1,353	91,2	14,2	5,5	45	⊙ libero; caligine e Cu all'orizzonte
»	»	11.22	58,2	0,217	1,366	91,6	14,4	8,3	68	Il ⊙ è circondato da Str. Cu
13	»	8.22	31,6	0,206	1,231	93,3	14,5	9,1	75	Caligine all'orizzonte
»	»	9.22	41,9	0,210	1,279	93,5	14,4	9,5	77	Veli intorno al ⊙
14	»	8.22	31,5	0,206	1,231	93,6	11,4	6,3	62	Aureola
»	»	9.22	41,7	0,210	1,279	93,8	11,8	6,3	60	Id. caligine all'orizzonte
»	»	10.22	50,8	0,216	1,353	94,2	12,1	7,0	67	Cu vaganti
»	»	11.22	57,7	0,218	1,378	94,3	12,5	4,9	45	Id.
»	»	12.22	60,3	0,217	1,366	94,6	13,0	5,7	51	Cu-Ni all'orizzonte
18	»	8.21	30,6	0,207	1,243	89,8	14,6	7,0	56	Sereno; un po' di nebbia all'orizzonte
»	»	9.21	40,8	0,211	1,291	89,7	14,8	8,8	71	Qualche velo vagante; vento sentito da SW
»	»	10.21	49,8	0,216	1,353	89,7	16,0	9,4	68	Qualche velo intorno al ⊙; vento forte da SW
»	»	11.21	56,5	0,214	1 328	88,5	15,4	8,4	64	Veli intorno al ⊙; il vento è debole da SW
19	»	8.21	30,3	0,201	1,172	88,3	12,8	7,7	70	Bianchiccio; caligine bassa; calma.
»	»	9.21	40,5	0,214	1,328	88,7	13,6	8,7	75	⊙ libero contornato da Cu e veli

Monte Cimone 1905

27	luglio	11.23	62,8	0,221	1,417	92,2	13,0	7,6	69	Sereno
»	»	12.23	65,1	0,222	1,429	92,4	13,0	8,6	79	Id.
»	»	13.23	62,1	0,221	1,417	92,4	12,4	7,9	75	⊙ libero; Cu vaganti
»	»	15.23	45,2	0,214	1,328	92,3	14,0	8,3	72	Id.
»	»	17.23	23,9	0,202	1,183	92,3	14,0	9,4	83	⊙ in plaga lucida; Cu vaganti
28	»	9.23	45,0	0,219	1,391	91,4	11,6	7,8	78	Caligine e Cu all'orizzonte; Cu vaganti
4	agosto	10.23	53,2	0,221	1,417	91,0	12,8	7,5	70	⊙ libero; Str.-Cu all'orizzonte
5	»	9.23	43,6	0,215	1,341	90,5	13,4	8,3	75	Leggera aureola; Cu e Str all'orizzonte
»	»	10.23	53,0	0,217	1,366	90,6	14,0	6,9	59	Id.
»	»	11.23	60,1	0,221	1,417	90,6	14,2	6,5	55	⊙ libero; Cu e Str all'orizzonte

MONTE CIMONE 1905

Giorno	Ora	h	i	Q	B 500 +	t	f	u	*Annotazioni*
	h m	°							
9 agosto	8.22	32,5	0,216	1,353	94,3	11,6	7,4	75	⊙ libero; caligine bassa; calma
" "	9.22	42,8	0,217	1,366	94,5	11,6	7,9	80	Id.
" "	10.22	52,1	0,220	1,404	94,6	11,8	7,3	71	Id.
10 "	8.22	32,3	0,217	1,366	92,0	12,0	6,7	65	Id.
11 "	15.22	42,3	0,208	1,254	91,0	14,4	7,6	64	Aureola; vento forte da SW
" "	16.22	32,1	0,191	1,058	90,8	13,4	5,3	47	Id.
12 "	9.22	42,2	0,211	1,291	86,7	10,4	6,8	73	Aureola; Cu all'orizzonte
19 "	9.21	40,3	0,220	1,404	91,3	9,0	6,8	80	⊙ libero; calma, orizzonte caliginoso
" "	10.21	49,5	0,222	1,429	91,7	9,2	6,8	79	⊙ libero, orizzonte caliginoso; nebbia vagante sotto il cono del monte.
" "	11.21	56,2	0,224	1,455	91,9	9,6	6,7	76	Id. la nebbia si è fatta più alta
23 "	10.20	48,4	0,204	1,207	91,9	13,4	8,0	70	Bianchiccio; aureola
" "	11.20	54,9	0,206	1,230	91,7	13,6	8,5	78	Bianchiccio; caligine all'orizzonte; Cu bassi
24 "	10.20	48,1	0,210	1,278	90,3	12,8	8,3	77	⊙ libero, nebbia bassa; Str
25 "	9.19	39,0	0,212	1,303	90,1	12,4	9,3	90	Id.
" "	10.19	47,8	0,218	1,378	90,2	13,0	9,0	83	⊙ libero; qualche velo vagante
30 "	9.18	37,7	0,220	1,404	81,7	7,4	3,8	50	Biancastro; aureola.

Elettrochimica. — *Sopra la formazione elettrolitica degli iposolfiti.* Nota di M. G. LEVI e M. VOGHERA, presentata dal Corrispondente R. NASINI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Sulla scheelite di Traversella.* Nota del dott. LUIGI COLOMBA [1], presentata dal Socio G. STRUEVER.

Dalle ricerche di Max Bauer [2] e di von Rath [3] risulta per i cristalli di scheelite di Traversella una importanza molto limitata, sia per la scarsità delle forme osservate, sia per la impossibilità di ottenere, in causa del loro cattivo stato, delle buone misure goniometriche. Invero le sole forme osservate dai predetti autori furono le seguenti:

111, 112, 114, 101, 102, 205, 105, 100, 131

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Mineralogico della R. Università di Torino.

[2] *Krystallographische Untersuchung des Scheelits.* Jahresheft. Württ. Naturwiss. Gesellsch. 1871 (Estratto).

[3] Sitz. ber. d. Niederrh. Gesellsch. in Bonn, 1882 (Estratto).

le quali tutte, ad eccezione delle 114 e 205 riconosciute da von Rath, furono determinate da Bauer; Dana [1] dà pure fra le forme osservate da quest'ultimo autore la 113; però, quantunque essa sia realmente molto comune a Traversella, non risulta affatto che la sua presenza in detta località sia stata notata da Bauer.

Tolta la 205, tutte le precedenti forme erano già note nella scheelite; l'aspetto dei cristalli esaminati era poi da considerarsi certamente come molto cattivo poichè, mentre Bauer si limitò a riferire alcune misure ottenute col goniometro di applicazione, von Rath determinò il simbolo 205 della nuova forma partendo esclusivamente dalla legge delle zone.

Questa mancanza di interesse è però solo costante nei cristalli che si hanno negli strati cloritici, talcosi e serpentinosi che formano il contatto dei giacimenti di Traversella con i micaschisti che parzialmente li includono; quivi invero i cristalli, molto poveri di facce, sono generalmente privi di lucentezza ed inadatti ad ogni misura. Essa non si avvera più quando si tratta dei cristalli che molto diffusamente si incontrano dove i giacimenti presentano la caratteristica alternanza degli strati di dolomite o di magnetite, almeno in modo tanto assoluto, poichè quivi non è raro il caso di incontrarne taluni, e ciò avviene specialmente quando hanno piccole dimensioni, che presentano una più che discreta nitidezza di facce e che sono più ricchi in forme che non quelli studiati da Bauer e da von Rath, osservandosi in essi non solo la presenza di altre forme già note nella scheelite ma non ancora osservate a Traversella, ma pur anche di forme del tutto nuove.

Però non tutte le facce che, oltre a quelle più comuni, compariscono in questi cristalli, presentano dei caratteri analoghi, poichè mentre per alcune riesce facile di identificarle in modo completo dal lato cristallografico, altre ve ne sono che invece presentano un aspetto singolare, avendo sempre un grado più o meno elevato di asimmetria rispetto agli elementi fondamentali dei cristalli su cui sono segnate, e degno di nota è il fatto che a questo tipo sembrano anche appartenere delle facce che per la loro giacitura dovrebbero riferirsi a forme nettamente determinabili. Lo studio di queste facce anormali è certamente molto interessante, anche se si volessero semplicemente far dipendere da fenomeni di poliedria, sia per quanto riguarda la loro posizione, sia per ciò che si riferisce alle cause che ne poterono determinare la comparsa; riserbandomi di completare gli studi da me iniziati a questo scopo, mi limito per ora a riferire i risultati da me ottenuti rispetto a quelle forme che erano sicuramente riconoscibili.

Esse sono le seguenti:

Forme già note nella scheelite di Traversella: 111, 114, 101, 102, 205, 131, 100;

Forme nuove per la località: 113, 313, 120, 001;

[1] System of Mineralogy, 1892, pag. 986.

Forme nuove per la scheelite in generale: 232, 323*, 756, 714, 735, 21 1 11*, 885, essendo quelle segnate da asterisco da considerarsi come meno certe delle altre in causa dei valori angolari poco buoni ottenuti.

Dal novero delle forme già indicate da Bauer ho escluso la 112 e la 105, forme che del resto anche secondo il detto autore dovevano considerarsi come eccezionalmente rare a Traversella, avendole egli osservate una sola volta per ognuna; io le esclusi perchè, sebbene abbia realmente notato delle facce che per la loro posizione sembravano avvicinarsi ai detti simboli ed in modo speciale al primo, esse erano sempre riferibili a quel tipo anormale di facce dianzi accennato.

Per quanto riguarda le forme già descritte dai predetti autori mi limito a riferire di esso i valori angolari da me ottenuti dei quali alcuni, in causa del cattivo stato delle facce osservate, distano assai da quelli teorici; essi sono riportati nel seguente quadro in confronto a quelli teorici corrispondenti calcolati ponendo $c = 1{,}5356$.

Angoli misurati	Valori estremi:	Valori medî:	Valori teorici: ($c = 1{,}5356$).	Numero degli spigoli misurati:
111 . 11$\bar{1}$	49°10′-49°57′	49°27′	49°27′	9
111 . $\bar{1}$11	79°30′-80°12′	79°52′	79°55′	9
111 . $\bar{1}\bar{1}$1	130°20′-130°32′	130°26′	130°33′	2
111 . 1$\bar{1}\bar{1}$	100°3′	—	100° 5′	1
111 . 101	39°40′-40°8′	39°51′	39°58′	6
101 . 011	72°23′	—	72°40′	1
111 . 131	28°11′-28°27′	28°19′	28°21′	2
11$\bar{1}$. 131	44°29′	—	44°56′	1
101 . 131	27°21′	—	27°17′	1
111 . 102	74°58′	—	75° 2′	1
102 . $\bar{1}$02	43°42′	—	43°38′	1
111 . 114	37°21′	—	37°46′	1
101 . 205	25°54′	—	25°22′	1

Nessuna misura attendibile potei ottenere per il prisma 100, sebbene in molti cristalli abbia potuto accertarmi della sua presenza.

Tra le forme già note nella scheelite in generale, ma non osservate ancora a Traversella, la più comune è la 113, la quale in alcuni cristalli si presenta con belle facce le quali permettono delle misure abbastanza esatte:

111 . 113	valori trovati	29°24′-29°25′	valore teorico	29°23′
113 . $\bar{1}\bar{1}$3	» »	71°45′-71°46′	» »	71°48′

Molto meno frequente è la 313; mi occorse di incontrarla in alcuni cristalli di tinta rosso ranciata e rosso brunastra e nei quali era sempre ben

distinta la 101; in essi le facce 313 comparivano sotto forma lineare ed in molti casi erano talmente striate da non poter ottenere che misure approssimative; però due cristalli di tinta rosso bruna mi permisero di avere dei valori angolari abbastanza precisi:

111 . 313	valori trovati	24°19′-24°21	valore teorico	24°-22′
101 . 313	» »	15°32′	» »	15°36′

La 120 è poco frequente ed ancora nella massima parte dei casi ha le facce assolutamente inadatte ad ogni misura; tuttavia in alcuni piccoli cristallini, alti poco più di mezzo centimetro, osservai delle facce discretamente speculari ed in uno ottenni i seguenti valori:

120 . 111	valore trovato	30° 7′	valore teorico	30°35′
120 . 101	» »	41°58′	» »	41°27′

Rarissima è la 001; la incontrai in un solo cristallo che presentava la combinazione 111, 101, 113, 102, 001 (fig. 1) e nel quale, mentre le

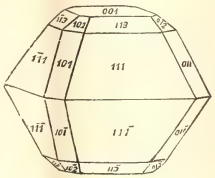


Fig. 1

facce 111 e 101 erano striate, invece si mostravano molto nitide le 113, 102, 001 dalle quali ricavai le seguenti misure:

113 . 001	valore trovato	35°53′	valore teorico	35°54′
102 . 001	» »	37°24′	» »	37°32′

Le forme da me osservate del tutto nuove nella scheelite debbono considerarsi come molto rare; dei sei emidiottaedri, due e precisamente la 323 e la 232 appartengono alle note zone costituite da coppie di facce come 131, 111; $3\bar{1}\bar{1}$, $\bar{1}11$ ed alle quali appartengono pure le facce della 313; gli altri appartengono invece alle altre zone costituite ancora dalle facce della 131 e da quelle della 111 e determinate da coppie di facce come 131, $\bar{1}11$; $3\bar{1}\bar{1}$, 111 e nelle quali fino ad ora non si conoscevano forme ben determinate avendo solo Bauer osservato in un cristallo di Traversella una forma indeterminabile giacente in essa.

È degno di nota poi il fatto che nello stesso cristallo Bauer aveva pure osservato un'altra forma indeterminabile giacente nelle zone prima accennate

e che probabilmente è da identificarsi con la 232 da me osservata, essendo essa, come risulta dalle figure di Bauer, compresa fra le facce della 131 e quelle della 111.

Osservai la 323 in alcuni cristalli bruno rossastri nei quali era pure presente la 313; essa era sotto forma di facce lineari molto striate; in un cristallo che mostrava la combinazione 111, 101, 313, 323, 131 (fig. 2) ottenni per essa la seguente misura approssimativa:

322 . 101 valore trovato 29°-29°30′ valore teorico 29°12′

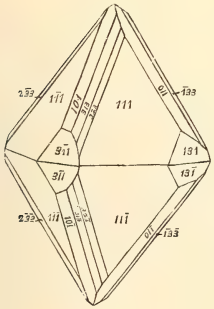


Fig. 2.

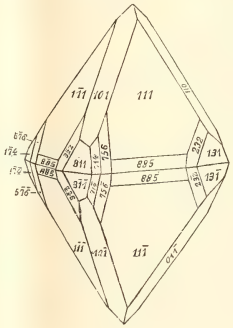


Fig. 3.

Osservai invece la 232 in alcuni cristalli giallognoli e fra questi in modo molto evidente in uno che presentava la combinazione 111, 101, 131, 885, 714, 756 e rappresentato dalla fig. 3; questo cristallo, alto poco più di 7 od 8 millimetri, era incompleto, mancando in esso le parti terminali; tuttavia sebbene molte delle sue facce fossero poco nitide, alcune se ne osservavano sufficientemente speculari.

La 232 appariva sotto forma di faccettine addossate alla 131; da una ottenni la misura seguente:

232 . 111 valore trovato 11°18′ valore teorico 11°32′

Le 756 e 714 erano sotto forma di faccettine lineari addossate pure alla 131 ma dalla parte opposta della 232; i loro simboli furono ricavati dalle seguenti misure:

756 . 111	valore trovato	8°34′	valore teorico	8°36′
714 . 111	» »	34° 7′	» »	34°15′

L'ottaedro 885, presente solamente nel detto cristallo, si presentava con faccette lineari sottostanti alle 111; esse mi diedero le seguenti misure:

885 . 111	valori trovati	8°33′- 8°45′	valore medio	8°40′	valore teorico	8°34′
885 . 88$\bar{5}$	" "	73°49′-75°58′	" "	73°53′	" "	73°50′

La 735 fu osservata in un solo cristallo che presentava la combinazione 111, 101, 735 essendo terminato da alcune di quelle facce anormali a cui già accennai; la 21 1 11 si osservava in due cristalli della combinazione 111 . 101 . 21 1 11 di cui uno era dotato di facce sufficientemente speculari. I valori angolari trovati sono i seguenti:

735 . 111	valore	trovato	19°42′	valore	teorico	59°56′
735 . 1$\bar{1}$1	"	"	61°20′	"	"	61°27′
21 . 1 11 . 111	"	"	40°33′	"	"	40°22′
21 1 11 . 1$\bar{1}$1	"	"	45°-45°30′	"	"	44°27′

Malgrado la discreta corrispondenza del primo dei valori riguardanti la 21 1 11, considero questa forma come incerta in causa della sensibile differenza fra il valore teorico dell'altro angolo e quello ottenuto a semplice bagliore, non permettendomi essa di affermare in modo sicuro che la detta forma sia nella zona 3$\bar{1}$1 . 111; in quanto alla 323, la cattiva misura ottenuta dipendeva dalla grande diffusione presentata su di essa dalle immagini.

Nella tabella dei valori angolari ottenuti per le forme già note e più comuni della scheelite di Traversella, si osserva che pur essendo i valori medî assai prossimi ai teorici, i valori estremi oscillano entro limiti assai estesi; il che se in parte può dipendere dal non essere le facce sufficientemente nitide, in parte credo derivi da vere variazioni nel valore delle costanti cristallografiche.

Invero in molti casi osservai che le dette differenze erano collegate con le differenze di tinta che frequentemente si notano nei cristalli di Traversella; fra i numerosissimi cristalli da me esaminati, ne trovai alcuni, di tinte differenti, i quali per la nitidezza delle loro facce si prestavano molto bene ad ottenere delle misure angolari molto precise e tali da poter essere impiegate per determinare il valore di *c*; il che rivestiva un certo interesse per il fatto che corrispondendo alle diverse tinte delle differenze nella composizione chimica, queste determinazioni potevano essere utili in confronto con l'ipotesi di Traube [1] secondo la quale vi sarebbero nella scheelite delle variazioni nel valore di *c* in rapporto delle proporzioni in cui l'acido molibdico, spesso presente nella scheelite, entra a sostituire l'acido tungstico.

I cristalli da me impiegati a questo scopo appartenevano alle varietà incolora, giallo ranciata, bruno verdiccia e bruno rossastra; esse vennero

[1] *Ueber den Molybdän-Gehalt des Scheelits* ecc. N. Jahrb. für Miner. ecc. Beil. Bd. VII (1891) pag. 232.

analizzate seguendo il metodo di Traube e, sebbene risultassero tutte povere in acido molibdico, tuttavia in alcune notai come il detto acido fosse in proporzioni maggiori di quelle osservate da Traube, come si vede dal seguente specchio ove sono riportate le analisi del detto autore e le mie [1]:

	WO_3	MoO_3	CaO	MgO	Totali
Varietà incolora (Colomba) . . .	77,03	3,15	19,73	—	99,91
» bruno rossastra (Colomba) .	77,35	2,46	18,33	1,67	99,81
» giallo grigiastra (Traube) .	78,57	1,62	19,37	—	99,56
» bruno verdiccia (Colomba).	78,75	1,47	19,23	0,55	100,00
» giallo miele (Traube) . .	79,68	0,76	19,29	—	99,73
» giallo ranciata (Colomba) .	79,68	0,72	19,43	tr.	99,83

Le varietà che meglio potei utilizzare per la determinazione della costante cristallografica, furono l'incolora e la bruno verdiccia; dai cristalli giallo miele e bruno rossastri non potei ricavare dei valori molto esatti in causa della costante diffusione presentata dalle immagini.

Cristalli incolori:

1). $111 . 11\bar{1} = 49°21\text{-}49°22$; media $49°21'30''$; $c = 1,5397$
» $101 . 10\bar{1} = 65°39'$ $c = 1,5403$
2). $111 . 11\bar{1} = 49°20'\text{-}49°21'$; » $49°20'30''$; $c = 1,5394$

Cristalli bruno verdicci:

1). $113 . 001 = 35°53'$ $c = 1,5356$
» $102 . 001 = 37°29'30''$ $c = 1,5349$

Da questi valori si ricava come valore medio

$$c = 1,53778$$

poco lontano da quello dato da Dauber [2] ed assunto da Dana [3] $c = 1,5356$ e molto prossimo pure a quello desunto da Traube dall'unica misura dell'angolo 111 . 111 compiuta da von Rath [4], pari a 1,5364.

Da questi miei valori, come pure da quello ricavato dalla misura di von Rath, risulta che anche per queste varietà di schelite, si avvera il fatto già notato da Traube, della esistenza cioè di relazioni fra la presenza

[1] In tutte queste varietà, seguendo il metodo di Cossa (*Ricerche chimiche e mineralogiche su minerali e rocce d'Italia, 1881*) notai la presenza di piccole tracce di Di_2O_3 e Ce_2O_3, ma anche in quella giallo ranciata, per quanto fosse la varietà che, secondo le ricerche di Cossa, dava molto più distintamente gli spettri di assorbimento dei detti metalli, si trattava di minime tracce. Esse vennero sempre calcolate con la calce.

[2] Pogg. Ann. (1859) CVII pag. 272.

[3] System of Mineralogy (1892) pag. 985.

[4] Sitz. Ber. der Niedezzhein. Gesellsch. in Bonn (1882) (Estratto).

o no di acido molibdico nella scheelite ed il valore della sua costante cristallografica, poichè assumendo rispettivamente per la scheelite pura e per il molibdato calcico, per *c*, i valori ammessi da Traube e pari a 1,5315 e 1,5458, i valori desunti dalle misure compiute sui cristalli di Traversella sarebbero appunto intermedî fra i due sopra indicati.

Occorre però di notare come pur non negando la esistenza della relazione ammessa da Traube, non sia possibile dare ad essa un significato molto preciso nel senso che variando le proporzioni dell'acido molibdico varii nella stessa ragione il valore di *c*; poichè, come si vede dai risultati ottenuti da Traube e dai miei, si hanno nel detto valore delle oscillazioni affatto indipendenti dalle proporzioni di acido molibdico; e ciò è ancora confermato dalle osservazioni compiute da Pelloux [1] nella scheelite del Sempione, affatto priva di acido molibdico e nella quale trovò l'angolo 111 . $\bar{1}$11 pari ad 80°10′, superiore cioè a quello della stessa powellite.

La forma prevalente nei cristalli di Traversella è, come già è noto, la 111, le cui facce sono spesso striate; però oltre alle striature già osservate da Bauer, parallele agli spigoli d'intersezione delle 111 e 101 e quindi giacenti nella zona determinata da queste facce, altre se ne hanno che si presentano normali agli spigoli orizzontali della 111 e che quindi si possono considerare come giacenti nelle zone a cui appartengono le nuove forme 714 e 756, poichè appunto gli spigoli di queste zone debbono essere normali ai detti spigoli orizzontali.

Frequentissima è pure la 101, ma le sue facce hanno sempre uno sviluppo molto piccolo in confronto a quelle della 111; fatto questo che fu finora osservato, oltre che nella scheelite di Traversella, solamente in quella già citata del Sempione.

Le altre forme sono molto meno frequenti, come già dissi, ed alcune sembrano direttamente collegate col colore dei cristalli; così ad esempio le 313 e 323 si osservano esclusivamente sui cristalli di tinta rosso brunastra o rosso ranciata.

Notevole è poi il modo in cui si presentano associate le facce degli ottaedri terminali 113, 114 102, e 205. Se si considerano le due coppie di zone formate rispettivamente dalle facce 102 e dalle facce 205 con le facce laterali delle 111, come ad esempio sarebbero le zone 111 . 102 e 1$\bar{1}$1 . 102 (fig. 1) e le zone 111 . 205 e 1$\bar{1}$1 . 205 si nota come nelle prime siano comprese facce della 113 e nelle seconde facce della 114 e precisamente nei casi sopra accennati nelle zone sopra indicate saranno comprese rispettivamente le facce 1$\bar{1}$3 e 113 e le facce 1$\bar{1}$4 e 114. Ora nei cristalli di

[1] *Scheelite ed altri minerali rinvenuti in una roccia proveniente dal traforo del Sempione.* Boll. del Naturalista XXI (1901) (Estratto).

Traversella si osserva che costantemente quando è presente la 102 ad essa è associata la 113, mentre quando è presente la 205 ad essa è associata la 114.

Mai ho avuto occasione di osservare dei cristalli che fossero terminati dalle facce da un solo degli ottaedri 113, 114, 102, 205.

Non infrequentemente si notano dei cristalli che presentano una spiccata pseudosimmetria monoclina dipendente dall'anormale sviluppo di una coppia di facce opposte della 101, e fatto degno di nota si è (fig. 4) che anche quando si hanno delle altre forme associate alle 111 e 101, esse pure si

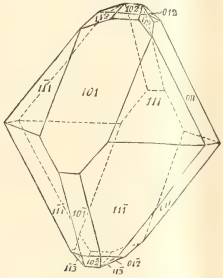


Fig. 4.

presentano anormalmente sviluppate in modo da accentuare ancora di più il tipo pseudosimmetrico dei cristalli in questione. Essi presentano in tal modo una grandissima analogia con i cristalli di wolframite, analogia che è resa più sensibile ancora dal fatto del quasi perfetto isogonismo esistente, almeno per quanto riguarda le forme più comuni, fra la zona 111 . 101 della scheelite e la zona 110 . 100 della wolframite:

Scheelite	Wolframite
111 . 101 = 39°58′	110 . 100 = 39°41′
111 . $\bar{1}$11 = 79°55′	110 . 1$\bar{1}$0 = 79°23′
212 . 101 = 22°44′	210 . 100 = 22°32′
313 . 101 = 15°36′	310 . 100 = 15°28′

Degna pure di essere ricordata è la scheelite di Traversella per quanto riguarda le sfaldature che si osservano nei suoi cristalli; invero, mentre gli autori danno come prevalente nella scheelite le sfaldature secondo 111 e 101, essendo la prima molto più facile della seconda, trascurano affatto oppure considerano come priva di ogni importanza quella secondo 001.

Invece nei cristalli di Traversella, questa si può dire è la sola che si manifesti in modo assai evidente ed anzi, pur non potendola considerare

come perfetta, è sempre molto facile, dando luogo in molti casi a facce assai nitide e speculari.

Le dimensioni dei cristalli di scheelite sono variabilissime e, sebbene raramente, possono essere molto grandi; il nostro Museo possiede un bellissimo cristallo, del peso di 650 grammi, costituito oltre che da un terzo di una delle piramidi, da tutta l'altra la quale misura un'altezza che supera i 6 centimetri. Maggiori ancora sono le dimensioni di un cristallo appartenente alla collezione mineralogica della Scuola d'applicazione degli Ingegneri; esso, pur essendo solamente costituito da una delle due piramidi e neppure completa, ha un'altezza che supera i 10 centimetri ed ha un peso uguale a kg. 1,275.

Interessante è poi, nei grossi cristalli di scheelite associati alla dolomite, la presenza di inclusioni costituite da altri piccolissimi cristalli di scheelite nitidi e completamente terminati; essi non presentano mai alcuna relazione di isorientazione con i grossi cristalli che li includono, ed anzi si hanno dei casi in cui si osserva nell' interno di un solo individuo voluminoso la presenza di più cristallini inclusi, diversamente disposti gli uni dagli altri.

Ciò lascia supporre la presenza nella scheelite di Traversella di più fasi successive e staccate di deposito, non potendosi a parer mio, in causa della costante mancanza di isorientazione fra i cristalli includenti e quelli inclusi, ammettere che si tratti di accrescimento continuo intorno ai piccoli cristalli inclusi considerati come nuclei iniziali.

D'altra parte la esistenza di queste fasi distinte di deposito è pure confermata da quanto osservai in un interessante cristallo policromo da me raccolto; esso presentava una delle estremità troncata in causa dell'essersi in esso manifestata in conseguenza di una qualche rottura, una sfaldatura naturale secondo 001; su questa faccia si osservava un'altra porzione di cristallo, ben discernibile perchè di tinta più chiara, costituita da una delle piramidi della 111, la quale non copriva interamente la faccia di sfaldatura su cui era appoggiata colla sua base. Evidentemente questa seconda porzione di cristallo non solo aveva dovuto depositarsi posteriormente alla prima, ma pur anche indipendentemente da essa, essendo la sua formazione avvenuta dopo che il cristallo preesistente aveva subìto la rottura da cui era derivata la faccia naturale di sfaldatura.

Mineralogia. — *Sopra alcuni minerali di Val d'Aosta.* Nota di Federico Millosevich, presentata dal Socio G. Strüver.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Sulla costituzione della titanite.* Nota di FERRUCCIO ZAMBONINI, presentata dal Socio G. STRÜVER.

In un lavoro pubblicato or fa un anno [1], ho avuto occasione di occuparmi incidentalmente della costituzione della titanite, senza manifestare alcuna opinione decisa. Non trascurai però in seguito l'interessante questione e mi permetto ora di comunicare brevemente il risultato delle mie indagini, benchè esse sieno di carattere esclusivamente teorico.

Le ipotesi principali finora emesse sulla costituzione della titanite si possono riassumere così. H. Rose [2] ritenne che il titanio funzionasse da catione e stabilì la formula $\dot{C}a^2\ddot{S}i + \ddot{T}i^2\ddot{S}i$, che fu da Berzelius [3] considerata come teoricamente poco accettabile e propose l'altra $2\dot{C}a\ddot{S}i + \dot{C}a\ddot{T}i^2$. Blomstrand [4] ritornò all'ipotesi di Rose sulla funzione del titanio e considerò la titanite come un silicato di calcio e titanile

$$\begin{matrix} TiO\,.\,O^2 \\ Ca\,.\,O^2 \end{matrix} Si\,.$$

Per le titaniti contenenti elementi trivalenti si hanno due ipotesi. Secondo Blomstrand, il titanile sarebbe sostituibile dal complesso ugualmente bivalente R_2O_2 (R indica un metallo trivalente), cosicchè si avrebbe la seguente formula generale per la titanite:

$$2\,(\overset{II}{R}\,,\,\overset{III}{R_2}O_2\,,\,TiO)\,O\ ,\ SiO_2\,.$$

Secondo Groth [5], invece, le titaniti in questione sarebbero miscele di due composti

$$Ca\,Ti\,SiO_5 \quad e \quad (Al\,,\,Y)_2\,SiO_5\,.$$

(1) *Ueber die Drusenmineralien des Syenits der Gegend von Biella.* Groth's Zeitsch. f. Kryst. u. s. w. 1905, XL, 246-248. Colgo quest'occasione per correggere un'evidente svista nella quale sono incorso parlando delle proprietà ottiche della titanite biellese. A pag. 245 negli angoli segnati come *c*: c sono, invece, come del resto risulta chiaramente dal testo, gli angoli che la normale a (102) fa con le bisettrici acute pei diversi colori.

(2) *Ueber die Titansäure: über die titansäurehaltigen Mineralien; 2 Titanit.* Pogg. Ann. 1844, *62*, 253.

(3) *Årsberättelse*, 1845, pag. 275.

(4) *Titanater från Småland jemte några anmärkningar rörande dylika mineraliers undersökning.* Denksk. kongl. physiograph. Förenig. i Lund 1878.

(5) *Tabellarische Uebersicht der Mineralien* 1882, 118.

È certo che l'ipotesi di Blomstrand, che è rimasta poco conosciuta, forse perchè enunciata in un periodico pochissimo diffuso, è in accordo assai soddisfacente con le analisi. Altrettanto non si può dire per quella di Groth, che vale, come ho accennato nel mio ricordato lavoro, solo per un numero ristretto di analisi.

Per accettare un'ipotesi non basta, peraltro, che essa si accordi coi numeri forniti dall'esperienza: deve anche essere accettabile teoricamente. Ora, può proprio ammettersi che il titanio nella titanite abbia funzione cationica? Mi è sembrato che una risposta ci possa essere fornita dai numerosi lavori pubblicati in questi ultimi anni sulla chimica del titanio, del suo omologo superiore nel sistema periodico, lo zirconio, e dello stagno, elemento che con gli altri due ha tanta somiglianza. Ora tutti questi lavori sono concordi nel dimostrare la tendenza di questi elementi a formare anioni complessi. Per il titanio mi limiterò, per brevità, a citare i lavori di Péchard (1) e di Rosenheim e Cohn (2) e Rosenheim e Schütte (3), dai quali è risultata l'esistenza di sali di un acido titanossalico $TiO = (COO\text{-}COOH)_2$, di un acido clorotitanico $H_2 Ti Cl_6$, di un acido titansolforico $TiO SO_4 . SO_4 H_2$, di un acido tetrarodantitanico $H_2(TiO)(SCN)_4$, di acidi titanotartarici, ecc. Composti di analoga natura sono noti per lo stagno: non ricorderò che l'acido $H_2(SnO)(C_4 H_2 O_6)$ (4), del quale son conosciuti i sali alcalini, i clorostannati ecc. La tendenza dello stagno a formare anioni complessi è, per noi, di grande importanza, se si pensa che Bourgeois (5) ha ottenuto artificialmente un composto $Ca Sn Si O_5$, isomorfo con la titanite, e che è evidentemente una titanite nella quale il titanio è sostituito dallo stagno.

Il comportamento del titanio che chiaro risulta dalla formazione dei composti riferiti e di molti altri che stimo inutile riportare, è confermato dalle analogie che, in questi ultimi tempi, specialmente per opera del Ruer (6) si sono constatate nello zirconio. Questo chimico ha, infatti, potuto dimostrare che il solfato neutro di zirconio, in soluzione acquosa, ha un comportamento che nel modo migliore è espresso dalla formula $ZrO . SO_4 . SO_4 H_2$,

(1) *Sur le combinaisons de l'acide oxalique avec les acides titanique et stannique.* Compt. rend. 1893, CXVI, 1513.

(2) *Ueber Doppelverbindungen des vierwertigen Titans.* Zeitsch. f. anorg. Chemie 1901, XXVI, 239.

(3) *Rhodanide des vierwertigen Titans.* Zeitsch. f. anorg. Chemie 1901, XXVIII. 167.

(4) Rosenheim und Aron: *Ueber einige Komplexsalze des vierwertingen Zinns.* Zeitsch. anorg. Chemie 1904, XXXIX, 170.

(5) *Sur la préparation d'un silicostannate de chaux correspondant au sphène.* Compt. rend. 1887, CIV, 231.

(6) *Ueber das Verhalten einiger Zirkonsalze und die Konstitution des neutralen Zirkonsulfats.* Zeitsch. f. anorg. Chemie 1904, XLII, 87. Ruer e Levin: *Zur Kenntnis der Zirkonschwefelsäuren.* Ibiden 1905, XLVI, 449.

perfettamente analoga a quella dell'acido titansolforico, il cui sale di ammonio fu descritto da Rosenheim e Schütte (vedi sopra).

Da tutti questi fatti mi sembra risulti poco probabile che il titanio nella titanite faccia parte di un catione complesso. So bene che in molti composti, specialmente in seguito agli studî di Abegg e Bodländer sulla elettroaffinità, si è riconosciuta la presenza di cationi complessi, ma mi sembra assai più d'accordo col comportamento generale del titanio, del zirconio e dello stagno, ammettere che la titanite sia il sale di calcio di un acido complesso titansilicico

$$TiO = SiO_4 . Ca .$$

Si torna, così, alla formula del Blomstrand, ma con una variazione essenziale: mentre, infatti, questo chimico considerava TiO come facente parte del catione, io ritengo che appartenga all'anione complesso.

Dobbiamo ora brevemente occuparci dell'alluminio, del ferro ferrico, dell'ittrio e del cerio che si rinvengono sopra tutto in alcune varietà di titanite. È, a mio parere, probabilissimo che questi elementi facciano parte dell'anione e sostituiscano il titanile bivalente con due gruppi $\overset{III}{R}O$ monovalenti. Ciò è d'accordo con le analisi, le quali appunto dicono che quando i suddetti elementi trivalenti sono presenti, diminuisce, in generale, la quantità di biossido di titanio. Per il ferro al massimo e l'alluminio non si possono muovere gravi obbiezioni all'ipotesi che esistano nella titanite sotto forma di gruppi $\overset{III}{R}O$, che sono ammessi in moltissimi silicati, e che facciano parte dell'anione. Come è noto, il Vernadsky (1), qualche anno fa, ha pubblicato una completa ed attraente teoria sugli allumo- e ferrisilicati: è ben conosciuta poi la tendenza di questi elementi a far parte di anioni complessi: basterà che io citi, come composti di recente scoperta, gli acidi allumo- e ferrisolforici di Recoura (2) e Baud (3). E per quel che riguarda gli elementi rari, il bel lavoro di Brauner e Picek (4) sugli acidi « terrosolforici » permette di ritenere che anche questi elementi possano far parte di anioni complessi. E la possibilità che essi si trovino allo stato di gruppi $\overset{III}{R}O$ risulta dal lavoro della signora Cleve-Euler (5) sull'itterbio, il quale metallo dà un wolframato

(1) *Zur Theorie der Silikate.* Zeitsch. f. Kryst. 1901, XXXIV, 37.

(2) *Action de l'acide chlorhydrique sur les sulfates de sesquioxyde d'aluminium, de chrome et de fer.* Compt. rend. 1902, CXXXV, 163. *Combinaisons du sulfate ferrique avec l'acide sulfurique.* Ibidem 1903, CXXXVII, 118.

(3) *Sur une combinaison du sulfate d'aluminium avec l'acide sulfurique.* Compt. rend. 1903, CXXXVII, 492.

(4) *Säure Sulfate der seltenen Erden.* (*Erdschwefelsäuren*). Zeitsch. f. anorg. Chemie 1904, XXXVIII, 322.

(5) *Beiträge zur Kenntniss des Ytterbiums.* Zeitsch. f. anorg. Chemie 1902, XXXII, 153.

$(YbO)_2 WO_4$ nel quale appunto si ha il gruppo $\overset{III}{RO}$: già molto prima, il Pettersson aveva ammesso il gruppo YO nella sua formula della gadolinite. Più recentemente il Brill [1] ha descritto diversi solfati delle terre rare di formula $(\overset{III}{RO})_2 SO_4$.

Resta a vedersi se le analisi di titaniti contenenti elementi trivalenti finora pubblicate sono d'accordo con la teoria ora esposta. È certo, però, che da queste analisi non si può trarre alcuna deduzione molto sicura, poichè le analisi della titanite lasciano, in generale, parecchio a desiderare. Molte analisi di varietà prive di sesquiossidi, come ho già notato nel mio citato lavoro, conducono a rapporti assai diversi da quelli richiesti dalla formula $Ca Ti Si O_5$, che è sicuramente quella della titanite pura [2].

Per le varietà ricche in ferro, alluminio e terre rare non sono mai distinte le quantità rispettive di $\overset{II}{Fe}$ e $\overset{III}{Fe}$, ed in pochissime sono determinati gli alcali, che pure si trovano in molte titaniti.

Dai calcoli da me istituiti sulle diverse analisi finora conosciute e che stimo inutile riportare qui in esteso, risulta che alcune, come, per esempio, le seguenti:

Monroe (Busz)	$Si O_2 : Ti O_2 : CaO$ [3]	= 1,01	: 1	: 0,86
Renfrew (Busz)		= 1	: 1,09	: 0,81
Plauenscher Grund (Groth) . . .		= 1	: 0,87	: 1,13
„ (Hintze) . . .		= 1	: 1,01	: 0,96
Biella (Zambonini)		= 1	: 0,90	: 1,03
Eucolite-titanite (Lindström) . . .		= 1	: 0,89	: 1,07
Alsheda I (Blomstrand)		= 1	: 1,14	: 1,02
„ II „		= 1	: 1,02	: 0,98
Buö, amorfa, (Rammelsberg) . . .		= 1	: 0,95	: 0,86
Narestö, „ . . .		= 1	: 0,96	: 1

stanno in accordo soddisfacente o discreto con la mia ipotesi, mentre solo

(1) *Ueber Atomgewichtsbestimmung von seltenen Erden.* Zeitsch. f. anorg. Chemie 1905, XLVII, 464.

(2) Si ha perfino:

	$Si O_2$:	$Ti O_2$:	RO	
=	1 :	0,94 :	0,67	Hosensackstation (Knerr e Smith)
	1 :	0,98 :	0,70	Wildtkreuzjoch (Busz).

Nè migliori risultati si hanno da analisi più recenti. Quella eseguita da Kovář della titanite di Vicz presso Bistritz dà

$$Si O_2 : Ti O_2 : RO = 1 : 0,96 : 0,86.$$

(3) In $Ti O_2$ si sono riuniti $Al_2 O_3$, $Fe_2 O_3$, $Y_2 O_3$, $Ce_2 O_3$: in CaO gli ossidi dei metalli bivalenti, gli alcali e l'acqua.

quelle di Monroe e di Plauenscher Grund (Hintze) si possono calcolare bene con quella di Groth.

Altre analisi, ad esempio quella della titanite di Waldheim (Schmöger) con $Si\,O_2 : Ti\,O_2 : CaO = 1 : 1{,}04 : 0{,}77$, soddisfanno male alle condizioni richieste dalla formula proposta in questo lavoro, ed ancor peggio a quelle volute dall' ipotesi di Groth. Altre, come quelle di Buö eseguite da Erdmann, nelle quali si ha

$$Si\,O_2 : Ti\,O_2 : CaO = 1 : 1{,}02 : 0{,}70$$
$$= 1 : 1{,}02 : 0{,}71$$

contraddicono la mia formula e sono in perfetto accordo con quella di Groth.

Altre analisi, infine, non si prestano a nessun calcolo.

Come si vede, la maggioranza delle analisi, e specialmente quelle più complete di Rammelsberg, di Blomstrand e di Hintze, non si oppongono alla formula da me proposta, che merita quindi, mi sembra, di esser considerata almeno come verosimile.

Bacteriologia agraria. — *Distribuzione dell'Azotobacterio in Italia* (1). Nota del dott. R. Perotti, presentata dal Corrispondente G. Cuboni.

La forma di *Azotobacter* che, in una precedente Nota (2), riferii aver isolato da un terreno di Roma, sottoposta ad un ulteriore studio, per le caratteristiche morfologiche e per il comportamento verso i differenti mezzi nutritivi, deve indubbiamente essere identificata con la specie *A. chroococcum* Beyerinck. Eseguito anche un confronto con una cultura pura del croococco fattami espressamente inviare dal laboratorio bacteriologico del dott. Kral di Praga, rimase pienamente confermata tale mia conclusione.

Stabilito adunque questo fatto, con il quale per il primo veniva a constatare la presenza in Italia dell'azotobacterio nella sua forma tipica rinvenuta e descritta dal Beyerinck nei terreni dell' Europa settentrionale, volli procedere ad uno studio di ricognizione per venire a conoscere se, ed in quale misura la medesima forma, che deve godere un ufficio di grande interesse nell'economia generale della natura, fosse diffusa nei varî terreni d'Italia. E poichè per altri miei studî in corso sui microorganismi della nitrificazione,

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Bacteriologia agraria annesso alla R. Stazione di Patologia vegetale.

(2) Dott. R. Perotti, *Bacteri oligo- e mesonitrofili della campagna romana*. V. questi Rendiconti, vol. XIV. 2° sem., fasc. 2°, pag. 623.

per cortese invio di molti professori e direttori d'istituti agrari italiani [1], avevo nel mio laboratorio numerosi campioni di terreno di varia natura e di differenti provenienze recentemente raccolti, istituii con essi alcune ricerche, i cui risultati sono nella presente Nota esposti.

Metodi. — Seguii il metodo del Beyerinck tanto per l'allestimento delle culture brute quanto per l'isolamento e lo studio delle forme.

In Erlenmeyer dal contenuto di cm.^{3} 250 versai 25 cm.^{3} di soluzione Beyerinck — acqua marcia, 100; mannite, 2; fosfato bipotassico, 0,02 — in modo da formare sul fondo un sottile strato di liquido nel quale faceva cadere gr. 0,2 del terreno da esaminarsi. Dopo un primo rimescolamento lasciai i recipienti in riposo alla temperatura di 28° C. per dieci giorni. Al decimo giorno procedetti sia macroscopicamente che microscopicamente all'esame del liquido di queste culture brute.

Agarizzando lo stesso liquido del Beyerinck, eseguii alcune culture in piastre, delle quali mi valsi per lo studio delle colonie e delle forme pure che passai in mezzi nutritivi contenenti maggiori o minori quantità di sostanze azotate (agar Beyerinck, agar al peptone, gelatina di carne, albumose di Heyden).

Allo scopo d'evitare inutili ripetizioni rimando, per quanto si riferisce ad una più particolareggiata esposizione dei metodi, alla mia precitata Nota.

Terreni esaminati. — Fra i campioni di terreno ch'erano a mia disposizione, prescelsi quelli aventi una composizione che più s'avvicinasse a quella dell'impasto predominante sul luogo e provenienti da disparate località di molte parti d'Italia.

Più particolarmente formarono oggetto del mio studio i seguenti terreni:

1. Avellino, località « Cappuccini ».

Terreno sciolto, siliceo, coltivato a nocciuolo con colture intercalari avvicendate di lupino o fava con frumento e patate.

2. Caltagirone, podere « Mazzivecchi » della R. scuola pratica di agricoltura.

Terreno di natura siliceo-calcarea-argillosa del tipo predominante nella località.

3. Cerignola, località « Pavoni » appezzamento « Conca d'oro ».

Terreno di medio impasto, con sottosuolo costituito di roccia calcarea, seminativo.

4. Fabriano, località « Cancelli » podere dell'on. Milani.

Terreno ghiaioso-argilloso.

5. Messina, località « S. Placido Calocero » podere della R. scuola pratica di agricoltura.

[1] Colgo con piacere questa occasione per ringraziare sentitamente tutti quei signori che vollero prendersi il disturbo di raccogliere, preparare ed inviare alla R. stazione di Patologia vegetale i campioni occorsi per il presente studio.

Terreno argilloso-siliceo, di mezzano impasto, discretamente ricco in potassa, povero in anidride fosforica ed in azoto.

6. Perugia, orto del R. istituto superiore agrario.

Terreno argilloso-calcare, discretamente ricco di materia organica e di media fertilità: coltivato a tutte le principali piante utili.

7. Porto Maurizio, proprietà cap. Castaldi.

Terreno formato di detriti del colle sovrastante, coltivato ad ortaggi.

8. Rieti, campo reatino.

Terreno calcare siliceo argillo-ferruginoso.

9. Scafati, R. istituto sperimentale per la coltivazione dei tabacchi.

Terreno di natura silicea, poroso, povero di sostanza organica: coltivato a tabacco.

10. Torino, frazione « Lingotto », campo sperimentale della R. stazione agraria.

Terreno quaternario, pianeggiante, di natura argilloso-sabbiosa, assolutamente privo di calcare.

Risultati. — Trascorsi dieci giorni dalla inoculazione del liquido di Beyerinck con i campioni di terreno suddetti, procedetti all'esame delle culture brute pervenendo a quei risultati che sono qui appresso riuniti con i numeri corrispondenti a quelli dei campioni già elencati.

1. Leggera produzione di membrane: scarse forme di *Azotobacter*.

2. Mediocre formazione di membrane sospese nel liquido: rare forme di *Azotobacter*.

3. Produzione di pellicola superficiale iridiscente e di membrane al fondo: numerosi gli *Azotobacter*.

4. Formazione di membrane e di pellicola superficiale iridiscente: liquido leggermente vischioso: pochi elementi di *Azotobacter*.

5. Produzione notevolissima di membrane gelatinose: numerosissimi gli *Azotobacter*.

6. Pellicola superficiale sottile e piccola formazione di membrane: pochi *Azotobacter*.

7. Mediocri formazioni gelatinose e pellicola superficiale: presenti gli *Azotobacter*.

8. Notevole produzione di membrane gelatinose: leggera formazione di pellicola superficiale iridiscente: abbondantissimi gli *Azotobacter*.

9. Formazione piuttosto abbondante di pellicola superficiale iridiscente: liquido viscoso: scarseggianti gli *Azotobacter*.

10. Sottile pellicola superficiale: poche membrane: scarseggianti gli *Azotobacter*.

La preparazione e l'esame delle culture in piastre portò nei vari terreni all'isolamento della forma, che fu con sicurezza identificata mediante i suoi caratteri morfologici e culturali.

Si vede, adunque, come l'*Azotobacterio* è presente in punti disparati e lontani d'Italia, con una costanza la quale rende molto attendibile la supposizione che la presenza di esso debba verificarsi in tutti i terreni della nostra penisola.

Dipendentemente dalla natura fisico-chimica del suolo potrà la forma trovarsi in uno stato di maggiore o minore « attività », ciò che spiega, in questo studio, il differente comportamento delle culture brute, le quali pur tuttavia furono mantenute tutte nelle identiche condizioni di ambiente (temperatura, luce, ecc.). In particolar modo è degno di nota lo sviluppo degli *Azotobacteri* ottenutosi con alcuni campioni, quali ad es. quei di Rieti, di Messina e di Cerignola; e si deve perciò ritenere che tali terre godano di una certa fertilità, come è di fatto.

Relativamente poi al terreno del podere della R. scuola pratica d'agricoltura di Messina, debbo riferire di aver notato nelle culture brute alcune forme, che pur presentandosi molto simili all'*Azotobacterio* del Beyerinck, potrebbero per alcuni caratteri rappresentarne almeno una varietà. Sto quindi proseguendo gli studî con detto campione di terreno per tentare di isolare tali forme e per descriverle.

Batteriologia casearia. — *Ricerche bacteriologiche sul formaggio Gorgonzola* (1). Nota del prof. Costantino Gorini, presentata dal Socio G. Briosi.

Già più volte in precedenti scritti diedi prova delle norme vantaggiose per l'industria casearia che si possono derivare dallo studio microbiologico del caseificio.

Così, ad es., fondandomi sopra ricerche e considerazioni bacteriologiche, ho indicato diversi accorgimenti relativi alla pulizia della camera del latte (2), alla scolatura delle bacinelle di latteria (3), alla scelta dei termometri (5), alla manutenzione della salamoia per formaggi (4) che ebbi la soddisfazione di vedere bene accolti nel mondo caseario italiano e straniero.

Ora son venuto in possesso di un fatto che mi sembra meritevole di particolare menzione, perchè adatto quanto altri mai a dimostrare come le moderne cognizioni microbiologiche possano contribuire al perfezionamento

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Batteriologia della R. Scuola Superiore di Agricoltura di Milano. Presentato all'Accademia il 13 febbraio 1906.

(2) *Industria del latte*, 1903, pag. 87.

(3) *Agricoltura moderna*, 1904, n. 41.

(4) Idem., 1905, n. 16.

(5) Idem., 1904, n. 47.

di un' industria così fiorente e promettente qual' è quella del formaggio, o stracchino detto di Gorgonzola.

È noto che la caratteristica dello stracchino Gorgonzola è la presenza, nell' interno della pasta, di macchie verdognole che, richiamando l'aspetto del prezzemolo, vengono dette con vocabolo milanese *erborinature*. Queste macchie sono legate allo sviluppo di un ifomicete o muffa del genere *Penicillum*.

Siccome questo microbio spesse volte tarda a manifestarsi più di quello che il negoziante avrebbe bisogno per soddisfare alle richieste dei compratori, così per promuovere la formazione delle macchie si usa punzecchiare i formaggi in parecchi punti in guisa da farvi penetrare dell'aria.

Questa pratica empirica viene ora spiegata dalla microbiologia, la quale ci insegna che l'aria favorisce lo sviluppo del suddetto ifomicete. E infatti non è difficile verificare che le macchie verdognole sono di solito più intense lungo i canaletti che segnano il percorso delle punzecchiature.

Chi però ha avuto frequente occasione di osservare del Gorgonzola, avrà rilevato che, oltre alle ambite macchie verdi, esso presenta non di rado, nel suo interno, delle macchie di altro colore che ne costituiscono invece altrettanti difetti.

Queste anomalie di colorazione sono di maggior danno di quanto si creda per la buona accoglienza del Gorgonzola specialmente all'estero. Di ciò ho potuto persuadermi nei miei ultimi viaggi nel Belgio e in Francia, dove si fa (ed a ragione) il confronto con altri tipi similari di formaggio, quale ad es. il *Roquefort*, che meno facilmente è colpito da difetti di colorazione.

Io mi sono pertanto domandato come si potesse spiegare la frequenza di questi difetti nel nostro rinomato stracchino.

Ed ecco in riassunto i risultati delle mie indagini.

Una delle colorazioni anormali che mi sembrano più comuni nel Gorgonzola, è la rossa o rosea la quale sotto forma di striscie e talora persino di vere geodi invade qua e là la pasta dello stracchino. In un caso da me esaminato potei accertare, mediante culture isolanti, la presenza di un batterio del tipo del *Bacillus lactis erythrogenes* Hüppe, il quale vi si trovava così abbondante e così nettamente limitato alla zona rossa, da non lasciarmi dubbio che ad esso dovesse ascriversi il difetto medesimo.

Volli allora andare in traccia della possibile origine di quel germe estraneo. Esaminando attentamente, constatai che la sede delle macchie rosse stava in istretto rapporto coi canaletti che erano stati praticati artificialmente nella pasta per lo scopo sovraccennato. Le striscie rossastre seguivano, in altre parole, il percorso delle punture, partendo dalla superficie esterna e avanzandosi verso l'interno della massa. Ciò mi indusse a ricercare se il medesimo bacterio si trovasse anche sulla superficie del formaggio; le ri-

cerche diedero esito positivo, poichè dalla crosta dello stracchino in esame, accanto ad altri microbi di varia natura, potei isolare per l'appunto dei rappresentanti dello stesso *B. erythrogenes*. Era quindi logico supporre che il suddetto germe fosse stato innestato nello stracchino per via delle perforazioni. Tale supposizione fu in me rinsaldata dopochè mi riuscì (grazie alla cortese ospitalità di alcuni fabbricanti, fra cui piacemi segnalare la Ditta Gallone di Lecco) di presenziare al procedimento che abitualmente si adotta per praticare le perforazioni.

Trattasi di un metodo molto primitivo: con lunghi aghi di metallo si attraversano in diverse direzioni e ripetutamente i caci, lasciando che l'ago trascini seco lungo il suo percorso il sudiciume ricoprente la superficie esterna dei caci stessi.

Ora è degna di nota la circostanza che, avendo sottoposto ad analisi micrografica il sudiciume esterno di parecchi stracchini, mi risultò che, in mezzo agli innumerevoli germi ivi alberganti, ve ne è una gran parte di colorati (cosidetti *cromogeni*), fra cui prevalgono precisamente i rossi, appartenenti non soltanto agli schizomiceti, ma anche agli ifomiceti e ai blastomiceti.

Inoltre avendo fatto attenzione alla sede delle colorazioni rosse e di altre colorazioni anormali in parecchi stracchini che mi capitarono sott'occhio dopo le ricerche surriferite, ho verificato ripetersi in generale il sopraccennato rapporto coi segni indicanti il percorso delle punture.

Tutto concorre adunque a far ritenere che le colorazioni anormali interne dello stracchino Gorgonzola, fra cui predomina la rossa, possano essere provocate da inquinazioni microbiche trapiantatevi dalla superficie in causa dell'operazione della foratura,

Ripensando ora a quanto asseriscono gli stranieri, che nel formaggio Roquefort i difetti di colorazione interna sono molto più rari, verrebbe da credere che questo stracchino non vada sottoposto alla perforazione. Ma così non è; anche i Roquefort sono punzecchiati per lo stesso motivo per cui si punzecchiano i Gorgonzola; salvo che, siccome appresi verbalmente dai fabbricanti di Roquefort e come vidi confermato in recenti pubblicazioni, i Roquefort, prima di essere punzecchiati, vengono ripuliti, raschiati dalla patina sudicia che li riveste.

Non si potrebbe fare lo stesso ed anche meglio pel nostro classico stracchino?

Ecco adunque come la scienza microbiologica, mettendo a nudo la causa di un difetto, sia in grado di suggerire il mezzo per migliorare sensibilmente la riuscita di un importante prodotto caseario.

Dico: *sensibilmente*, perchè non è a credere che i difetti provenienti dal sistema sudicio di perforazione del Gorgonzola si limitino a colorazioni eterogenee; evidentemente per lo sviluppo di germi estranei entro la pasta

si possono determinare altresì alterazioni di sapore, di consistenza, di profumo ecc.

Ripeto: *sensibilmente*, giacchè nuoce molto alla riputazione del nostro cacio la mancanza di quell'omogeneità e purezza di colorito e di sapore che invece è meglio raggiunta nei formaggi similari francesi e inglesi (cacio *Stilton*). E ciò mi fu assicurato non solamente da gente francese, la quale potrebbe avere peculiare interesse a sostenere il Roquefort, ma benanco da cultori di caseificio degli Stati Uniti d'America e dell'Inghilterra, dove il Gorgonzola trova pure grande smercio.

Ed è un vero peccato, — soggiungevano quei miei egregi colleghi — perchè quanto a bontà intrinseca il Gorgonzola è bene spesso preferito ai suoi competitori.

Tanto che vi sono già all'estero dei propositi di fabbricare delle imitazioni del Gorgonzola, prendendo da noi i lati buoni della sua preparazione, e correggendola nelle parti difettose alla stregua dei criteri e delle esigenze moderne.

Io non voglio dire al certo che un tale pericolo sovrastante al nostro Gorgonzola sarà sventato col solo perfezionarne il sistema di perforazione. Esso non è peraltro uno dei meno importanti emendamenti che urge introdurre per *presentare* sempre meglio questo nostro prodotto, fonte non indifferente di ricchezza nazionale; dappoichè credo di non scostarmi troppo dal vero valutando (in base a rilievi eseguiti sopra luogo) a circa 15 milioni di lire il movimento annuo di cacio Gorgonzola in Italia.

Con questa mia Nota ho inteso inoltre di fare per il Gorgonzola ciò che già feci per altri prodotti caseari e segnatamente per il formaggio di Grana: dimostrare cioè coi risultati di ricerche bacteriologiche l'utilità non solamente scientifica ma anche pratica di studiare la lavorazione dei nostri latticini secondo un indirizzo igienico-microbiologico, che finora, per forza di cose, è rimasto trascurato.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

F. Zambonini. *Ulteriori ricerche sulle zeoliti.* Presentata dal Socio G. Struever.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna dà il triste annuncio della morte del Socio straniero prof. Samuele Langley; apparteneva il defunto all'Accademia, per la Fisica, sino dal 25 settembre 1900.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CERRUTI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci FOÀ, TARAMELLI, SACCARDO, BERLESE, DARBOUX, HAECKEL, HELMERT, PFLUEGER, e dei signori prof. CAMPANA, e dott. VERBECK. Fa inoltre menzione di un *Album descrittivo del Policlinico Umberto I di Roma* inviato in dono dal Ministero della Pubblica Istruzione, e dei volumi 3° e 4° del *Rapporto* del Governo di Ceylan, sulle pescherie di ostriche perlifere nel golfo di Manaar.

CORRISPONDENZA

Il Presidente BLASERNA presenta un piego suggellato, trasmesso dai dottori G. A. BLANC e O. ANGELUCCI, perchè sia conservato negli Archivi accademici.

Lo stesso PRESIDENTE comunica poscia un invito della Università di Aberdeen che celebrerà nel prossimo settembre il suo quarto centenario.

Il Segretario CERRUTI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia delle scienze di Amsterdam; l'Accademia delle scienze di Nuova York; le Società Reali di Londra e di Vittoria; la Società geologica di Ottawa; il Museo Britannico di Londra; il Museo di storia naturale di Nuova York; l'Istituto geodetico di Potsdam; l'Osservatorio Harvard di Cambridge Mass.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE
DELLA UNIVERSITÀ DI BERN.

I. — BERN.

ACHNER A — Beiträge zur Kenntnis der falschen Chinarinden. Zürich, 1904. 8°.

ADAMOFF W. — Ein Beitrag zur Physiologie des Glykogens. München, 1904. 8°.

ATTINGER K. — Beiträge zur Kenntnis von Körperform und Leistung des Rindes. Leipzig, s. a. 8°.

BACHMANN A. — Ueber die Indikationen des künstlichen Abortus. s. l., 1905. 8°.

BACILIERI L. — Ueber kongenitale Luxationen im Kniegelenk. Wiesbaden, 1905. 8°.

BARRAUD S. — Ueber Extremitätengangrän im jugendlichen Alter nach infektiösen Erkrankungen. Leipzig, 1904. 8°.

BEMELMANS E. C. H. A. M. — Beitrag zur Kenntnis der Veränderlichkeit der Niederländischen Butterkonstanten. Bern, 1904. 8°.

BERTHOUD G. — Beiträge zur Kenntnis des Copaivaharnes. Bern, 1905. 8°.

BILAND J. — Ueber die fibrinösen Gerinnungen an der placentaren Fläche des Chorion. Berlin, 1904. 8°.

BLUMSTEIN-JUDINA B. — Die Pneumatisation des Markes der Vogelknochen. Wiesbaden, 1905. 8°.

BOISSONNAS L. — Zur Casuistik der Zungenkrebse. Strassburg, 1905. 8°.

BÖHME R. — Ueber den Intestinaltractus von Clarias melanoderma Bleeker. Bern, 1904. 8°.

BORLE J. — Contribution à l'étude de l'Embolie graisseuse après le redressement brusque des contractures articulaires. Genève, 1905. 8°.

BRAND M. — Ueber Molybdate, Sulfomolybdate u. Phospormolybdate des Lithiums. Bern, 1905. 8°.

BRUCK S. — Ueber den Zusammenhang zwischen Diurese und Organtätigkeit. Bern, 1904. 8°.

BRÜGGER J. — Das Vieh Graubündens und seine Beziehung zur brachycephalen Urrasse. Bern, 1904. 4°.

BRUNNINGER M. G. — Kongenitale Kammerscheidewanddefekte mit konsekutiver Pulmonaliserweiterung. Berlin, 1904. 8°.

BUSSENIUS H. — Tierreste aus der « Grotte Aiguebelle » am kleinen Salève. Jena, 1905. 4°.

CLEVISCH A. — Ueber die Bildung des Mikronucleus bei Ichthyophthirius multifiliis (Fouquet). München, 1904. 8°.

COHEN S. — Synthese des 3, 4, 2′ Trioxy-Flavonols. Amsterdam, s. a. 8°.

DAICHES P. — Endresultate der Radikaloperation von Hernien speziell der Inguinalhernien. Leipzig, 1904. 8°.

DIEM E. — Beiträge zur Kenntnis der Arsenvanadinmolybdate. Bern, 1904. 8°.

DORBRITZ E. — Bakterienflora der Vaccine. Bonn, 1904. 8°.

DRAGNEWITSCH M. — Ueber Kaliumphosphorvanadinmolybdate. Bern, 1905. 8°.

EBENHUSEN K. — Ueber Borowolframate. Bern, 1905. 8°.

EBERHARDT A. — Contribution à l'étude de Cystopus Candidus Lév. Jena. 1904. 8°.

FALKOWITSCH K. — Hörprüfungen bei den Zöglingen in der Taubstummen-Anstalt Wabern bei Bern. Bern. 1905. 8°.

FELDBACH S. — Beitrag zur Ernährung magendarmkranker Säuglinge mit Buttermilch. Bern, 1905. 8°.

FÉLICINE L. — Ueber die Beziehungen zwischen dem Blutgefässsystem und den Zellen der Nebenniere. Bern, 1905. 8°.

FENCHEL A. — Ueber Tubularia Larynx Ellis. Geneve, 1905. 8°.

FIRLEIEWITSCH M. — Ueber die Beziehungen zwischen Bau und Funktion der Lymphdrüsen. München, 1905. 8°.

Fischer H. — Die Bedeutung der Agglutination zur Diagnose der pathogenen und saprophytischen Streptokokken. Jena, 1904. 8°.

Forster K. — Beitrag zur Kenntnis des Xeroderma pigmentosum. Berlin, 1904. 8°.

Fröhlich A. — Die Veränderungen des Hufbeins bei Strahlkrebs. Stuttgart, 1905. 8°.

Funk C. — Zur Kenntnis des Brasilins und Hämatoxylins. Bern, 1904. 8°.

Gasser A. — Ueber die Nullstellen der Besselschen Funktionen. Bern, 1904. 8°.

Gemuseus A. — Das Stovaïn, ein neues Lokalanästhetikum. Bern, 1905. 8°.

Gerdts C. L. — Bau und Entwickelung der Kompositenfrucht mit besonderer Berücksichtigung der offizinellen Arten. Leipzig, 1905. 8°.

Getzowa S. — Ueber die Thyreoidea von Kretinen und Idioten. Berlin, 1905. 8°.

Gezowa L. — Ein klinischer Beitrag zur Frage der feuchten Asepsis. Bern, 1905. 8°.

Glasmann B. — Ueber die Trennung von Chrom und Vanadin und über Chromvanadate. Riga, 1904. 8°.

Greyerz W. v. — Ueber die oberhalb von Dickdarmverengerungen auftretenden Darmgeschwüre. Leipzig, 1905. 8°.

Groll M. — Der Oeschinensee im Berner Oberland. Bern, 1904. 8°.

Guggisberg H. — Ueber Komplikationen der Retroflexio uteri und deren Einfluss auf die operative Therapie. Bern, 1905. 8°.

Habicht C. — Die Steinerschen Kreisreihen. Bern, 1904. 8°.

Hasenclever P. — Über die Anwendung des Salzsäuren Hydroxylamins in der quantitativen Analyse. Wiesbaden 1905. 8°.

Hauswirth A. — Die chirurgische Behandlung der Varicocele. Bern, 1905. 8°.

Heilborn E. — Fuchs, Schakal und Wolf. Vergleichende Morphologie des Schädels. Bern, 1905. 8°.

Heinrichs B. — Hirudineen der Umgebung von Bern. Beitrag zur Kenntnis der schweizerischen Hirudineenfauna. Hannover, 1905. 8°.

Helgers J. H. E. — Beiträge zur Geologie der westlichen Gehänge des Lauterbrunnenthales. Bern, 1905. 8°.

Hinsen A. — Ueber Ammoniumphosphorvanadinmolybdate. Bonn, 1904. 8°.

Hodel H. — Beitrag zur Frage der Geburtspragnose nach Prolapsoperationen, Amputation des Cervix und der Vaginalportion. Luzern, 1904. 8°.

Hoffbauer R. — Beiträge zur Kenntnis der Aloe. Berlin, 1905. 8°.

Hüttemann W. — Beitrag zur Kenntnis der Bakterienflora im normalen Darmtraktus des Rindes. Strassburg, 1905. 8°.

Inhelder A. — Fälle von Polydactylie bei Menschen und Haustieren. St. Gallen, 1904. 8°.

Jacobius L. — Ueber Metalltrennungen im Salzsäurestrom. Breslau, 1905. 8°.

Kahan E. — Ueber die Morbidität nach Eihaut und Placentarlösungen bei Sublimatantisepsis des Genitalkanals. Charlottenburg, 1904. 8°.

Kaplan L. — Die Drüsen des Stimmbandes und ihre Ausführungsgänge Bern, 1905. 8°.

Karnowski M. — Zur Kenntnis des Catechins. Bern, 1905. 8°.

Kehren L. — Ueber die Umlagerung von $\beta\gamma$-ungesättigten α-Hydroxysäuren in γ-Ketonsäuren. Strassburg, 1904. 8°.

Kern F. — Studien über das Wesen der Beschälseuche. Jena, 1905. 8°.

Koiransky E. — Ueber eigentümliche Formationen in den Leberzellen der Amphibien. Jena, 1904. 8°.

Küster E. — Die Innervation und Entwicklung der Tastfeder. Leipzig, 1905. 8°.

Lahrmann H. — Beiträge zur Kenntnis der Ammoniumphosphorvanadinmolybdate. Bern, 1904. 8°.

Liebetanz E. — Die parasitischen Protozoen des Wiederkäuermagens. Bern, 1905. 8°.

Lipp A. — Beiträge zur Kenntnis der Einwirkung von Aldehyden auf Phenole. Ueber einige gefärbte Hydrazoverbindungen. Bern, 1905. 8°.

Matti H. — Beiträge zur Chirurgie des Magenkreibses über 97 Magenresektionen wegen Carcinom mit Berücksichtigung der Fernresultate hinsichtlich Radikalheilung und Wiederherstellung der Magenfunktionen. Leipzig, 1905. 8°.

Mayus O. — Die Peridienzellen der Uredineen in ihrer Abhängigkeit von Standortsverhältnissen. Bern, 1904. 8°.

Menneking F. — Ueber die Anordnung der Schuppen und das Kanalsystem bei Stachyodes ambigua (Stud.) Caligorgia flabellum (Ehrbg.) Calyptrophora Agassizii (Stud.), Amphilaphis abietina (Stud.) und Thouarella variabilis (Stud.). Berlin, 1905. 8°.

Merveilleux R. (de) — Fréquence et répartition du Sarcôme en Suisse de 1892-1901. Berne, 1905. 8°.

Meyer L. — Ueber Darmverengerungen nach unblutiger oder blutiger Reposition eingeklemmter Brüche. Leipzig, 1905, 8°.

Meyer P. E. – Die Kiemenhöhle und das Kiemengerüst bei den Labyrintfischen. Bern, 1904, 8°.

Neubauer J. — Ueber anaërobe Bakterien im Rinderdarm. Berlin, 1905. 8°.

Niederhaeusern D. v. — Die Skopalamin-Morphium-Narkose. Bern, 1905. 8°.

Nierenstein M. — Synthese des 2-Oxyflavonols. Bern, 1904. 8°.

Nopitsch E. — Beiträge zur Kenntnis des Pinzgauer Rindes. Traumstein, 1904. 8°.

Oestern K. — Beitrag zur Kenntnis der Bakterienflora der erweichten tuberkulösen Herde des Rindes. Jena, 1904. 8°.

Ohler K. W. — Der Einfluss des Geschlechtslebens der Tiere, insbesondere der Vögel auf die Epidermoidalgebilde der Haut. Neustadt, 1905. 8°.

Oppler P. — Feinere Anatomie der im Kopf- und Halsteil von Hirudo vorkommenden Drüsen. Neu-Ruppin, 1904. 8°.

Oort E. D. v. — Beitrag zur Osteologie des Vogelschwanzes. Leiden, 1904. 8°.

Ottenberg G. — Spektralanalytische, mit dem Quarz-Spektrographen vorgenommene Untersuchungen reiner und kapillaranalytisch abgetrennter gelber Farbstoffe, mit besonderer Berücksichtigung pharmakognostisch wichtiger Körper. Berlin, 1904. 8°.

Over K. — Untersuchungen über die fötale Circulation. Utrecht, 1904. 8°.

Perlberger H. — Ueber Kupfer- und Kadmium-Phosphormolybdate. Bern, 1904. 8°.

Picard J. H. — Ueber den Wert der biologischen Reaktion als Erkennungsmittel von Fleischarten. Utrecht, 1904. 8°.

Plate E. — Ueber die Resorptionsinfektion mit Tuberkelbazillen vom Magendarmkanal aus. Bern, 1905. 8°.

Poeschel K. — Ueber die Anwendung der Inhalation bei den Haustieren. Nürnberg, 1905. 8°.

Pretschistenskaja K. — Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Wirksamkeit des Vagus. München, 1905. 8°.

Promnitz B. — Untersuchungen über Lysoform. Jena, s. a. 4°.

Reber H. — Zweite Mitteilung. Ueber Agglutination der Vaginalstreptokokken gravider Frauen und die durch dieselben hervorgerufene Hämolyse. Stuttgart, 1905. 8°.

Reissinger A. — Vergleichende Untersuchungen über den mikroscopischen Bau der arteriellen Blutgefässe des Kopfes und Halses der Haussäugetiere. Amorbach, 1904. 8°.

Ries J. — Ueber die Erschöpfung und Erholung des zentralen Nervensystems. München, 1905. 8°.

Rösch A. — Der Kontakt zwischen dem Flysch und der Molasse im Allgäu. München, 1905. 8°.

Rubin K. — Ueber Wolfram- & Siliciumbestimmungen im Stahl. Bern, 1905. 8°.

Ruch F. — Besteht ein Zusammenhang zwischen Struma und Cataract? Bern, 1905. 8°.

Samelson-Kliwansky L. — Ein Beitrag zur Kenntnis der Mammacysten mit butterähnlichem Inhalt. Berlin, 1905. 8°.

Schneider A. — Das Achsenskelet der Gorgoniden. Berlin, 1905. 8°.

Schneider J. — Untersuchungen über die Tiefsee-Fauna des Bielersees mit besonderer Berücksichtigung der Biologie der Dipterenlarven der Grund-Fauna. Bern, 1905. 8°.

Scheve A. — Beiträge zur Kenntnis der Vanadylverbindungen. Bern, 1905. 8°.

Schindler C. — Untersuchungen über das Auftreten der Myelocyten im Blute. Zugleich ein Beitrag zur Hämatologie infectiöser und anderer Krankheitszustände. Berlin, 1904. 8°.

Schott F. — Beiträge zur Kenntnis der Oxalvanadinmolybdate. Bern, 1904. 8°.

Schultz K. — Untersuchungen über das Verhalten der Leukocyten-Zahl im Wiederkäuerblut, 1. unter normalen (physiologischen) Verhältnissen; 2. bei innerlichen Krankheiten (spez. Gastritis sowie Pericarditis traumatica). Tübingen, 1905. 8°.

Schütz A. — Ist der Katheterismus (Luftdusche) bei der akuten Otitis media parulenta wegen einer komplizierenden Mastoiditis indiziert oder kontraindiziert? Luzern, 1905. 8°.

Semadeni F. O. — Beiträge zur Kenntnis der Umbelliferen Puccinien. Jena, 1904. 8°.

Stamm H. — Ueber Phosphorvanadinmolybdate. Bern, 1905. 8°.

Stepowski M. — Vergleichend-anatomische Untersuchungen über die oberirdischen Vegetationsorgane der *Burseraceae, Dipterocarpeae* und *Guttiferae*, mit besonderer Berücksichtigung der Sekretbehälter. Krakau, 1905. 8°.

Stern P. — Beiträge zur Therapie der Syphilis. Berlin, 1905. 8°.

Südmersen H. J. — On an Infectious Pneumonia of Rabbitis, and its Treatment by Antiserum. Jena, 1905. 8°.

Sulser J. — Synthesen einiger Stilbenderivate. Bern. 1905. 4°.

Svendsen C. J. I. B. — Ueber den Harzfluss bei den Dicotylen speziell bei Styrax, Canarium, Shorrea, Toluifera und Liquidambar. Kristiania, 1905. 8°.

Taufer J. — Beiträge zur Kenntnis der hämorrhagischen Septikämie der Haustiere auf Grund einiger Beobachtungen u. Untersuchungen. Berlin, s. a. 8°.

Vermaat P. — Untersuchungen über das Oberflächen-Epithel des Magens. Bern, 1904. 8°.

Wagner O. — Virulenzsteigerung von Typhusbazillen durch Zuchtung in Jauche. Stuttgart, 1905. 8°.

Walther F. — Uber Dauererfolge bei Sanatoriumsbehandlung und den Wert von Volksheilstätten. Bern, 1904. 4°.

Wegelin K. — Ueber das Adenokarzinom und Adenom der Leber. Berlin, 1905. 8°.

Wersilaff M. — Zur Kenntnis der färbbaren Körnchen in den Schweissdrüsen. Bern, 1904. 8°.

Wilmer F. — Beiträge zur Kenntnis des diluvialen Addagletschers. Bern, 1904. 8°.

Wurth T. — Rubiaceen bewohnende Puccinien vom Typus der Puccinia Galii. Jena, 1905. 8°.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1906). Fasc. 5°. 1° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 7°-8°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VI. Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XI.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 marzo 1906.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Millosevich. Osservazioni della cometa 1905 c Giacobini fatte all'equatoriale di 39 cm. d'apertura all'Osservatorio al Collegio Romano . . . . . Pag. 265
Battelli. Sulla resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza (*) . . . » 266
Orlando. Sull'integrazione di una notevole equazione differenziale a derivate parziali (pres. dal Socio *Cerruti*) . . . . . » »
Magini. Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore (pres. dal Corrisp. *Battelli*) . . . . . » 270
Chistoni. Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1904 e nell'estate del 1905 (pres. dal Socio *Blaserna*) . . . . . » 276
Levi e *Voghera.* Sopra la formazione elettrolitica degli iposolfiti (pres. dal Corrisp. *Nasini*) (*) » 281
Colomba. Sulla scheelite di Traversella (pres. dal Socio *Strüver*) . . . . . » »
Zambonini. Sulla costituzione della titanite (pres. *Id.*) . . . . . » 291
Perotti. Distribuzione dell'Azotobacterio in Italia (pres. dal Corrisp. *Cuboni*) . . . . . » 295
Gorini. Ricerche bacteriologiche sul formaggio Gorgonzola (pres. dal Socio *Briosi*). . . » 298

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Zambonini. Ulteriori ricerche sulle zeoliti (pres. dal Socio *Strüver*) . . . . . » 301

PERSONALE ACCADEMICO

Blaserna (Presidente). Dà annuncio della morte del Socio straniero prof. *Samuele Langley* » »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Cerruti (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci *Foà, Taramelli, Saccardo, Berlese, Darboux, Haeckel, Helmert, Pflueger,* dei professori *Campana, Verbeck,* e del Ministero della Pubblica Istruzione. . . . . » 302

CORRISPONDENZA

Blaserna (Presidente). Presenta un piego, inviato dai dottori *Blanc* e *Angelucci,* perchè sia conservato negli Archivi dell'Accademia . . . . . » »
Id. Comunica un invito della Università di Aberdeen per la celebrazione del suo quarto centenario . . . . . » »
Cerruti (Segretario). Dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti . . . » »
BULLETTINO BIBLIOGRAFICO . . . . . » 303

ERRATA-CORRIGE

A pag. 249, lin. 17, invece di *1849* legg. *1839*.
» 261, al titolo della penultima pubblicazione dello Scarabelli, vanno aggiunte le parole: (*in collaborazione col dott. L. Foresti*).

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. *Roma 18 marzo 1906.* **N. 6.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 *marzo* 1906.

Volume XV.° — Fascicolo 6°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. – *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. – *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. – *c*) Con un ringraziamento all'autore. – *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 marzo 1906.

F. D'Ovidio, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Sulla radioattività della sorgente di Fiuggi presso Anticoli.* Nota preliminare del Corrispondente R. Nasini e di M. G. Levi [1].

Occupati da vario tempo nello studio della radioattività di prodotti italiani abbiamo rivolta ultimamente la nostra attenzione sulla celebre sorgente di Fiuggi presso Anticoli e sull'acqua che da essa scaturisce. Fin dall'agosto dell'anno scorso abbiamo esaminato con un elettroscopio a campana, assai adatto per ricerche sui gas, la radioattività del gas che si può estrarre dall'acqua di Fiuggi facendovi gorgogliare a traverso una corrente d'aria. Il gas si dimostrò assai ricco di emanazione, giacchè ci risultò di un'attività circa la metà di quella del gas della sorgente di Gastein (Grabenbäckerquelle) che noi stessi abbiamo avuto l'opportunità di esaminare e che, come risulta anche dagli studi del Curie, è il gas più radioattivo che si conosca. Il chmo prof. C. Engler del Politecnico di Karlsruhe, nella escursione che fece in Italia nel settembre p. p. per esaminare la radioattività delle nostre acque coll'apparecchio semplice ed esatto da lui ideato, rivolse il suo studio, in seguito alle nostre indicazioni, anche sull'acqua di Fiuggi e, da quanto egli gentilmente ci comunicò per lettera, risulta pure dalle sue esperienze che quest'acqua è molto radioattiva. Crediamo che non vi sia dubbio, come ci siamo persuasi con ulteriori indagini, che essa è la più attiva tra le acque italiane di radioattività nota.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova.

Abbiamo continuato e continuiamo tuttora le nostre ricerche non solo sull'acqua di Fiuggi, ma su tutti i materiali che si trovano in prossimità della sorgente, ricerche che promettono di condurci a risultati interessanti sia dal punto di vista della radioattività dei materiali stessi e dell'acqua, sia dal punto di vista della loro composizione chimica. Speriamo di potere fra breve render conto di questi risultati.

Meccanica. — *Sugli integrali delle equazioni dell'elettrodinamica.* Nota del prof. R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore* (1). Nota del dott. R. Magini, presentata dal Corrispondente A. Battelli (2).

1. La diseguaglianza di distribuzione prodotta dallo spazio d'aria esistente fra un condensatore munito di anello di guardia e l'anello stesso potrebbe condurre a conclusioni inesatte o almeno non del tutto rigorose quando, come capiterà spesso, dovrà farsi il confronto fra le capacità del condensatore con e senza anello di guardia e quelle ricavate in ambo i casi dalle sue dimensioni.

Sarà quindi conveniente, prima di adoprare la nota formola $\frac{S}{4\pi d}$, di formarsi un'idea della grandezza dell'influenza del taglio.

2. Maxwell, studiando il caso dell'anello nel § 201 di *Electricity and Magnetism*, dà per la capacità di un condensatore circolare, la seguente espressione:

$$C = \frac{R^2 + R'^2}{8d} - \frac{R^2 - R'^2}{8d} \frac{\alpha'}{d + \alpha'}, \tag{1}$$

dove d è la distanza dei piatti; R, il raggio del disco (collettore); R', il raggio interno dell'anello di guardia, per modo che la larghezza del taglio è $R' - R$; e α', una quantità tale che

$$\alpha' < \frac{R' - R}{\pi} \log_e 2, \text{ ossia } \alpha' < 0{,}22\,(R' - R) \text{ (3)}.$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Pisa.

(2) V. pag. 270.

(3) Questa quantità α' fu introdotta nel calcolo della capacità studiando il sistema formato da due superficie equipotenziali ondulate create da una serie di semipiani paral-

Chiamando allora $2c$ la larghezza del taglio, si ha subito dalla (1):

$$\frac{R^2+(R+2c)^2}{8d}-\frac{R^2-(R+2c)^2}{8d}\frac{\alpha'}{d+\alpha'},$$

dalla quale, sviluppando e riducendo si ottiene:

$$\frac{R^2}{4d}+\frac{cR}{2d}\left(1+\frac{\alpha'}{d+\alpha'}\right)+\frac{c^2}{2d}\left(1+\frac{\alpha'}{d+\alpha'}\right),$$

che può scriversi:

$$\frac{R^2}{4d}+\frac{c(R+c)}{2d}\left(1+\frac{\alpha'}{d+\alpha'}\right).$$

Allora, chiamando C_α la correzione della capacità espressa dal primo termine nella supposizione che sia nulla l'influenza dell'orlo, e chiamando, come solito, λ la larghezza della striscia addizionale, avremo subito:

$$C_\alpha=\frac{c(R+c)}{2d}\left(1+\frac{\alpha'}{d+\alpha'}\right),$$

$$\lambda=\frac{2dC_\alpha}{R}=\frac{c(R+c)}{R}\left(1+\frac{\alpha'}{d+\alpha'}\right).$$

Ora, in esperienze rigorose la larghezza $2c$ del solco deve essere sempre piccolissima, più piccola che sia possibile; per modo che c riesce estremamente piccolo rispetto ad R. Quindi, poichè

$$\lambda=\left(c+\frac{c^2}{R}\right)\left(1+\frac{\alpha'}{d+\alpha'}\right),$$

e $\frac{c^2}{R}$ è quasi infinitesimo e $\left(1+\frac{\alpha'}{d+\alpha'}\right)$ è di poco superiore ad uno, si potrà anche scrivere senza sensibile errore

$$\lambda=c\left(1+\frac{\alpha'}{d+\alpha'}\right)=c+\frac{c\alpha'}{d+\alpha'}. \tag{2}$$

---

leli posti a distanza B. Una delle due superficie è scelta in modo da essere pressochè piana, ed allora, se A è la distanza da essa alla sommità della superficie ondulata e D l'altezza di questa ondulazione contata dal suo punto più alto al suo punto più basso, Maxwell dimostra che la capacità del suddetto sistema equivale a quella di due superficie piane poste alla distanza $A+\alpha'$, essendo:

$$\alpha'=\frac{B}{\pi}\log_e\frac{2}{1+e^{-\pi\frac{D}{B}}},$$

Considerando allora la faccia del solco compreso fra il collettore e l'anello, Maxwell trova per la carica su quella, la quantità $q=\frac{1}{4}R(R'-R)\frac{1}{A+\alpha'}$, donde la (1).

Ora, sostituendo nel secondo termine ad α' il suo limite superiore $0{,}44c$, si ha che il valore massimo assunto da quel termine è

$$\frac{0{,}44c^2}{d+0{,}44c},$$

che si può ritenere trascurabile. Quindi, partendo dalla formola (1) di Maxwell, si ricava che la larghezza della striscia addizionale da usarsi per compensare la influenza dell'orlo e dello spazio d'aria, è sensibilmente eguale alla metà della larghezza dell'intervallo esistente fra il collettore e l'anello di guardia.

3. Dalla (2) risulta che λ cresce col crescere di questo intervallo e diminuisce lievemente col crescere della distanza. Questa seconda conclusione non è confermata dall'esame di altre espressioni di λ. Infatti per un bordo rettilineo, J. J. Thomson [1] dà le formole:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \lambda &= c - \frac{\pi}{8}\frac{c^2}{d}, \\ \lambda &= \frac{d}{\pi}\left\{1+\log_e\frac{2\pi c}{d}\right\}, \\ \lambda &= c, \end{aligned}$$

le quali valgono rispettivamente nei casi che $\frac{c}{d}$ sia piccolissimo, che sia grandissimo, e che il taglio sia di profondità infinita, con c piccolissimo rispetto a d.

Ora dalla prima (che è quella che fa al caso nostro) come dalla seconda formola, segue invece che λ cresce con d. Ciò risulterà anche dall'esame della formola di Kirchhoff. Si noti anche che, mentre per la formola (2) λ è eguale alla metà del taglio più una quantità piccolissima, per la formola (3) di Thomson, λ è sensibilmente più piccolo della metà del taglio.

4. Ed ora consideriamo la formola data dal Kirchhoff [2] per la capacità *corretta* di un disco circolare munito di anello di guardia, posto in presenza di un gran piatto. Il disco e l'anello sono supposti al potenziale unitario, ed il gran piatto al potenziale zero. Il raggio del disco è $R'-c$; quello interno dell'anello, $R'+c$; b è la grossezza d'entrambi, e d è la loro comune distanza dal gran piatto. Le quantità d, b, c sono supposte come molto piccole rispetto ad R', mentre la larghezza dell'anello si suppone dello stesso ordine di R'. Anche in questo caso, come in quello del condensatore privo di anello, il calcolo si riduce a trovare l'espressione della funzione di flusso che, confrontata con un'altra contenente una costante, permette di

[1] J. J. Thomson, *Notes on Recent* ecc., §§ 241, 243.

[2] Kirchhoff, Monatsber. der Akad. d. Wiss. zu Berl., v. 15, 1877.

conoscere questa costante, ossia il doppio della quantità di elettricità sparsa nel disco.

È noto [1] che quando la grossezza di questo è di grandezza finita, l'integrazione delle equazioni differenziali originate dalla trasformazione schwarziana e dai calcoli successivi richiede l'uso delle funzioni ellittiche. Il Kirchhoff, giunto a determinare l'espressione di quella costante, afferma che il calcolo di essa è assai malagevole, perchè si richiede prima la risoluzione di tre equazioni secondo tre determinati parametri, e che al contrario il calcolo stesso riesce molto semplificato se si suppone che b sia grande rispetto a c, ossia che la grossezza del disco sia rilevante di fronte alla semilarghezza del taglio. Ciò ammesso, il Kirchhoff dà, contentandosi dei termini finiti e degli infinitesimi del primo ordine, per la quantità di elettricità sparsa sul disco, la seguente espressione:

$$\frac{R'^2}{4d} - \frac{R'}{\pi}(\beta_0 \operatorname{tang}\beta_0 + \log_e \cos\beta_0 + 4q \operatorname{sen}^2\beta_0), \tag{4}$$

β_0 e q essendo due quantità tali che

$$\operatorname{tang}\beta_0 = \frac{c}{d},$$

e

$$-\log_e q = 2\left(1 + \frac{\beta_0}{\operatorname{tang}\beta_0} + \frac{b}{c}\frac{\pi}{2}\right). \tag{5}$$

5. Si analizzi ora la formola (4), incominciando dal mostrare che essa può essere semplificata senza che i valori numerici subiscano alcuna variazione sensibile, e che può senz'altro adoprarsi l'altra formola:

$$\frac{R'^2}{4d} - \frac{R'}{\pi}(\beta_0 \operatorname{tang}\beta_0 + \log_e \cos\beta_0), \tag{6}$$

data anch'essa dal Kirchhoff, ma da questi ritenuta non esatta.

Infatti dalla (5) si ha subito:

$$q = \frac{1}{e^{2\left(1 + \frac{\beta_0}{\operatorname{tang}\beta_0} + \frac{b}{c}\frac{\pi}{2}\right)}};$$

ma l'esponente di e è molto grande, perchè è assai grande il rapporto $\frac{b}{c}$ e quindi anche il terzo termine. D'altra parte $\frac{\beta_0}{\operatorname{tang}\beta_0}$ è positivo ed assai prossimo ad uno, essendo c piccolissimo, e d non divenendo mai infinitesimo, nè troppo piccolo, per evitare scintille fra le due armature. Nel caso del

[1] Cfr. I. I. Thomson, loc. cit., § 241.

disco già preso ad esempio nelle Note precedenti, si può supporre che l'intervallo $2c$ fra esso e l'anello possa ridursi, malgrado le difficoltà della sospensione di entrambi, a cm. 0,1 o meno; ed essendo $b =$ cm. 0,5, si ha $\frac{b}{c} = 10$, che non è un numero molto grande, ma tale da poter ritenere che la (4) sia praticamente applicabile al condensatore in discorso. Allora l'esponente α di e diventa, prendendo $\frac{\beta_0}{\operatorname{tang} \beta_0} = 1$:

$$\alpha = 2(2 + 5\pi) = 35{,}414;$$

e poichè è anche

$$\log_e 10^{-15} = \overline{35}{,}461\ldots, \text{ ossia } \frac{1}{e^{34{,}539\ldots}} = 10^{-15},$$

così risulta subito che q è minore di 10^{-15}. Quindi l'ultimo termine della (4):

$$-\frac{R'}{\pi} q \operatorname{sen}^2 \beta_0,$$

dove $\frac{R'}{\pi}$ è finito e $\operatorname{sen}^2 \beta_0 < 1$, è assolutamente trascurabile, non potendo influire nemmeno sulla decima cifra decimale.

6. Si chiami ora R il raggio del disco; allora la (6) diventa:

$$\frac{(R + c)^2}{4d} - \frac{R + c}{\pi} (\beta_0 \operatorname{tang} \beta_0 + \log \cos \beta_0),$$

che può scriversi:

$$\frac{R^2}{4d} + \frac{c(2R + c)}{4d} - \frac{R + c}{\pi} (\beta_0 \operatorname{tang} \beta_0 + \log \cos \beta_0), \tag{7}$$

onde risulta subito per la correzione della capacità:

$$C_a = \frac{c(2R + c)}{4d} - \frac{R + c}{\pi} (\beta_0 \operatorname{tang} \beta_0 + \log \cos \beta_0). \tag{8}$$

Indicando, come sempre, con λ la larghezza della striscia addizionale, si ha subito dalla formola precedente:

$$\lambda = \frac{2d\, C_a}{R} = c\left(1 + \frac{c}{2R}\right) - \left(1 + \frac{c}{R}\right) \frac{2d}{\pi} (\beta_0 \operatorname{tang} \beta_0 + \log \cos \beta_0), \tag{9}$$

e se notiamo che $\frac{c}{R}$ è estremamente piccolo e che è moltiplicato per termini piccoli anch'essi, così potremo scrivere sensibilmente:

$$\lambda = c - \frac{2d}{\pi} (\beta_0 \operatorname{tang} \beta_0 + \log \cos \beta_0), \tag{10}$$

la quale ci dice subito che per dischi di raggio assai grande, la larghezza della striscia addizionale è praticamente indipendente dal raggio. In altre parole, la perturbazione prodotta dall'orlo è indipendente dalla curvatura e la correzione della capacità è solo proporzionale alla lunghezza dell'orlo.

Ciò risulta, del resto, anche dalla (2). E poichè nella (10) il secondo termine è generalmente molto piccolo, così si vede che λ è eguale alla metà della larghezza del taglio, diminuita di una piccola quantità.

7. Derivando la (10) (o, ciò che è lo stesso, la (9)) rispetto a d, tenendo presente che

$$\operatorname{tang} \beta_0 = \frac{c}{d}, \quad \text{ossia} \quad \beta_0 = \operatorname{arc\,tang} \frac{c}{d},$$

e che la (10) equivale all'altra espressione

$$\lambda = c - \frac{2d}{\pi} \left\{ \frac{c}{d} \operatorname{arc\,tang} \frac{c}{d} + \log \cos \left(\operatorname{arc\,tang} \frac{c}{d} \right) \right\}, \tag{10'}$$

si ha

$$\frac{\partial \lambda}{\partial d} = -\frac{2}{\pi} \left\{ \frac{c}{d} \beta_0 + \log \cos \beta_0 \right\} -$$

$$-\frac{2d}{\pi} \left\{ \frac{-c}{d^2} \beta_0 - \frac{c^2 d^2}{d^3(c^2+d^2)} + \frac{\operatorname{sen} \beta_0}{\cos \beta_0} \frac{c\, d^2}{d^2(c^2+d^2)} \right\},$$

e poichè è

$$\frac{\operatorname{sen} \beta_0}{\cos \beta_0} = \frac{c}{d},$$

così, svolgendo e riducendo, si ottiene

$$\frac{\partial \lambda}{\partial d} = -\frac{2}{\pi} \log \cos \beta_0. \tag{11}$$

E derivando di nuovo:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial d^2} = -\frac{2c^2}{\pi d (c^2+d^2)},$$

$$\frac{\partial^3 \lambda}{\partial d^3} = \frac{2c^2}{\pi} \frac{(c^2+d^2)+2d^2}{d^2(c^2+d^2)^2},$$

che è una quantità essenzialmente positiva; perciò la perturbazione prodotta dall'orlo e dallo spazio d'aria esistente fra il collettore e l'anello di guardia, cresce o diminuisce con l'aumentare o diminuire della distanza dei piatti. Ciò si vede anche dalla (11), perchè β_0 essendo generalmente assai piccolo e positivo, è: $\log \cos \beta_0 < 0$.

Derivando la (10) rispetto a c si ha

$$\frac{\partial \lambda}{\partial c} = 1 - \frac{2\beta_0}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{c}{d}.$$

Ora sarà

$$1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{c}{d} > 0 ,$$

se

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{c}{d} < \frac{\pi}{2} ;$$

ma ciò avviene sempre, perchè le due quantità c e d sono entrambe positive e d non può mai essere zero; dunque, l'influenza dell'orlo e del taglio sulla capacità del condensatore cresce con l'aumentare della larghezza del taglio, come era da aspettarsi.

8. Dalle espressioni (9) e (10') si scorge subito che se c, d ed R si accrescono o si diminuiscono nello stesso rapporto, i termini tra parentesi rimangono gli stessi; onde, se chiamiamo n il valore numerico del rapporto di similitudine di due determinati condensatori, e se λ e λ' sono le larghezze delle striscie addizionali, si ha senz'altro

$$\lambda' = n \lambda .$$

La quale relazione sussiste anche quando (R essendo sufficientemente grande) soltanto c e d si trovano in quelle condizioni.

Supponendo di confrontare due condensatori che non differiscono che per la grandezza del raggio, e supponendo che questo sia R per l'uno e $R' = n R$ per l'altro, ponendo

$$\beta_0 \operatorname{tang} \beta_0 + \log \cos \beta_0 = k ,$$

dove k è una costante, si ha dalla (8), per la correzione della capacità relativa al nuovo condensatore di raggio R', l'espressione

$$C_{aR'} = C_{aR} + R(n-1) \left\{ \frac{c}{2d} - \frac{k}{\pi} \right\} .$$

9. Confrontando i risultati ottenuti nei paragrafi precedenti con quelli trovati per il condensatore privo di anello di guardia, si giunge alla conclusione che sebbene l'artificio dell'anello diminuisca fortemente la perturbazione creata dall'orlo nella distribuzione elettrica, questa perturbazione seguita a sussistere nel condensatore anche in quel caso e non si annulla se non diviene zero la larghezza del taglio, e presenta nel complesso il medesimo andamento e le medesime leggi che se l'orlo non fosse in presenza dell'anello.

Per formarsi un'idea della grandezza di questa perturbazione quale risulta dalle espressioni teoriche precedentemente esaminate, applichiamo la formola $\lambda = c$ e le (3), (9), (10) al disco circolare per cui è $R =$ cm. 15, $b =$ cm. 0,5 , $c =$ cm. 0,05 , $d =$ cm. 0,1 . Si ha:

da $\lambda = c$:	$\lambda =$ cm. 0,05 ;
dalla (3):	$\lambda =$ cm. 0,04026 ;
dalla (9):	$\lambda =$ cm. 0,04205 ;
dalla (10):	$\lambda =$ cm. 0,04235 .

E per le correzioni di capacità si hanno i seguenti valori:

$C_a =$ cm. 3,7500, equivalente a 1 parte su 150;
$C_a =$ cm. 3,0195, " " " " 186;
$C_a =$ cm. 3,1807, " " " " 176;

che sono rispettivamente trovate prendendo $\lambda = c =$ cm. 0,05, usando il valore di λ ricavato dalla (3), e applicando direttamente la formola (8).

10. Ora vogliamo mostrare che le espressioni (9) e (10) trovate per il condensatore piano valgono sensibilmente anche per la larghezza della striscia addizionale di un condensatore cilindrico munito di anello di guardia, e che perciò si possono estendere all'orlo di quest'ultimo ed alla sua influenza sulla capacità le considerazioni già fatte per l'orlo del condensatore piano, alcune integralmente, altre con lievi modificazioni, quando, per maggiore esattezza, si voglia tenere conto della curvatura della superficie.

Infatti J. J. Thomson e G. F. C. Scarle [1] in un loro studio per la determinazione del rapporto della unità elettromagnetica all'unità elettrostatica ed in cui adoprarono un condensatore cilindrico munito di anelli, dànno per la larghezza della striscia addizionale la seguente espressione

$$(12) \qquad \lambda = 2\left[c\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{tang}^{-1}\frac{c}{d}\right) + \frac{d}{\pi}\log\left(1 + \frac{c^2}{d^2}\right)\right]\left(1 + \frac{1}{4}\frac{d}{R}\right),$$

dove c e d hanno il significato di prima, e R indica il raggio del cilindro interno munito di anelli. E poichè in questa disposizione gli anelli sono due, due essendo gli orli, e poichè la lunghezza del cilindro è da supporsi assai grande, per guisa che ciascun orlo si comporti come se fosse solo, ed inoltre i due termini

$$-\frac{2}{\pi}\operatorname{tang}^{-1}\frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{d}{\pi}\log\left(1 + \frac{c^2}{d^2}\right)$$

non sono, come risulta dai passaggi di calcolo usati dagli autori, che gli sviluppi incompleti di

$$-\frac{2}{\pi}\beta_0 \quad \text{e} \quad -\frac{d}{\pi}\log\cos\beta_0,$$

dove $\beta_0 = \operatorname{arc\,tang}\frac{c}{d}$, così per un solo orlo si ha subito, sostituendo nella (12):

$$\lambda = \left\{c\left(1 - \frac{2}{\pi}\beta_0\right) - \frac{d}{\pi}\log\cos^2\beta_0\right\}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{d}{R}\right),$$

che può scriversi:

$$\lambda = \left\{c - \frac{2}{\pi}\beta_0\frac{c}{d}d - \frac{2d}{\pi}\log\cos\beta_0\right\}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{d}{R}\right).$$

[1] J. J. Thomson e G. F. C. Scarle, Phys. Trans., A. 1870.

E poichè $\frac{c}{d} = \text{tang}\,\beta_0$, risulta:

$$(13) \qquad \lambda = \left\{ c - \frac{2d}{\pi} (\beta_0 \,\text{tang}\,\beta_0 + \log\cos\beta_0) \right\} \left(1 + \frac{1}{4}\frac{d}{R} \right),$$

La quale espressione non differisce dalla (10) che per il fattore $\left(1 + \frac{1}{4}\frac{d}{R}\right)$ vicinissimo all' unità nella maggior parte dei casi, e che non serve che per introdurre la correzione relativa alla curvatura del condensatore cilindrico. Dunque, poichè a meno di quel fattore, la (10) e la (13) hanno la stessa forma, si possono ricavare da quest' ultima, e con la massima facilità, risultati analoghi o perfettamente identici a quelli avuti per l'orlo del condensatore piano e circolare.

Ma la (9) e la (13) presentano anche più grande analogia, e se nel 1° termine del secondo membro della (9)

$$c\left(1 + \frac{c}{2R}\right),$$

noi prendiamo $\frac{c}{R}$ invece di $\frac{c}{2R}$, con che si erra in più della quantità $\frac{c}{2R}$ che è più che trascurabile (per il disco preso ad esempio è eguale a cm. 0,000083), possiamo scrivere la (9) nel seguente modo:

$$\lambda = \left\{ c - \frac{2d}{\pi} (\beta_0 \,\text{tang}\,\beta_0 + \log\cos\beta_0) \right\} \left(1 + \frac{c}{R} \right),$$

la quale, confrontata con la (13), ci dice che se d non è troppo grande (come deve accadere affinchè tutte le formole esaminate sieno sicuramente applicabili), se cioè c è dello stesso ordine di grandezza di $\frac{d}{4}$, allora la (9) è senz' altro applicabile con molta approssimazione anche al condensatore cilindrico, e tanto più, quanto più grande è il raggio del condensatore.

Nella stessa guisa la (10) è rigorosamente applicabile al caso dell'orlo rettilineo, e sensibilmente ad ogni orlo per il quale il raggio di curvatura in tutti i suoi punti sia abbastanza grande.

11. Si consideri ora uno stesso condensatore circolare, oppure se ne considerino due rigorosamente eguali, da usarsi una volta senza anello ed una volta con anello di guardia; e con un metodo qualunque, ma preciso, di confronto, si regoli la distanza fra i dischi dell' uno o dell'altro sinchè essi abbiano esattamente la stessa capacità. Naturalmente, la distanza esistente nell' uno non potrà essere eguale a quella dei dischi nell'altro; infatti, il condensatore senza anello avrà, a parità di distanza, una maggiore capacità ed allora converrà diminuire la distanza fra le armature del primo per

rendere eguali le capacità. In tal caso, dette d e d' quelle distanze, se le formole esaminate rappresentano bene lo stato delle cose, le due espressioni

$$\frac{R^2}{4d} + \frac{R}{2\pi}\left\{\log\frac{4\pi(2d+b)}{e\,d^2} + \frac{b}{2d}\log\left(1+\frac{2d}{b}\right)\right\}$$

$$\frac{R^2}{4d'} + \frac{c(2R+c)}{4d'} - \frac{R+c}{\pi}\beta_0 \operatorname{tang}\beta_0 + \log\cos\beta_0),$$

dove $\beta_0 = \operatorname{arc\,tang}\frac{c}{d'}$, devono dare identici risultati numerici.

Variando allora d, e conseguentemente d', e ripetendo il confronto delle capacità e dei valori numerici per le successive distanze, le due formole resteranno contemporaneamente verificate.

In altra Nota mostrerò alcuni esempi sperimentali.

Mineralogia. — *Sopra alcuni minerali di Val d'Aosta* (1). Nota di Federico Millosevich, presentata dal Socio G. Strüver.

Da qualche tempo mi occupo dello studio dei minerali del Vallone di S. Barthélemy in Val d'Aosta e mi riservo di descrivere compiutamente in avvenire, dopo ulteriori ricerche e possibilmente dopo una visita sopra luogo, il giacimento in cui si trovarono i cristalli di danburite, di cui feci cenno in altra mia Nota (2); tale giacimento è estremamente interessante per ciò che riguarda la minerogenesi e la paragenesi. Per ora il materiale che è a mia disposizione non mi permette conclusioni definitive sotto tal punto di vista; e, non potendo prevedere quando tale studio possa essere ultimato e compiuto, faccio noti per ora alcuni risultati, che credo abbastanza interessanti, dei miei studî sui minerali di Val d'Aosta.

Rodocrosite di S. Barthélemy.

Tale minerale, che non è certo una delle forme di combinazione del manganese più abbondanti in natura, è raro come specie ben definita, avendosi più spesso delle manganocalciti o delle sideriti manganesifere, che non la vera e propria rodocrosite con un tenore elevato e assolutamente preponderante di carbonato manganoso sopra gli altri carbonati. Scarsissime sono le notizie che si hanno circa la sua presenza in Italia: il Colomba (3) la indica semplicemente fra i minerali della Beaume presso Oulx (Alta valle

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

(2) F. Millosevich, *Danburite di S. Barthélemy in Val d'Aosta*. Rend. R. Acc. Lincei, *13*, 1904, 1° sem., 197.

(3) L. Colomba, *Sulla mohsite della Beaume (alta valle della Dora Riparia)* Atti R. Acc. Scienze, Torino, *37*, 1902.

della Dora Riparia) dei quali si riserva di dare più ampia descrizione; Jervis tace della sua presenza in Val d'Aosta e ricorda soltanto [1] l'esistenza di carbonato roseo di manganese negli schisti e in ciottoli erratici al piede dei ghiacciai nei dintorni di Chiesa in Val Malenco; Fuchs e De Launay [2] parlano di carbonato di manganese rosso della miniera di S. Marcel, ma la notizia appare incerta, perchè non confermata da altri investigatori.

Ho constatato la presenza di rodocrosite in cristalli in un campione, che mi fu inviato dall'ottimo mio amico e cultore degli studî mineralogici capitano Alberto Pelloux, e da lui stesso raccolto nelle discariche di vecchi lavori per estrazione di minerale di manganese presso S. Barthélemy.

I cristalli, che misurano fino a 3 mm. di diametro maggiore, presentano soltanto il romboedro fondamentale }100{ con facce curve e distorte: in altre parole si tratta dei soliti cristalli selliformi, così comuni nella serie dei carbonati romboedrici. Colla sfaldatura ho ottenuto dei piccoli romboedri con facce abbastanza piane e perfette dei quali ho misurato con discreta esattezza l'angolo ottenendo un valore medio di 73° 10′. Il teorico secondo Sansoni [3] è di 73° 0′.

Il colore dei cristalli è bruno con riflessi rossastri: ma questa tinta bruna è dovuta certamente ad una alterazione superficiale, perchè, frantumando i cristalli, ci si accorge che la parte interna è di un roseo violaceo piuttosto chiaro: anzi in alcuni cristalli si può osservare una patina nerastra superficiale, dovuta a pirolusite o ad un altro ossido di manganese. Ho eseguita un'analisi quantitativa, scartando naturalmente questi cristalli con patina nerastra, che si possono in certo modo considerare come una pseudomorfosi, ed ho avuto i seguenti risultati:

MnO	56,00
FeO	2,04
CaO	3,33
MgO	tracce
CO^2	[38,63]

L'anidride carbonica fu determinata per differenza, non potendosi dosarla direttamente per la poca quantità di materiale puro disponibile.

Dai dati suesposti la composizione del minerale risulta la seguente:

$MnCO^3$	90,76
$FeCO^3$	3,29
$CaCO^3$	5,95
$MgCO^3$	tracce

(1) G. Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia*. Parte I, 1873, pag. 221.
(2) E. Fuchs e L. De Launay, *Traité des gîtes minéraux* ecc. Paris, 1893, II, 9.
(3) Dana, sixth edition, 1899, pag. 278.

Confrontando quest'analisi con le altre conosciute, si vede che la rodocrosite di S. Barthélemy per la percentuale di carbonato manganoso si avvicina a quella pur ugualmente colorata di Kapnik (Ungheria).

I cristalli si trovano sopra una matrice di quarzo e braunite e sono accompagnati da piccoli cristalli di *quarzo* e di *albite*.

Il carbonato di manganese non cristallizzato è comune poi in tutto il giacimento manganesifero di S. Barthélemy. A tetto e a muro del minerale, che è poi una miscela di braunite e di pirolusite in minor quantità, si trovano grossi banchi formati generalmente di straterelli alternati e in vario modo disposti di materiale quarzoso, talora puro, talora verde per la presenza di *epidoto*, talora di un color roseo grigiastro per la presenza di carbonato misto di manganese e calcio. Su questo carbonato, che è assai diffuso, ho fatto solo dei saggi qualitativi, per la quasi assoluta impossibilità di separarlo dal quarzo, con cui è intimamente commisto, ed ho trovato che contiene in prevalenza carbonato di manganese con quantità considerevole di carbonato di calcio: sarebbe quindi una varietà intermedia fra la calcite e la rodocrosite, una specie cioè di *mangano-calcite*. Bisogna anche notare in questi banchi, che limitano il giacimento minerario, la presenza di una bella varietà di *blenda* di color giallo-rosso disseminata in granuli o in venette nella roccia.

Se dalla osservazione dei minerali che lo costituiscono vogliamo risalire alla origine del deposito metallifero di S. Barthélemy, bisogna anzitutto notare, che la presenza del carbonato manganoso sia puro, sia misto a quantità più o meno grandi di carbonato di calcio e di altri carbonati, dà a questo giacimento un carattere che lo differenzia da quello pur vicino di Pralorgnan nel Vallone di S. Marcel. D'altra parte nessuno dei minerali tanto caratteristici e tanto noti di quest'ultimo giacimento si è trovato a S. Barthélemy, almeno fino ad ora. Come minerale caratteristico non credo si debba considerare l'albite, che del resto si è trovata a S. Barthélemy in rari cristalli, mentre è parte importante del giacimento di Pralorgnan. Il complesso dei fatti osservati a S. Barthélemy farebbe ritenere valida l'ipotesi di Boussingault, che il minerale di manganese si sia deposto allo stato di carbonato da acque, che lo avrebbero tenuto disciolto allo stato di carbonato acido, e che la trasformazione da carbonato in ossido sia stata successiva e soltanto parziale: confermerebbero tale ipotesi anche i cristalli di rodocrosite da me osservati con una alterazione superficiale in ossido di manganese.

L'origine del deposito di Pralorgnan invece parrebbe diversa. Ho istituito, a solo scopo di confronto e senza alcuna pretesa di intraprendere lo studio di sì delicato argomento, delle osservazioni su minerali di Pralorgnan, grazie alla cortesia del prof. Brugnatelli e del capitano Pelloux, che mi favorirono abbondante e scelto materiale: tali osservazioni, unitamente a quelle

di tanti altri che mi precedettero, darebbero maggiori argomenti a sostegno dell'ipotesi, che il minerale di manganese qui sia stato portato in soluzione da acque cariche di silice e precipitato direttamente allo stato di ossido. Anche per l'origine, oltre che per i minerali che lo accompagnano, il giacimento di S. Barthélemy sarebbe diverso da quello di S. Marcel, per quanto la loro vicinanza possa a prima vista far ritenere il contrario; ma, torno a ripetere, che è mia intenzione di approfondire la questione con nuove indagini, perchè parmi più utile e più prudente, allo stato attuale degli studî sulla minerogenesi, piuttosto che azzardare delle ipotesi, sempre criticabili, accumulare il maggior numero di osservazioni di fatto e possibilmente di esperimenti.

Oro cristallizzato di Pralorgnan (S. Marcel).

Molti giacimenti d'oro, sì primarî che secondarî, sono noti in Italia, avendo il valore del metallo fatto dare importanza anche a piccole tracce di esso: ma, per quanto io sappia, non furono finora descritti cristalli d'oro nativo di località italiana. Per tale ragione descrivo qui brevemente un campione con siffatti cristalli proveniente dalla miniera di manganese di Pralorgnan. Esso mi fu inviato dal prof. Luigi Brugnatelli della Università di Pavia, il quale, avendovi riscontrato la presenza dell'oro in cristalli e, sapendo che mi sto occupando dello studio di minerali di Val d'Aosta, ebbe il gentile pensiero di inviarmelo: di che lo ringrazio vivamente.

La presenza dell'oro nella miniera di Pralorgnan è nuova: Jervis (1) parla di una ricerca di minerale d'oro (pirite aurifera) nella regione Laures del territorio di Brissogne, che si estende anche nel territorio di S. Marcel; ma nessuno, che io sappia, ha aggiunto tale minerale al lungo elenco delle specie interessanti di Pralorgnan. Ho potuto confrontare il campione mandatomi dal Brugnatelli con altri inviatimi dal Pelloux ed ho potuto constatarne la perfetta identità, tranne, si intende, la presenza della pochissima quantità d'oro: ciò permette di indicarne la provenienza in modo assoluto e preciso, perchè i campioni di Pelloux furono da lui stesso raccolti sul posto.

L'oro si presenta in minuti cristalli nei filoncelli essenzialmente albitici, che si trovano al tetto del giacimento manganesifero di Pralorgnan ed appunto detti cristalli sono immersi nella *albite* compatta, la quale presenta costantemente anche delle masserelle o delle lamine di *ematite titanifera* e della *clorite* verdastra: in altri campioni della medesima provenienza ho constatato anche la presenza di *granato*, di *quarzo* e di *titanite* in minuti cristalli verdognoli. Di questi filoncelli albitici fece menzione ultimamente Colomba (2) per la *rodonite* cristallizzata che vi si trova. Come si vede,

(1) Loc. cit. pag. 100.

(2) Colomba Luigi. *Rodonite cristallizzata di S. Marcel (Valle d'Aosta).* Atti R. Acc. Scienze Torino, *39*, 1904.

anche per il modo di giacimento e per i minerali che lo accompagnano, la presenza dell'oro a Pralorgnan è di particolare interesse.

I cristalli d'oro sono assai piccoli: uno solo, il migliore, che del resto non raggiunge il mm. di diametro, è riuscito adatto a misure goniometriche, perchè ha faccettine particolarmente lucenti e di buon riflesso.

La combinazione abbastanza semplice che esso presenta è la seguente:

$$\}110\{\ \}111\{\ \}100\{\ \}211\{.$$

Maggior sviluppo ha il rombododecaedro, minore l'ottaedro, minimo il cubo; qualche spigolo del rombododecaedro è troncato da esili faccettine di un icositetraedro di simbolo $\}211\{$: interessante è la presenza di questa forma, che il Dana [1] dà come incerta e che pare assai rara nell'oro, in confronto alla $\}311\{$ molto più frequente. Le facce di $\}110\{$ sono lievemente striate parallelamente allo spigolo di combinazione con $\}111\{$.

Ematite titanifera di Pralorgnan (S. Marcel).

Associata con l'albite contenente tracce d'oro, si trova in quantità della ematite titanifera in lamine grigie, metalliche, nella quale Colomba [2] determinò un contenuto di 0,92 % di biossido di titanio. Questa ematite, benchè molto raramente, pure talvolta si trova in cristalli definiti: io ne devo alcuni alla cortesia dell'amico Pelloux. Sono cristalli laminari molte volte costituiti unicamente dalla base $\}111\{$ e da un prisma esagonale: qualcuno presenta la seguente combinazione:

$$\}111\{\ \}10\bar{1}\{\ \}2\bar{1}\bar{1}\{\ \}100\{\ \}311\{.$$

Anche in questa combinazione predominano la base ed il prisma $\}10\bar{1}\{$, meno sviluppate sono le facce dell'altro prisma $\}2\bar{1}\bar{1}\{$ e del romboedro fondamentale $\}100\{$; gli spigoli tra le facce di questo e la base sono troncati da listerelle sottili che rappresentano il romboedro $\}311\{$: infatti si ha:

$$\}111\{:\}311\{ = \text{misurato } 32^\circ 28'$$
$$\text{calcolato (Kokscharow) } 32^\circ 14' \tfrac{1}{2}.$$

(1) Sixth edition, 1899, pag. 14.
(2) Loc. cit.

Elettrochimica. — *Sopra la formazione elettrolitica degli iposolfiti* [1]. Nota di M. G. Levi e M. Voghera, presentata dal Corrispondente R. Nasini.

In una Nota precedente presentata alla R. Accademia dei Lincei nella seduta del 5 novembre 1905, ci siamo occupati della formazione elettrolitica dell'iposolfito sodico, partendo da soluzioni di solfito e di solfuro ed elettrolizzandole in condizioni diverse. Alla fine di quella stessa Nota noi accennavamo alla possibilità che oltre ad iposolfito si venisse a trovare nel nostro liquido anodico anche del tetrationato, e che la presenza di questo e la sua conseguente decomposizione con deposito di zolfo potesse condurci a calcoli sbagliati di rendimento in iposolfito, facendoci calcolare come derivante da iposolfito quello zolfo che in realtà derivava da tetrationato.

Accennavamo ancora però ad alcune valide ragioni, per le quali la formazione di tetrationato nei nostri casi era resa assai poco probabile. Prima di continuare ora il nostro studio sulla formazione elettrolitica dell' iposolfito, riportiamo i risultati di una serie di esperienze eseguite allo scopo di vedere se, in condizioni confrontabili con quelle delle nostre precedenti esperienze, e confrontabili tra loro, l'ossidazione dell' iposolfito a tetrationato fosse trascurabile di fronte a quella di solfito a solfato o a ditionato e di iposolfito pure a solfato: non era il caso nel nostro studio di riferirci alle esperienze di Thatcher già citate nel nostro precedente lavoro, essendo le nostre condizioni di esperienza molto diverse dalle sue.

Ossidazione elettrolitica del solfito sodico. — Si adoperò per questo scopo una cella senza diaframma contenente 400 cc. di una soluzione al 10 % di solfito sodico (calcolato anidro) alcalina per carbonato sodico: gli elettrodi erano di platino liscio con superficie di 12 cm. q.; si adoperò un' intensità di corrente di 2 Amp., la temperatura salì gradatamente sino a 40°. L'elettrolisi venne continuata per 6 ore, ad ogni ora si prelevavano 5 cc. di soluzione, si portavano a 100 e di questa soluzione si titolavano 10 cc., previa acidificazione con acido acetico, con soluzione titolata di iodio; la diminuzione di titolo in iodio della soluzione elettrolizzata, ci rappresenta evidentemente la quantità di solfito che è sparita dalla soluzione trasformandosi in solfato o in ditionato. Come risulta dalla tabella seguente in 6, ore di elettrolisi il 90 % del solfito esistente in soluzione venne trasformato: nell'ultima colonna della tabella è data, in per cento della quantità totale, la

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova, finito nel febbraio 1906.

quantità di solfito trasformata in eguali intervalli di tempo di 1 ora. Diciamo trasformata e non ossidata, quantunque nelle nostre condizioni di elettrolisi paragonabili a quelle di A. Friessner già ripetutamente citate nel nostro precedente lavoro, non si possa parlare che di ossidazione poichè il solfito non viene affatto ridotto al catodo.

Tempo in minuti	Tensione agli elettrodi	Cc. di soluzione di iodio corrispondenti a 1 cc. di soluzione	Differenze	Ossidazione per ogni ora espressa in % della quantità primitiva.
0	5.5 volt	19.2		
			3.8	
60′	5.2	15.4		19.8
			3.3	
120′	5.1	12.1		17.1
			3.0	
180′	5.8	9.1		15.6
			2.4	
240′	5.8	6.7		12.5
			2.4	
300′	5.7	4.3		12.5
			2.4	
360′	5.5	1.9		12.5
				90.0

Ossidazione elettrolitica dell'iposolfito. — Per avere un elettrolisi di confronto con soluzione di iposolfito, le cose non erano così semplici come per il solfito; infatti, nel caso dell' iposolfito, oltrechè la velocità di trasformazione anodica, era anche importante a conoscersi l' eventuale quantità di tetrationato e di solfato che contemporaneamente potevano formarsi per ossidazione; quindi una complicazione per l'analisi, alla quale poi se ne aggiungeva subito un'altra per il fatto che l'iposolfito viene ridotto al catodo con formazione di idrogeno solforato e di solfito secondo l'equazione

$$Na_2 S_2 O_3 + H_2 = Na_2 SO_3 + H_2 S$$

ed i prodotti di questa reazione vanno ad influire sui risultati della titolazione con iodio. Per raggiungere ciononostante alla meglio il nostro scopo, operammo nel seguente modo: l'elettrolisi fu fatta con diaframma contenente il catodo immerso in soluzione di idrato sodico al 15 %, all' anodo si pose soluzione di iposolfito mantenuta sempre alcalina per idrato sodico: in tal modo, nessun prodotto che possa reagire con lo iodio può passare dal catodo all'anodo. Si elettrolizzò con 2 Amp. e con gli stessi elettrodi delle esperienze precedenti.

A determinati intervalli di tempo si analizzavano delle porzioni di soluzione determinando da una parte il titolo in iodio, e dall'altra la quantità di zolfo precipitabile per aggiunta di acido cloridrico secondo il nostro solito metodo: i due numeri ci davano facilmente la quantità di iposolfito trasformata e quella eventuale di tetrationato. La soluzione di iposolfito adoperata conteneva il 4-2 % di $Na_2 S_2 O_3 \cdot 5 H_2 O$.

Riportiamo nella tabella seguente i risultati ottenuti:

Tempo in minuti	Temperatura	Tensione agli elettrodi in Volta	Cc. di soluzione di iodio corrispond. a 1 cc. di soluz. anodica.	Zolfo calcolato per 100 cc. di soluzione anodica (1)	Zolfo trovato in 100 cc. di soluzione anodica.	Iposolfito presente in 100 cc. di soluzione anodica (2).	Ossidazione in % della quantità primitiva per ogni intervallo di tempo.
0	—	—	cc. 2	gr. 0.542	—	gr. 4.201	—
60′	26°	6.7	» 1.78	0.482	0.477	3.736	11.07 %
120′	33°	6.5	» 1.50	0.406	0.384	3.147	14.01
180′	36°	6.6	» 1.16	0.314	0.289	2.434	16.9
245′	34°	6.6	» 0.76	0.205	0.162 (?)	1.590	20.09
305′	34°	6.8	» 0.34	0.092	0.074	0.713	20.8
							82.87

Dal confronto specialmente dei numeri contenuti nelle colonne V e VI, risulta subito il fatto seguente: la quantità di zolfo trovata è sempre inferiore alla quantità teorica che avrebbe dovuto dare l'iposolfito presente; in quasi tutte le determinazioni le differenze in meno sono così rilevanti da non essere nemmeno tollerabili in una comune determinazione analitica; questo è dovuto principalmente al fatto che le determinazioni venivano necessariamente eseguite su piccoli volumi di soluzione anodica (si riportavano poi col calcolo a 100 cc.), il che evidentemente veniva ad aumentare l'inevitabile errore in meno del nostro metodo d'analisi. Se si pensa però che, qualora fosse stato presente del tetrationato, si avrebbe dovuto trovare sempre più zolfo di quello corrispondente al solo iposolfito, si capisce subito come i nostri numeri sieno sempre dimostrativi e costituiscano una nuova prova dell'assenza di tetrationato nei prodotti anodici delle nostre elettrolisi. I risultati nostri confermano poi ancora quelli già citati di Thatcher ([3]) dai quali risulta come per la formazione di tetrationato dall'iposolfito, sieno necessari potenziali all'anodo piuttosto bassi e precisamente come il processo $S_2 O_3'' \longrightarrow S_4 O_6''$ si compia a potenziali compresi tra — 0,75 e — 0,95 Volt, mentre in tutte le nostre elettrolisi, data la forte intensità di corrente e la elevata tensione agli elettrodi, il potenziale anodico fu sempre necessariamente molto più elevato. Inoltre il fatto stesso che noi tenevamo sempre agitato il liquido anodico con idrogeno dovrebbe, sempre secondo i risultati di Thatcher, impedire assolutamente la formazione di tetrationato nel senso che quello eventuale che si

([1]) Lo zolfo è calcolato supponendo che la soluzione anodica contenga soltanto iposolfito e precisamente quello che risulta dalla titolazione con iodio.

([2]) L'iposolfito è calcolato come $Na_2 S_2 O_3 , 5H_2 O$.

([3]) Zeitschr. f. phys. Chemie, 47, 1904, pag. 641.

fosse formato, si sarebbe anche immediatamente ridotto ad iposolfito secondo la reazione

$$Na_2 S_4 O_6 + H_2 = Na_2 S_2 O_3 + H_2 S_2 O_3$$

e l'acido iposolforoso formatosi sarebbe stato neutralizzato dall'alcali sempre presente.

Da una parte, quindi, la facile e rapida ossidabilità del solfito, e dall'altra la quasi assoluta impossibilità di trasformazione dell'iposolfito a tetrationato nelle nostre condizioni di elettrolisi, convincevano sempre più che la formazione di tetrationato non poteva per nulla alterare le nostre conclusioni; continuammo quindi lo studio sistematico della nostra formazione elettrochimica di iposolfito in relazione ai diversi fattori che la possono influenzare.

Influenza del materiale costituente l'anodo. — Furono eseguite diverse elettrolisi con elettrodi di platino platinato, di nickel, di ferro, di piombo e di piombo perossidato per vedere se e quale influenza esercitasse sul rendimento in iposolfito il materiale anodico. Le elettrolisi vennero sempre eseguite con diaframma, con catodo di platino e con anodi di metalli diversi sempre della superficie di 12 cmq. La soluzione di solfuro veniva fatta con sale cristallizzato che non dava o quasi reazione di polisolfuro. Si tenne sempre una concentrazione di circa il 30 % di sale cristallizzato con 5 molecole d'H_2O; la soluzione anodica di solfito fu sempre al 17 % circa; la temperatura oscillò sempre intorno a 25°.

Riassumiamo nella tabella seguente i risultati ottenuti, facendoli seguire dalle necessarie osservazioni riguardanti le singole elettrolisi ed il risultato generale delle stesse.

Materiale costituente l'anodo . . .	Platino platinato	Nickel	Piombo	Piombo perossidato	Ferro
Durata dell'elettrolisi in ore (circa) .	6	8	8 ½	7 ½	6 ½
Intensità di corrente in Ampères . . .	2	2	2	2	2
Densità anodica » per 1 dmq.	16.6	16.6	16 6	16.6	16.6
Tensione agli elettrodi in Volta . .	5.7	7,9-5,9	6.9	—	6.6
Rame deposto gr.	14.6	19.33	20.01	18.43	15.32
Ampère-ora	12.3	16.3	16.9	15.5	13
Iposolfito trovato gr..	9.004	2.218	4.938	2.969	1.777
» teorico »	36.28	48.085	49.85	45.72	38.35
Rendimento per %	24.8	4.6	9.9	6.4	4.6

Per quanto riguarda l'*anodo platinato* non c'è niente da osservare, se non che durante tutta l'elettrolisi si osservò all'elettrodo un abbondante sviluppo d'ossigeno che lasciò prevedere un discreto rendimento in iposolfito,

come in realtà si ottenne. L'*anodo di nickel* prima di essere adoperato venne riscaldato ad una fiamma; all'inizio dell'elettrolisi si aveva all'anodo sviluppo d'ossigeno e l'elettrodo funzionava come passivo senza che traccie visibili del nickel passassero in soluzione; dopo un po' di tempo cominciò a formarsi del solfuro di nickel e la soluzione agli elettrodi si abbassò contemporaneamente da 7,9 Volt a 5,9 Volt. Per l'analisi, si separò per filtrazione il solfuro precipitato e nel filtrato si determirò lo zolfo nel solito modo: il precipitato di solfuro venne poi disciolto in acqua regia ed il nickel determinato come ossido risultò corrispondente e gr. 0,342.

Per l'*anodo di piombo* non si osservò alcun fatto speciale, senonchè dopo l'elettrolisi il piombo apparve ricoperto di uno strato scuro di perossido e forse in parte anche di solfuro.

L'anodo di *piombo perossidato* venne preparato elettrolizzando una soluzione diluita di acido solforico fra elettrodi di piombo che fungevano alternativamente da anodi e da catodi; si ottenne in questa maniera uno strato resistente e continuo di PbO_2.

Dopo l'elettrolisi col solfito e solfuro, l'anodo appariva ricoperto di uno strato nero di solfuro di piombo. Per l'*anodo di ferro* si osservò, durante tutta l'elettrolisi, abbondante formazione di solfuro, finchè si dovette sospendere, essendo enormemente aumentata la resistenza della cella. Uno sguardo generale ai risultati ottenuti ci dice subito che la nostra reazione non può andare che con elettrodi di platino e che si ottengono migliori risultati col platino platinato che col platino liscio; in tutti gli altri casi in cui l'elettrodo viene attaccato, il rendimento è naturalmente minore, minimo per l'anodo di nickel e di ferro per i quali è massima la formazione del solfuro metallico.

Influenza della concentrazione in solfito. — Vennero eseguiti due elettrolisi usando come liquido anodico soluzioni di solfito meno concentrate delle precedenti e mantenendo sempre costante la solita concentrazione in solfuro: si elettrolizzò naturalmente sempre in modo che restasse presente un eccesso di solfito di cui ci si accorgeva all'atto del trattamento con HCl. Riportiamo i risultati ottenuti che non esigono ulteriori spiegazioni: il diminuire della quantità di solfito presente fa diminuire notevolmente il rendimento fino quasi ad annullarlo.

	I.	II.
Liquido anodico . . .	350 cc. soluz. Na_2SO_3 al 8,5 % + 20 cc. soluz. Na OH al 40 %	350 cc. soluz. Na_2SO_3 al 4,2 % + 20 cc. soluz. Na OH al 40 %
Anodo	platino liscio	platino liscio
Durata dell'elettrolisi .	ore 6	4
Intensità di corrente .	2 Amp.	2 Amp.

	I.	II.
Densità anod. " .	$\frac{16.6 \text{ Amp.}}{1 \text{ dmq.}}$	$\frac{16.6 \text{ Amp.}}{1 \text{ dmq.}}$
Tensione agli elettrodi .	7.4 — 6 Volt	7.3 — 6.3 Volt
Rame deposto	gr. 13.88	gr. 9.55
Ampère-ora	11.7	8
Iposolfito trovato . . .	gr. 3.09	traccie
" teorico . . .	gr. 34.5	—
Rendimento	9 %	—

La I di queste elettrolisi in cui la concentrazione del solfito era la metà della solita, diede già un rendimento molto più basso; è da osservare però che in questo caso c'era più alcali presente del solito e questo, come vedremo, influenza notevolmente il rendimento: nella II elettrolisi invece eseguita in condizioni di alcalinità confrontabili con la I il rendimento in iposolfito divenne quasi nullo.

Notevole il fatto che in tutte due le elettrolisi l'aumentata quantità di alcali presente fu la probabile causa di una notevole formazione di solfuro sodico all'anodo, che si dovette sempre separare con carbonato di cadmio. Queste elettrolisi confermano anche in parte il dubbio espresso a proposito dell'elettrolisi IV nella nostra Nota precedente, che cioè il basso rendimento ottenuto allora fosse dovuto, oltrechè alla più bassa temperatura, anche alla minore concentrazione in solfito.

Influenza dell'alcali presente nel liquido anodico. — Il fatto che aumentando l'alcalinità del liquido anodico aumentava notevolmente la quantità di solfuro presente nello spazio anodico dopo l'elettrolisi, faceva presupporre che si compiesse in queste condizioni a preferenza una reazione tra lo zolfo-ione migrante e l'alcali, e che quindi la presenza di quest'ultimo anche in piccola quantità portasse ad una diminuzione di rendimento in iposolfito.

La supposizione venne confermata dall'esito delle elettrolisi che qui riportiamo e che furono eseguite con elettrodi di platino liscio in condizioni diverse di alcalinità: nelle due prime elettrolisi si aggiunsero alla soluzione di solfito quantità diverse di soluzione di idrato sodico, nella III non si aggiunse affatto soda, ma il liquido restò tuttavia sempre alcalino per l'eccesso di carbonato sodico presente nella soluzione di solfito.

	I.	II.	III.
Titolo della soluz. anod. prima dell'elettrolisi; 1 cc. corrisponde a .	2.54 cc di $HCl\frac{N}{1}$	3.21 cc.	1.9 cc.
Intensità di corr. . .	2 Amp.	2 Amp.	2 Amp.

	I.	II.	III.
Densità anod. " . .	16.6 Amp. / 1 dmq.	16.6 Amp. / 1 dmq.	16.6 Amp. / 1 dmq.
Tensione agli elettrodi	5.6 — 6.1 Volt	5.6 Volt	5.7 Volt
Durata	6 ore	6 ore	6 ore
Rame deposto . . .	gr. 14.1	gr. 13.7	gr. 14.4
Ampère-ora	11.9	11.5	12.1
Iposolfito trovato . .	gr. 3.664	gr. 1.936	gr. 6.118
" teorico . .	gr. 35.1	gr. 33.92	gr. 35.69
Rendimento	10.4 %	5.7 %	17.1 %

Mentre nelle due prime elettrolisi si trovò una forte quantità di solfuro all'anodo, non se ne trovò affatto nella III; quest'ultima diede anche il rendimento massimo in confronto di tutte le elettrolisi precedenti nelle quali si aggiungeva sempre un po' d'alcali nel liquido anodico: evidentemente è lo zolfo-ione che può reagire con l'idrato sodico, mentre non reagisce col carbonato che rende alcalina la soluzione di solfito.

Fisica. — *Ricerche su un nuovo elemento presentante i caratteri radioattivi del torio.* Nota di G. A. Blanc, presentata dal Corrispondente A. Sella.

Al primo Congresso internazionale di Radiologia riunitosi a Liegi nel settembre scorso, venivano da me comunicati (1) i risultati di ricerche proseguite per più di un anno allo scopo di determinare la natura delle sostanze radioattive contenute nei sedimenti formati dalle acque delle sorgenti termali di Echaillon e di Salins-Moutiers in Savoia, dei quali avevo avuto già campo di occuparmi in una precedente Nota (2).

Questi sedimenti presentavano a differenza di quelli sino allora studiati da varî fisici la particolarità di emettere un'emanazione simile a quella dei sali di torio e capace come quest'ultima di produrre un'attività indotta riducentesi a metà in circa undici ore, analogamente a ciò che si osserva nel caso dell'attività indotta del torio.

Nella suddetta Nota al Congresso di Liegi annunciavo di essere riuscito a separare dalla massa dei sedimenti stessi alcuni prodotti i quali pur pre-

(1) G. A. Blanc, *Sur la nature des substances radioactives contenues dans les sédiments d'Echaillon et de Salins-Moutiers.* Comptes-Rendus, 1er Congrès intern. de Radiologie, Liège 1905.

(2) Philosophical Magazine, gennaio 1905.

sentando dei caratteri radioattivi (costanti di disattivazione dell'emanazione e dell'attività indotta) simili a quelli del torio, erano dotati di un'attività e di un potere emanante assai superiori a quelli di un egual peso del sale torico corrispondente.

Tra gli altri descrivevo la separazione di una piccola quantità di idrati, in gran parte di ferro, i quali mostravansi dotati di un'attività e di un potere emanante varie centinaia di volte superiori a quelli di un egual peso di idrato di torio.

L'ipotesi di una separazione del prodotto noto sotto il nome di *torio X* da torio eventualmente contenuto nei sedimenti, era assolutamente da escludersi pel fatto che l'attività dei prodotti da me ottenuti, invece di diminuire col tempo, come il torio X, andava aumentando gradatamente sino a raggiungere un massimo, qualche settimana dopo la loro preparazione, massimo al quale si manteneva poi costante nel tempo.

Rimaneva peraltro da considerare l'ipotesi che la forte attività dei prodotti da me estratti dai fanghi potesse essere dovuta a tracce di uno degli elementi radioattivi già noti. Ora la presenza di radio o di attinio (emanio) veniva esclusa in modo non dubbio dalle determinazioni fatte intorno alle leggi di disattivazione dell'emanazione e dell'attività indotta. Come è noto, la disattivazione delle emanazioni del radio e dell'attinio segue la legge esponenziale comune a tutti i processi radioattivi, riducendosi l'attività a metà rispettivamente in 4 giorni e in 3 secondi. Nel caso degli idrati estratti dai sedimenti, l'attività dell'emanazione si riduceva invece, come ho mostrato, di metà in circa un minuto primo, similmente a ciò che si verifica nel caso dell'emanazione torica.

Così pure l'attività indotta dai miei prodotti era di tipo torio spiccatissimo, riducendosi essa a metà in circa undici ore. È evidente peraltro che la presenza di radio o di attinio avrebbe certamente provocato una modificazione notevole nell'andamento di tale processo, vista la grande differenza esistente tra i tempi caratteristici (radio: 27 minuti primi; attinio: 40 minuti primi). Aggiungerò che in causa della tendenza che hanno i sali di radio allo stato solido di mantenere occlusa l'emanazione che essi vanno producendo, le verifiche suddette vennero anche eseguite coi prodotti allo stato di soluzione cloridrica. In quanto poi alla possibilità di attribuire la forte attività dei miei preparati a tracce di sostanze non producenti emanazione, come il polonio o radio-tellurio ed il radio-piombo, essa era da scartarsi, visto il loro forte potere emanante; il rapporto esistente tra l'attività diretta ed il potere emanante dei varî idrati da me ottenuti era, dopo raggiunto lo stato di equilibrio radioattivo, quello stesso riscontrato in esperienze di controllo per l'idrato di torio.

La conclusione da me tratta da questi fatti fu, come dissi al Congresso di Liegi, che i fanghi di Echaillon e di Salins-Moutiers contenevano un

nuovo corpo presentante caratteri radioattivi simili a quelli dei sali ordinari di torio, e che le proprietà radioattive mostrate da questi ultimi dovevano secondo ogni probabilità attribuirsi a tracce del nuovo elemento in essi contenute e da esse difficilmente separabili in causa di una grande analogia di caratteri chimici.

Al medesimo Congresso venne letta una Nota di Sir William Ramsay riferentesi ai risultati ottenuti nel Laboratorio di University College a Londra dal sig. O. Hahn; questi, tentando di estrarre il radio contenuto inr esidui di un minerale ricco di torio, detto torianite, aveva ottenuto dei prodotti i quali pur producendo un'emanazione simile a quella del torio, presentavano un'attività immensamente superiore a quella di un eguale peso di questo corpo, senza che si potesse attribuire tale attività alla presenza di radio o attinio. Questi risultati del sig. Hahn erano del resto stati preannunziati in una Nota preliminare sino dal maggio (1), Nota nella quale esso emetteva l'opinione che i fenomeni da me osservati coi fanghi di Echaillon e di Salins-Moutiers, come pure altri dello stesso genere riportati dai sigg. Elster e Geitel (2) dovessero attribuirsi alla sostanza medesima contenuta nella torianite.

Ora, se si ricordano i lavori di Hoffmann e Zerban (3) i quali hanno dichiarato aver estratto dalla gadolinite del torio inattivo, si comprenderà come la questione della identità di questo nuovo elemento con l'ipotetico costituente radioattivo dei sali di torio mi sia sembrata di tale importanza, da richiedere una serie di esperienze accurate aventi per iscopo di stabilire colla maggior esattezza possibile i caratteri radioattivi di esso, confrontandoli volta per volta con quelli presentati nelle medesime condizioni degli ordinari sali di torio.

Durante il corso delle mie esperienze è comparso un lavoro del sig. Hahn nel quale sono riportati degli sperimenti in parte simili ai miei. Credo utile tuttavia riportare in dettaglio i risultati da me ottenuti, i quali oltre a confermare in modo definitivo l'identità dei fenomeni osservati da Hahn e da me, dimostrano in modo evidente che l'attività presentata dai sali di torio ordinari, finora creduta una proprietà dell'atomo di questo elemento, va invece attribuita alla presenza in essi di un nuovo elemento intensamente attivo, da essi molto difficilmente separabile in causa di una grande similitudine di proprietà chimiche.

Passo quindi a descrivere le mie esperienze, le quali sono state eseguite in parte coi prodotti da me estratti dai fanghi durante lo scorso anno, ed in parte con preparati assai più attivi che mi sono stati procurati dal

(1) Zeitschrift für Phys. Chem., 9 maggio 1905.
(2) Physik. Zeitschr., 1 febbraio 1905.
(3) Ber. deutsch. chem. Ges., 1903, pag. 3093.

dott. Angelucci, col quale mi sto ora occupando dello studio del nuovo elemento.

Separazione del prodotto noto sotto il nome di torio X. — Nel 1902 Rutherford e Soddy, sperimentando con composti di torio, videro che era possibile, mediante una unica operazione chimica, separare da essi delle quantità piccolissime di materia dotate di un'attività immensamente superiore a quella di un egual peso di torio. Se, per esempio, da una soluzione di nitrato di torio si precipita questo corpo alle stato d'idrato mediante ammoniaca, e si evapora il liquido risultante dalla filtrazione, si osserva che gran parte dell'attività e quasi tutto il potere emanante appartengono al residuo di questa evaporazione, sebbene in esso non esistano tracce apprezzabili di torio, essendo esso in massima parte costituito da impurità contenute nel nitrato. Ripetendo più volte l'operazione suddetta, si ottengono dei residui sempre meno attivi, finchè si finisce coll'avere da una parte dell'idrato di torio il quale non produce più emanazione e la cui attività misurata dalla radiazione diretta è ridotta al 25 % del valore primitivo, e dall'altro dei residui, alle volte imponderabili, presentanti il 75 % dell'attività diretta e la totalità del potere emanante prima posseduti dal sale di torio.

Coll'andare del tempo tuttavia l'idrato *disemanato* va riacquistando le perdute proprietà, mentre contemporaneamente i residui del liquido filtrato si vanno disattivando.

Rutherford e Soddy interpretarono i fenomeni suddetti coll'ammettere, che una parte degli atomi del torio si vadano continuamente trasformando in atomi di un'altra specie di materia radioattiva alla quale essi diedero il nome di torio X. Questo prodotto di trasformazione è, a differenza del torio, solubile in ammoniaca. L'emanazione torica sarebbe poi alla sua volta un prodotto della disintegrazione dell'atomo di torio X. I due fenomeni, della disattivazione del torio X e della riattivazione del torio dal quale esso è stato separato, si possono rappresentare mediante due equazioni del solito tipo esponenziale, e cioè rispetttivamente

$$I_t = I_0\, e^{-\lambda t} \quad ; \quad I_t = I_0\,(1 - e^{-\lambda t})$$

in cui I_t è l'attività ad un tempo t qualunque, I_0 l'attività ad un tempo che si sceglie per iniziale, e la base dei logaritmi ordinari e λ una costante caratteristica che ha lo stesso valore nei due casi. Le curve che rappresentano i due fenomeni, sono complementari l'una dell'altra, la somma delle attività del torio e del torio X mantenendosi sempre costante. Nei sali di torio in condizioni normali, vale a dire nei quali l'attività si mantiene sensibilmente costante, bisogna ammettere che la quantità di torio X formata in ogni istante compensi esattamente la quantità di quello già formato che si disintegra.

Ora, come ho detto altrove, gli idrati attivi ottenuti dai fanghi mostrano dopo la loro preparazione un incremento di attività che perdura per un periodo di tempo più o meno lungo, e che può anch'essere di qualche settimana. Ciò mi condusse a tentare di ripetere l'esperienza di Rutherford e Soddy. A tale uopo un precipitato di idrati preparato alcune settimane prima e di attività tre mila volte superiore a quella di un ugual peso di torio, venne sciolto in acido cloridrico e riprecipitato con ammoniaca; dopo filtrazione, il liquido venne evaporato e calcinato per eliminare i sali di ammonio; il leggerissimo residuo così ottenuto venne quindi raccolto. L'operazione diede ottimi risultati; gl' idrati appena precipitati non mostravano più che il 25 o il 30 % della loro attività totale; in quanto al potere emanante, esso non si manifestava più se non in proporzioni minime. Il residuo dell'evaporazione del liquido filtrato mostrava invece una notevole attività ed emanava in modo rimarchevole. Dopo un breve periodo di comportamento irregolare, analogo a quello osservato da Rutherford e Soddy col torio, l'attività ed il potere emanante del residuo cominciarono a decrescere mentre contemporaneamente quelli degli idrati andavano aumentando.

Allo scopo di paragonare questi risultati con quelli che si ottengono operando col torio, alcuni grammi di sale di torio vennero precipitati con ammoniaca in condizioni, per quanto possibile, identiche.

Le misure della disattivazione dei residui dei liquidi filtrati sono riportate nelle seguenti tabelle:

Torio X estratto dal torio			Residuo evaporazione filtrato di Echaillon		
	Attività			Attività	
tempi in ore	val. calc.	val. oss.	tempi in ore	val. calc.	val. oss.
0.0	—	100.0	0.0	—	100.0
5.5	—	104.0	11.0	—	105.0
52.2	82.6	83.1	19.2	102.9	100.0
94.3	60.1	62.3	49.6	84.1	84.1
120.0	50.2	49.9	96.0	60.7	61.6
149.7	40.9	41.3	115.2	53.1	53.0
190.0	30.8	29.4	169.2	36.4	36.5
214.5	26.0	24.9	216.5	26.1	25.8
241.0	21.6	20.8	233.2	23.2	22.6

Da queste due serie di misure, avendo cura di eliminare i valori corrispondenti al periodo di irregolarità iniziale, sono stati calcolati col metodo dei minimi quadrati i valori delle costanti che compariscono nella equazione (1) della pagina 4, le quali sono risultate: pel torio, $\lambda = 0.00696$ e pei prodotti estratti dal fango, $\lambda = 0.0070$, assumendo per unità di tempo l'ora. Rutherford dà per la costante di disattivazione del suo torio X il valore $\lambda = 0.0072$.

In quanto poi alla riattivazione degli idrati, essa diede i risultati riportati qui apppresso:

Idrato di torio			Idrati dai sedimenti		
	Attività			Attività	
tempi in ore	val. calc.	val. oss.	tempi in ore	val. calc.	val. oss.
0.0	—	20.8	0.0	—	22.4
18.5	—	29.4	5.9	—	23.9
41.0	—	43.5	21.6	—	31.3
66.5	52.0	55.5	48.0	42.0	45.4
87.5	64.0	64.9	77.2	58.5	62.5
105.8	73.1	76.9	100.0	70.5	71.4
130.5	83.5	83.3	148.0	90.3	90.0
154.8	89.1	89.3	175.4	98.5	98.5

I valori calcolati sono stati ottenuti applicando la formola 2 della pagina 4, e prendendo per λ i valori trovati nel caso del torio X.

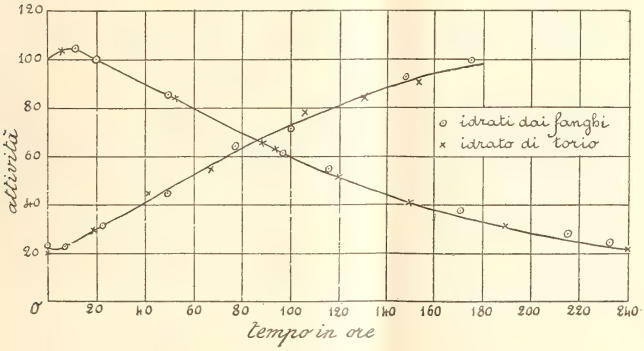


Fig. 1.

Queste misure della riattivazione degli idrati non furono potute proseguire al di là di un dato limite di tempo, essendochè l'attività acquistata dai prodotti rendeva molto difficili delle misure esatte coll'apparecchio sensibile da me adoperato. Esse bastano tuttavia a mostrare l'identità di comportamento del torio e del mio preparato. Le curve corrispondenti ai due fenomeni di disattivazione e di riattivazione sono rappresentate alla fig. 1.

Emanazione. — Benchè siano state già da me pubblicate delle misure fatte sulla velocità di disattivazione dell'emanazione generata dai preparati

estratti dai fanghi di Echaillon, credo utile riportare qui i risultati di esperienze da me fatte allo scopo di paragonare direttamente la legge di decremento dell'attività di quest'emanazione con quella corrispondente all'emanazione torica.

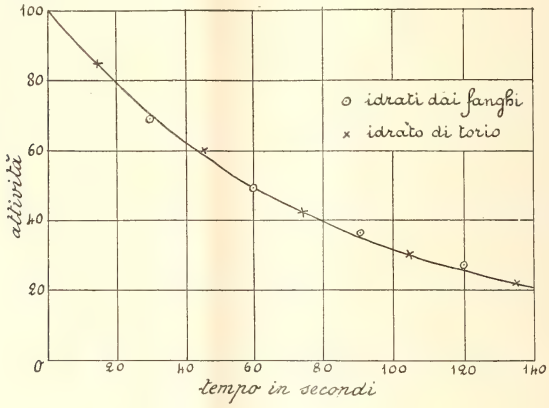


Fig. 2.

Sono qui riportati i risultati di due delle serie di osservazioni da me eseguite, insieme ai valori calcolati col metodo dei minimi quadrati, applicando la formola (1) della pagina 4.

Emanazione del torio			Emanazione dei prodotti di Echaillon		
	Attività			Attività	
tempi in secondi	val. calc.	val. oss.	tempi in secondi	val. calc.	val. oss.
0	100.1	100.0	0	97.9	100.0
15	84.2	83.7	15	83.2	82.9
30	71.4	71.6	30	70.8	68.9
45	59.6	60.1	45	60.1	58.1
60	50.6	50.7	60	51.2	50.0
75	42.2	42.5	75	43.5	43.2
90	35.8	36.1	90	37.0	36.5
105	29.9	29.9	105	31.5	31.1
120	25.3	25.4	120	26.7	26.3
135	21.2	21.6	135	22.8	23.2
150	17.9	17.8			

Nelle curve della fig. 2 sono segnati alternativamente un valore corrispondente alla prima di queste serie, ed un valore corrispondente alla

seconda. Per la costante ho trovato i valori seguenti, e cioè pel torio $\lambda = 0.0115$ e pel mio preparato $\lambda = 0.0108$. Che questi valori si possano considerare come concordanti, lo prova poi il fatto che in un'altra serie di misure eseguita col prodotto estratto dai fanghi ho trovato per la costante λ il valore 0.0120.

In una prossima Nota riferirò intorno ad altre esperienze le quali anch'esse dimostrano in modo indiscutibile l'identità dei caratteri radioattivi dei sali di torio con quelli presentati dal nuovo elemento.

V. C.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1906). Fasc. 6°. 1° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 9°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VI. Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Fasc. 1°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 marzo 1906.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Nasini e *Levi*. Sulla radioattività della sorgente di Fiuggi presso Anticoli . . . . Pag. 307
Marcolongo. Sugli integrali delle equazioni dell'elettrodinamica (*) . . . . . » 308
Magini. Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore (pres. dal Corrisp. *Battelli*) . . . . . » »
Millosevich. Sopra alcuni minerali di Val d'Aosta (pres. dal Socio *Strüver*) . . . . . » 317
Levi e *Voghera*. Sopra la formazione elettrolitica degli iposolfiti (pres. dal Corrisp. *Nasini*) . » 322
Blanc. Ricerche su un nuovo elemento presentante i caratteri radioattivi del torio (pres. dal Corrisp. *Sella*) . . . . . » 328

ERRATA-CORRIGE

A pag. 286 lin. 4, invece di: valori trovati 73°, 49′-75°, 58′ legg.: 73°, 49′-73°, 58′.
» » » 10, » » valore teorico 59°, 56′ legg.: valore teorico 19°, 56′.
» 287 » 24, » » $c = 1{,}53773$ legg.: $c = 1{,}53798$.

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. *Roma 1° aprile 1906.* **N. 7.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° aprile 1906.

Volume XV.° — Fascicolo 7°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° aprile 1906.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica.* Nota del Corrispondente G. Castelnuovo.

In varie ricerche sulle curve algebriche si presentano, accanto alle note serie *lineari*, certe serie *algebriche* di gruppi di punti. E si deve decidere se una data serie algebrica sia contenuta in una serie lineare dello stesso ordine, e dimensione più elevata, oppur no; giacchè solo nel secondo caso lo studio della serie costituisce un problema essenzialmente nuovo. Sotto l'aspetto algebrico, limitandoci a considerare serie ∞^1, la questione può esser posta così.

È noto che ogni serie algebrica ∞^1, giacente sulla curva algebrica

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

può rappresentarsi mediante *due* equazioni razionali in x, y, contenenti algebricamente un parametro, o razionalmente due parametri ξ, η legati da una relazione algebrica

$$\varphi(\xi, \eta) = 0; \tag{2}$$

siano

$$P(x, y\ ;\ \xi, \eta) = 0 \quad , \quad Q(x, y\ ;\ \xi, \eta) = 0 \tag{3}$$

le due equazioni nominate.

In corrispondenza ad ogni *punto* (ξ, η) della *curva* φ, la (1) e le (3) devono avere un certo numero finito $n > 0$ di soluzioni (x, y) comuni, indi-

viduanti un gruppo di n punti della curva f; al variare di (ξ, η) il gruppo descrive una *serie algebrica* ∞^1, *di ordine* n. Un punto generico (x, y) di f appartiene ad un certo numero finito $\nu > 0$ di gruppi della serie, dove ν, *indice* della serie, è il numero delle soluzioni (ξ, η) delle (2) e (3) in corrispondenza a quei valori di x, y.

Ora si osservi che anche una sola equazione algebrica

$$R(x, y\ ;\ \xi, \eta) = 0 \tag{4}$$

definisce una serie algebrica ∞^1 sopra la curva f. Ma questa serie, come si riconosce facilmente, presenta la particolarità di esser contenuta in una serie lineare dello stesso ordine. E sussiste pure la proprietà inversa.

In conseguenza, la questione proposta consiste nello stabilire un criterio per decidere *se il sistema delle quattro equazioni* (1), (2), (3), *aventi infinite soluzioni comuni, possa esser sostituito da un sistema equivalente composto di tre sole equazioni* (1), (2), (4) [1].

Il criterio, che viene esposto in questa Nota, esige solo la conoscenza del genere p della curva f, ed inoltre dei caratteri numerici della serie algebrica, che sono l'ordine n, l'indice ν, ed il numero d dei *punti doppi*, in ciascuno dei quali vengono a coincidere due punti di uno stesso gruppo della serie.

Vedremo infatti, nel n° 1, che, noti n, ν e p, si può fissare un limite superiore per d, e che, quando il limite è raggiunto, allora, ed allora soltanto, la serie algebrica fa parte di una serie lineare d'ordine n.

Questo criterio viene applicato, nel n° 2, a dimostrare un lemma notevole sulle serie algebriche dovuto al Severi [2], di cui egli approfitta per stabilire varie proprietà delle superficie irregolari, e, in particolare, la relazione fondamentale tra l'irregolarità ed il numero degli integrali di Picard di prima specie appartenenti alla superficie. Nella stessa mia dimostrazione di quest'ultimo teorema, pur fondata su concetti diversi, ho dovuto ricorrere a quel lemma per evitare complicate discussioni di *Analysis situs*. Vista dunque l'importanza del lemma, pur riconoscendo i pregi ed il rigore della dimostrazione trascendente che il Severi ne dà, era sorto in me il desiderio di ritrovare quella proposizione per una via più conforme alla sua natura algebrica. Così ebbe origine la breve Nota che segue. La quale contiene ancora, nel n° 3, una nuova interpretazione del risultato del n° 1; e, nel n° 4, un complemento ad un altro risultato del Severi relativo alle superficie che contengono due fasci di curve unisecantisi.

[1] Si ricordi che, nel valutare l'equivalenza dei due sistemi, ammettiamo si possa trascurare un numero finito di soluzioni (x, y), o (ξ, η), cui corrispondano valori indeterminati per ξ, η, o per x, y, rispettivamente. Ciò equivale, in linguaggio geometrico, a fare astrazione dagli eventuali punti di f, che fossero comuni a tutti i gruppi della serie.

[2] *Il teorema di Abel sulle superficie algebriche*, n. 1 (Annali di Matematica, s. III, t. XII).

1. Sopra la curva f, di genere p, sia data una serie algebrica ∞^1, γ_n, di ordine n e indice ν. Noi supporremo la serie priva di punti fissi (comuni a tutti i suoi gruppi) ed irriducibile, tale cioè che i suoi gruppi non siano composti coi gruppi di due serie algebriche di ordini inferiori. La rappresentazione analitica (1), (2), (3) della serie fa vedere che essa ha origine da una *corrispondenza algebrica* (n, ν) tra due curve f, φ, in virtù della quale ad ogni punto di φ corrispondono n punti di f, formanti un gruppo della γ_n, mentre ad ogni punto di f corrispondono ν punti di φ, formanti un gruppo di una nuova serie algebrica γ_ν, di ordine ν e indice n; sia π il genere di φ. I numeri d e δ dei punti doppi delle due serie γ_n, γ_ν danno i numeri delle *coincidenze* della corrispondenza su f e φ, od anche i numeri dei *punti di diramazione* che giacciono su φ ed f, rispettivamente.

Insieme alle due curve f e φ, conviene spesso considerare una terza curva K, i cui punti rappresentano le singole coppie della corrispondenza nominata [1]. Questa curva K ha, nello spazio a quattro dimensioni (x, y, ξ, η), le equazioni (1), (2), (3), ed appartiene per conseguenza alla superficie

$$(S) \qquad f(x, y) = 0 \quad , \quad \varphi(\xi, \eta) = 0 ,$$

che è la intersezione dei *coni* (a tre dimensioni) proiettanti le curve piane f, φ dalle rette all'infinito dei piani $\xi\eta$, xy rispettivamente. La curva K contiene due *involuzioni* (serie algebriche d'indice 1), la prima d'ordine ν e genere p segata dai piani del *cono* f, la seconda d'ordine n e genere π segata dai piani del *cono* φ.

Fra il genere P della curva K ed i caratteri sopra indicati passano le due relazioni (di Zeuthen)

$$(5) \qquad 2P - 2 = 2n(\pi - 1) + d = 2\nu(p - 1) + \delta .$$

Ricordato ciò, costruiamo sulla curva f una qualsiasi serie lineare, non speciale, g_{n-1+p}^{n-1}, di ordine $n - 1 + p$ e dimensione $n - 1$. Dato l'arbitrio nella scelta di un gruppo della serie, si può sempre ottenere che un gruppo prefisso della γ_n non formi parte di nessun gruppo di quella serie lineare ∞^{n-1}. Allora il problema algebrico di determinare quei gruppi di γ_n, che sono contenuti in gruppi della serie lineare, è *determinato*, ed ammette un numero finito $z \geqq 0$ di soluzioni. Il numero z è fornito da una formola notevole dovuta al Segre [2]. Questa assegna il numero dei gruppi di $r + 1$

[1] Si veda, ad es., il § 10 della *Introduzione alla Geometria sopra un ente algebrico* del Segre (Annali di Matematica, s. II, t. XXII),

[2] *Sulle varietà algebriche composte di una serie* ∞^1 *di spazi* (Rendiconti della R. Accad. d. Lincei, ottobre 1887); oppure *Introduzione*... citata, § 13. Un'altra dimostrazione di quella formola, nel caso particolare $\pi = 0$, si trova in una mia Nota *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Atti della R. Accad. d. Scienze di Torino, 1889); nella quale approfitto della formola stessa, in un modo che ha qualche analogia con quello qui tenuto, per dimostrare geometricamente il teorema di Riemann-Roch, senza ricorrere

punti, che son comuni ad una serie lineare g_m^r e ad una involuzione di ordine $n > r$ e genere π, sopra una curva di genere p. Il detto numero, nel caso $r = n - 1$ che a noi interessa, vale precisamente

$$m - (n - 1) - p + n\pi .$$

Qui però si noti che la serie γ_n assegnata non è, in generale, una involuzione, perchè l'indice ν di essa può superare l'unità. Ma, come osserva il Segre nel secondo dei lavori citati, la formola scritta si applica anche a questo caso, purchè si riguardi la curva sostegno f come νupla, con δ punti di diramazione, cioè si operi sulla curva K, anzichè sulla f. Si tien conto di ciò, ponendo nella formola $m\nu$ al posto di m, e P al posto di p. Con queste sostituzioni, e ricordando che nella nostra questione è $m = n - 1 + p$, si ottiene

$$z = \nu(n - 1 + p) - (n - 1) - \mathrm{P} + n\pi ,$$

ossia, in virtù delle (5),

$$z = \nu(n + p - 1) - \frac{d}{2} = n(\nu + \pi - 1) - \frac{\delta}{2} . \tag{6}$$

Ma deve essere $z \geqq 0$, dunque

$$d \leqq 2\nu(n + p - 1) , \tag{7}$$

disuguaglianza che fissa un limite superiore a d.

Interessa esaminare la ipotesi che il limite venga raggiunto. Allora è $z = 0$, quindi una serie lineare g_{n-1+p}^{n-1} sopra f non contiene, in generale, nessun gruppo della serie γ_n. Ma se quella serie è costruita in guisa da contenere un gruppo Γ_n di γ_n (il che è possibile in ∞^{p-1} modi), la serie stessa contiene ogni gruppo di γ_n. Questa proprietà può anche enunciarsi così. Si costruisca sopra f una qualsiasi serie lineare g_{n+p}^n; se un punto a di f è tale, che la g_{n-1+p}^{n-1} residua di a contenga il gruppo Γ_n, il punto a ha la stessa proprietà rispetto ad ogni altro gruppo di γ_n. Ora di punti come a ve ne sono p, formanti il gruppo G_p residuo di Γ_n rispetto a g_{n+p}^n; quel gruppo G_p sarà dunque residuo di ogni altro gruppo di γ_n. E, in conseguenza, γ_n apparterrà alla serie lineare g_n, che è residua di G_p rispetto a g_{n+p}^n.

Risulta di qua che, se d raggiunge il limite superiore, la γ_n è contenuta in una serie lineare d'ordine n. Ed è pur vera la proprietà inversa, come si vede, sia invertendo il ragionamento che precede, sia mediante semplici considerazioni dirette.

---

nè al *Restsatz*, nè al *Reductionssatz*. Ed in una Nota successiva (Rendic. della R. Accad. dei Lincei, novembre 1891) ho potuto estendere il detto teorema alle involuzioni irrazionali, ricorrendo alla formola del Segre. Queste applicazioni (che si trovano riprodotte nel § 17 della citata *Introduzione*... del Segre) fanno sperare che altre proprietà delle serie algebriche possano dedursi dalla detta formola.

Vale dunque il teorema:

Una serie algebrica, irriducibile, ∞^1, *d'ordine* n *ed indice* ν, *sopra una curva di genere* p, *possiede al più* $2\nu(n+p-1)$ *punti doppi; se il massimo è raggiunto, ed in questo solo caso, la serie è contenuta in una serie lineare dello stesso ordine.*

Od anche:

Condizione necessaria e sufficiente, perchè una corrispondenza algebrica (n, ν) *tra due curve di generi* p, π *possa rappresentarsi mediante una sola equazione (razionale nelle coordinate di punti corrispondenti), è che il numero dei punti di diramazione della seconda curva valga* $2\nu(n+p-1)$; *in tal caso il numero dei punti di diramazione della prima curva è* $2n(\nu+\pi-1)$. E viceversa.

Le espressioni scritte assegnano i *massimi*, che possono raggiungere (contemporaneamente) i caratteri d e δ della corrispondenza; dei quali caratteri la formola di Zeuthen fornisce soltanto la differenza.

2. Il criterio contenuto nel primo teorema permette di dimostrare, nel modo più semplice, il lemma nominato del Severi. Eccone l'enunciato:

Se una serie algebrica, irriducibile, ∞^1, γ_n, *giacente sopra una curva, è tale che l'insieme dei* ν *gruppi di* γ_n *contenenti un punto della curva si muova, al variare del punto, entro una serie lineare d'ordine* $n\nu$, *allora tutti i gruppi di* γ_n *appartengono ad una medesima serie lineare d'ordine* n.

Calcoliamo infatti il numero d dei punti doppi di γ_n. Questi cadono nelle *coincidenze* della corrispondenza, che si viene a stabilire sulla curva sostegno f, quando ad ogni punto x di essa si facciano corrispondere i $\nu(n-1)$ punti, che, insieme ad x, costituiscono i ν gruppi di γ_n contenenti x. La detta corrispondenza ha i due indici uguali a $\nu(n-1)$, ed ha la *valenza* (*Werthigkeit*) ν, giacchè, per ipotesi, il punto x contato ν volte, insieme coi punti ad esso corrispondenti, dà un gruppo di $n\nu$ punti variabili in una serie lineare.

Dunque, detto p il genere di f, il numero richiesto d delle coincidenze è fornito della formola di corrispondenza di Cayley-Brill [1]. Si trova precisamente

$$d = 2\nu(n-1) + 2p\nu = 2\nu(n+p-1),$$

che coincide col valore *massimo*, di cui parla il teorema del n° 1. Sussiste dunque il lemma in questione.

3. Riprendiamo ora in esame la curva K (n° 1), che possiede due involuzioni, una d'ordine ν e genere p, l'altra d'ordine n e genere π. La

[1] Cfr. la citata *Introduzione* ... del Segre, § 12.

formola (5), tenuto conto della (7), ci dice che il genere P di K è soggetto alla limitazione

$$\text{(8)} \qquad P \leqq (n-1)(\nu-1) + n\pi + \nu p .$$

Dunque:

Se una curva possiede due involuzioni di ordini ν, n *e generi* p, π *rispettivamente, il genere* P *della curva non può superare il limite fissato dalla* (8). *Se il limite è raggiunto, allora l'insieme degli* n *gruppi della prima involuzione, che hanno ciascuno un punto in un gruppo della seconda, si muove, al variare di questo, entro una serie lineare d'ordine* $n\nu$; *ed un'altra serie siffatta* (*distinta, o coincidente colla prima*) *si ottiene scambiando le veci delle due involuzioni.*

Un esempio di una tal curva K si ottiene, considerando la intersezione di due superficie rigate di ordini n, ν e generi p, π rispettivamente, situate in posizione generica nello spazio ordinario [1].

Lo stesso teorema può anche enunciarsi in altra forma, ricordando la rappresentazione analitica (1), (2), (3) della curva K; dalla quale risulta, come dicemmo, che la K appartiene alla superficie

$$\text{(S)} \qquad f(x, y) = 0 \quad , \quad \varphi(\xi, \eta) = 0$$

dello spazio a quattro dimensioni. Questa superficie S contiene un fascio, di genere π, di curve F omografiche alla curva f, ed un secondo fascio, di genere p, di curve Φ omografiche alla curva φ; ogni curva F sega in un sol punto ogni curva Φ. La curva K poi sega in n punti ogni F ed in ν punti ogni Φ.

Possiamo dire, in conseguenza, che la formola (8) assegna un limite superiore al genere P di una curva K tracciata sulla superficie S, e secante in n e ν punti le curve F e Φ di S. Il limite è raggiunto allora (e solo allora), quando la curva K, sulla superficie S, può rappresentarsi mediante una sola equazione (4); quando cioè K è la intersezione di S con una varietà algebrica dello spazio a quattro dimensioni, passante eventualmente per un numero finito di curve F e Φ.

4. Ora conviene confrontare l'ultimo risultato con una formola stabilita dal Severi in una notevole Memoria *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica*... [2]. Il Severi introduce ivi la superficie S, i cui punti corrispondono alle coppie di punti di due curve f e φ, ed esamina i sistemi di curve esistenti sopra di essa. Si presentano anzitutto le curve, che sulla superficie S (definita nel modo da noi seguito) possono rappresentarsi

[1] Cfr. Amodeo, *Contribuzione alla teoria delle serie irrazionali*..., Annali di Matematica, s. II, t. XX.

[2] Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, s. II, t. LIV (1903); si veda, in particolare, la Parte II della Memoria.

analiticamente mediante una sola equazione (4), nel senso sopra precisato. Il Severi le chiama *curve a valenza zero*, e dimostra che esse possono ottenersi mediante l'operazione di addizione applicata, una o più volte, alle curve F e Φ componenti i due fasci esistenti su S.

Ma, all'infuori delle curve a valenza zero, possono esistere su S altre curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t, \ldots$, la cui rappresentazione analitica esiga, per ciascuna, due equazioni (3). Scelte t di queste curve, il Severi dice che esse sono *dipendenti*, se si possono determinare t interi, positivi, non tutti nulli, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$, tali che la curva

$$\lambda_1 \Gamma_1 + \lambda_2 \Gamma_2 + \cdots + \lambda_t \Gamma_t$$

sia a valenza zero; *indipendenti* nel caso opposto. E qui si noti che, in luogo di questa curva composta, che potrebbe non esistere per certi valori delle λ, è lecito considerare una curva K definita dall'*equivalenza*

$$\text{(9)} \qquad K \equiv C + \lambda_1 \Gamma_1 + \lambda_2 \Gamma_2 + \cdots + \lambda_t \Gamma_t ,$$

dove C è una curva a valenza zero, scelta in guisa che K esista e sia irriducibile.

Un criterio per decidere sulla dipendenza delle curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t$ è fornito dall'esame del *discriminante* relativo ad esse. Con questo nome il Severi indica un determinante simmetrico, di ordine t, il cui elemento generico è

$$c_{ik} = n_i \nu_k + n_k \nu_i - \gamma_{ik} ,$$

dove $n_1, \nu_1, \ldots$ sono i numeri delle intersezioni di $\Gamma_1, \ldots,$ con una curva F e con una curva Φ, mentre γ_{ik} è il numero delle intersezioni di Γ_i con Γ_k. Il Severi dimostra che, se le curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t$ sono dipendenti, il discriminante è zero. Sarà vero il teorema inverso? Il Severi lo ritiene vero; ma, non pervenendo a dimostrarlo coi mezzi di cui fa uso in quella Memoria, lo introduce, in un punto ove viene applicato, come una ipotesi eventualmente restrittiva.

Ora il teorema inverso sussiste. Esso risulta subito dal paragone della nostra formola (8) colla formola, che il Severi stabilisce (indipendentemente da quella ipotesi) per esprimere il genere della curva (9):

$$P = (n-1)(\nu-1) + n\pi + \nu p - \frac{1}{2} \sum_{ik} c_{ik} \lambda_i \lambda_k ,$$

dove n e ν hanno gli stessi significati che nella (8), e gli indici i, k possono assumere i valori $1, 2, \ldots, t$. Dal paragone risulta infatti che (per valori interi delle λ) si ha

$$\text{(10)} \qquad \sum_{ik} c_{ik} \lambda_i \lambda_k \geqq 0 ,$$

il segno di eguaglianza sussistendo solo nella ipotesi che la curva K sia a valenza zero. Se supponiamo dunque che il discriminante delle Γ, cioè il determinante formato coi numeri *interi* c_{ik}, sia zero, allora esistono valori

interi e non tutti nulli delle λ, tali da annullare la forma (10), e da far sì quindi che la curva K risulti a valenza zero. E di qua segue che le curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t$ sono dipendenti, come dovevasi dimostrare.

Nella ipotesi opposta la forma quadratica (10) è essenzialmente positiva, ed il suo discriminante, non solo è diverso da zero, ma è positivo; e tali sono tutti i suoi minori principali.

La ipotesi del Severi è dunque sempre verificata. E sussiste, senza alcuna restrizione, il teorema seguente, che il Severi deduce da quella ipotesi e da un teorema di Hurwitz sulle corrispondenze algebriche appartenenti ad una curva [1]:

Sopra una superficie contenente due fasci di curve unisecantisi F *e* Φ, *si può fissare un numero finito di curve indipendenti* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t$ *(costituenti una base), tali che ogni curva tracciata sulla superficie possa rappresentarsi sotto la forma* (9), *dove* C *è una curva composta di curve* F *e* Φ. *Il discriminante della base è essenzialmente positivo, e tali sono pure tutti i suoi minori principali dei vari ordini.*

Geologia. — *Sull'esistenza dell'Eocene nella Penisola Salentina.* Nota del Corrispondente G. Di Stefano.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Sugli integrali delle equazioni dell'elettro dinamica.* Nota di R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

1. Le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica date dal Lorentz si riassumono nelle cinque seguenti:

$$
\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathrm{H} &= a\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + 4\pi\varrho \mathrm{V}\right) \\
-\operatorname{rot} \mathrm{E} &= a\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} \\
\operatorname{div} \mathrm{E} = 4\pi\varrho \quad &, \quad \operatorname{div} \mathrm{H} = 0 \\
\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathrm{V}\varrho) &= 0\,,
\end{aligned} \right.
$$

[1] Recentemente il Severi è pervenuto a dimostrare che, sopra ogni superficie, si può fissare un numero finito di sistemi algebrici, tali da fornire, mediante addizione o sottrazione, un *multiplo conveniente* di un qualsiasi altro sistema assegnato sulla superficie (Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, 6 février 1905). Il teorema del resto, sebbene, sotto un certo rapporto, sia un caso particolarissimo della nuova proposizione, è tuttavia più preciso di questa (perchè il coefficiente di K nella (9) vale 1), e può essere ottenuto con procedimenti meno elevati. Valeva la pena perciò di liberarlo da ogni restrizione.

dove H ed E rappresentano rispettivamente la forza magnetica ed elettrica; V è il vettore velocità degli elettroni rispetto all'etere supposto in riposo, ϱ la carica elettrica, a è la reciproca della velocità della luce nel vuoto [1]. Queste equazioni ammettono il seguente sistema di integrali funzionali:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \mathrm{E} = -a\dfrac{\partial \mathrm{J}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi \\ \mathrm{H} = \operatorname{rot}\mathrm{J}\,, \end{cases}$$

essendo φ il potenziale elettrostatico (scalare), J il vettore potenziale corrispondente al vettore j della corrente totale, e

$$4\pi j = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + 4\pi\varrho \mathrm{V}.$$

Ma se si suppone conosciuto il movimento degli elettroni, e quindi conosciuti ϱ e V in ogni punto dello spazio e per ogni valore del tempo; e di più si suppone che lo stato iniziale sia quello di riposo e che tutte le funzioni considerate si annullino all'infinito, il sistema (I) ammette dei veri e propri integrali [2]. La ricerca diretta di questi integrali, sempre fondata sulle proprietà note dei potenziali ritardati, si può ottenere assai facilmente ed elegantemente nel modo che ci permettiamo di esporre.

2. Si osservi anzitutto che, per le ipotesi fatte, il sistema (I) non può ammettere che al più una soluzione.

Se infatti fossero possibili due valori distinti per H ed E, per le rispettive differenze h ed e, avremmo:

$$\operatorname{rot} h = a\frac{\partial e}{\partial t} \quad , \quad -\operatorname{rot} e = a\frac{\partial h}{\partial t}$$
$$\operatorname{div} h = 0 \quad , \quad \operatorname{div} e = 0\,.$$

Se della prima calcoliamo la rot, si ha

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} h = \operatorname{grad}\operatorname{div} h - \Delta_2 h = a\frac{\partial \operatorname{rot} e}{\partial t} = -a^2\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\,,$$

cioè

$$\Box h = 0\,.$$

Di qui, tenute presenti le condizioni iniziali e all'infinito, si deduce $h = 0$ in tutto lo spazio [3]. Lo stesso dicasi per e; dunque la soluzione è unica.

[1] Adoperiamo le notazioni e i metodi del calcolo vettoriale; vedi: Föppl u. Abraham, *Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität*, I Band (1904); *Elektromagnetische Theorie der Strahlung*, II Band (1905). Vedere ancora: Gans, *Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik*, 1905, Leipzig.

[2] Poincaré, *Electricité et optique*, 2me édition, Paris, 1901, pp. 455-460.

[3] Oltre le dimostrazioni note del Poincaré, *Théorie mathématique de la lumière*, II, pag. 134 (1892), si vegga quella assai semplice e diretta del Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur* ecc., tom. II, pp. 540 e seg. (1903); e valida anche per equazioni di forma più generale che s'incontrano in alcune teorie di ottica.

Per trovare una soluzione osserviamo che la quarta equazione del sistema (I) suggerisce di porre

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{H} = \operatorname{rot} \psi ;$$

sostituendo questo valore nella seconda dello stesso sistema, si ha

$$\operatorname{rot}\left(\mathrm{E} + a\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = 0 ;$$

dunque potremo porre:

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{E} = -a\frac{\partial \psi}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi'.$$

Sostituendo quindi (1) e (2) nella prima di (I), otteniamo

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \psi = -a^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - a \operatorname{grad} \varphi' + 4\pi a \varrho \mathrm{V},$$

e questa può scriversi

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \psi + a\frac{\partial \varphi'}{\partial t}\right) = \Box \psi + 4\pi a \varrho \mathrm{V}.$$

Pongasi

$$\psi = \psi' + \psi''$$

e la ψ', oltre alle solite condizioni iniziali e all'infinito, soddisfi in tutto lo spazio, la

$$\Box \psi' = -4\pi a \varrho \mathrm{V}.$$

Si deduce quindi che

$$\text{(4)} \qquad \psi' = a\int \frac{\varrho(\mathrm{P}', t - ar)\, \mathrm{V}(\mathrm{P}', t - ar)}{r}\, d\tau ;$$

cioè ψ' è il valore, in P, del vettore potenziale ritardato (con velocità $1:a$) relativo alla sola corrente di convezione; P′ è un punto variabile dello spazio ed r è il modulo di P — P′.

Dopo ciò per φ' e ψ'' abbiamo, dalla (3),

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \psi' + \operatorname{div} \psi'' + a\frac{\partial \varphi'}{\partial t}\right) = \Box \psi''.$$

Calcolando la div ψ', colla (4), si ha, con metodo noto,

$$\operatorname{div} \psi' = a\int (\operatorname{div} \varrho \mathrm{V})\frac{d\tau}{r},$$

intendendo calcolata (div ϱV) rispetto a un punto variabile e come se $t - ar$ fosse costante.

Quindi, in virtù della quinta del sistema (I) (equazione di continuità), valida per qualunque valore del tempo, si deduce

$$\operatorname{div} \psi' = -a \frac{\partial}{\partial t} \int \varrho(\mathrm{P}', t - ar) \frac{d\tau}{r} .$$

Prendiamo dunque

$$\varphi' = \int \varrho(\mathrm{P}', t - ar) \frac{d\tau}{r} , \tag{6}$$

e sarà φ' il potenziale elettrostatico (scalare) ritardato. Per determinare ψ'' avremo quindi l'equazione

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \psi'' = \Box \psi'', \tag{7}$$

che ha la stessa forma dell'equazione dei moti vibratorî liberi di un corpo elastico isotropo [1]. Ma allora è chiaro, per le poste condizioni, che in tutto lo spazio sarà $\psi'' = 0$. Del resto possiamo procedere così. Pongasi

$$u = \operatorname{div} \psi''$$

e della (7) si prenda la divergenza. Avremo subito

$$\Delta_2 u = \Box u$$

onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 ,$$

e quindi sempre e in ogni punto dello spazio, $u = 0$; allora la (7) riducendosi alla $\Box \psi'' = 0$, ci dà pure $\psi'' = 0$.

Abbiamo dunque per gl'integrali richiesti la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{E} = -a \dfrac{\partial \psi'}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi' \\ \mathrm{H} = \operatorname{rot} \psi', \end{array} \right. \tag{III}$$

essendo φ' e ψ' dati dalle (4) e (6).

Si verifica subito che anche la terza di (I) è soddisfatta.

3. Lo stesso metodo è applicabile anche alle equazioni di Maxwell-Hertz nell'ipotesi che non vi sia magnetismo libero.

Se infatti si parte dal sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathrm{H} = a \left(\varepsilon \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} + 4\pi j \right) \quad , \quad -\operatorname{rot} \mathrm{E} = a \mu \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} , \\ \operatorname{div} \mathrm{E} = 4\pi \varrho \quad , \quad \operatorname{div} \mathrm{H} = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0 , \end{array} \right. \tag{I'}$$

[1] Detto infatti σ il vettore spostamento, l'equazione dei moti vibratorî liberi è:

$$\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \sigma = \Delta_2 \sigma - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \Box \sigma .$$

si giunge al sistema di integrali funzionali

$$(\mathrm{II}') \qquad \begin{cases} \mathrm{E} = -\dfrac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{grad}\,\varphi' - a\mu\,\dfrac{\partial \mathrm{J}'}{\partial t} \\ \mathrm{H} = \mathrm{rot}\,\mathrm{J}'; \end{cases}$$

φ' è il potenziale elettrostatico, J' il vettore potenziale, entrambi ritardati con la velocità $1 : a\sqrt{\varepsilon\mu}$. Sostituendo ai potenziali ritardati, i potenziali ordinari abbiamo in (II') le equazioni di Helmholtz [1] e quindi la riducibilità dell'un sistema all'altro dimostrata dal prof. Levi-Civita [2].

4. Se nelle formule precedenti, supposto $a = 1$, immaginiamo sostituito t con iu, l'operazione $\square$ coincide colla Δ_2 relativa alle quattro variabili indipendenti x, y, z, u; e però eseguendo una trasformazione ortogonale, definita da:

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 u, \ldots\ldots, u' = \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4 u,$$

la $\square$ si trasforma in sè stessa.

Diciamo ξ, η, ζ le componenti del vettore V, e poniamo

$$\varrho'\xi' = \varrho(\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta - i\delta_1), \ldots\ldots, \varrho' = \varrho(\alpha_4 \xi + \beta_4 \eta + \gamma_4 \zeta - i\delta_4).$$

Per quanto è noto sulle trasformazioni ortogonali, risulterà trasformata in sè stessa l'equazione di continuità, cioè la 5ª del sistema (I). Quindi:

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t'} + \frac{\partial \varrho'\xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \varrho'\eta'}{\partial y'} + \frac{\partial \varrho'\zeta'}{\partial z'} = 0.$$

Di qui segue subito che se riguardiamo ϱ' come una nuova carica elettrica e le ξ', η', ζ' come componenti di un nuovo vettore V'; poscia consideriamo rispetto alle nuove variabili il potenziale scalare ritardato φ' ed il vettore potenziale J' e definiamo un nuovo campo elettro-magnetico mediante formule analoghe alle (1) e (2), cioè:

$$\mathrm{E}' = -\frac{\partial \mathrm{J}'}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi'$$

$$\mathrm{H}' = \mathrm{rot}\,\mathrm{J}',$$

otterremo un sistema di equazioni differenziali identico al sistema (I).

Quindi la trasformazione considerata trasforma in sè stesso il sistema (I). Questa trasformazione, come può subito vedersi, comprende come caso particolare quella di Lorentz [3].

(1) *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper*, Journal f. reine u. angew. Mathematik, Bd. 72, pp. 57-129. 1870.

(2) *Sulla riducibilità delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma Hertziana*, Nuovo Cimento, **6** (4), agosto 1897.

(3) Su questa trasformazione vedi la recente Memoria del Poincaré: *Sur la dynamique de l'électron* (Rend. Circolo matem. Palermo. Tomo XXI, pp. 129-176). La trasformazione ivi considerata non ha il determinante eguale ad 1; ma è noto come ci possiamo ridurre a questo caso. Si veda specialmente il § 4 della Memoria del Poincaré.

Si trovano subito le relazioni tra i potenziali J e φ del primo ed J′ e φ' del sistema trasformato. Diciamo J_x, J_y, J_z le componenti di J; ed $J'_{x'}$, ecc., quelle di J′. Poichè

$$\Box J'_{x'} = -4\pi\varrho'\xi' = -4\pi\varrho(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta - i\delta_1)$$

e

$$\Box J = -4\pi\varrho V \quad , \quad \Box\varphi = -4\pi\varrho \quad , \quad \Box\varphi' = -4\pi\varrho' ,$$

si deduce

$$\Box J'_{x'} = \Box(\alpha_1 J_x + \beta_1 J_y + \gamma_1 J_z - i\delta_1\varphi), \text{ ecc.}$$

Quindi:

$$J'_{x'} = \alpha_1 J_x + \beta_1 J_y + \gamma_1 J_z - i\delta_1\varphi$$

e due analoghe; e poscia

$$\varphi' = i\alpha_4 J_x + i\beta_4 J_y + i\gamma_4 J_z + \delta_4\varphi .$$

Assai agevolmente poi si deduce che le componenti delle nuove forze elettriche e magnetiche sono funzioni lineari ed omogenee delle componenti delle primitive.

Meccanica. — *Sull' integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Nota del prof. G. Lauricella, presentata dal Socio U. Dini.

Matematica. — *Sur quelques propriétés nouvelles de fonctions cylindriques.* Nota di Niels Nielsen, presentata dal Socio U. Dini.

Matematica. — *Théorie et Construction de Tables permettant de trouver rapidement les facteurs premiers d'un nombre.* Nota di Ernest Lebon, presentata dal Socio V. Volterra.

Le precedenti Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Fisica. — *Ricerche su un nuovo elemento presentante i caratteri radioattivi del torio.* Nota di G. A. Blanc, presentata dal Corrispondente A. Sella.

In una precedente Nota [1] ho dimostrato come certi preparati estratti dai sedimenti delle sorgenti termali di Echaillon, i quali presentano un'attività immensamente superiore a quella di un ugual peso di idrato di torio, abbiano la proprietà di generare continuamente un prodotto in tutto analogo al torio X di Rutherford, prodotto al quale è dovuta la totalità del potere emanante e gran parte dell'attività diretta dei preparati stessi.

[1] Questi Rendic. XV, pag. 328, 1° sem. 1906.

Ho anche mostrato come l'emanazione emessa dai prodotti estratti da quei sedimenti abbia una costante di disattivazione che si può considerare come identica a quella dell'emanazione torica.

Ora è noto che l'emanazione del torio ha la proprietà di rendere temporaneamente radioattivi i corpi coi quali essa viene in contatto, specialmente se questi sono carichi di elettricità negativa. È noto pure come dalle ricerche di Rutherford tale fenomeno vada attribuito al depositarsi su quei corpi di un deposito di materia radioattiva, la quale materia non è altro che un prodotto della disintegrazione dell'emanazione, il quale alla sua volta si va trasformando in un nuovo tipo di materia.

Riporterò qui i risultati di alcune esperienze le quali dimostrano in modo evidente l' identità dei fenomeni d'attività indotta prodotti dai miei preparati, con quelli prodotti dai sali di torio.

Attività indotta per lunga esposizione all'emanazione. — Per cominciare, due lamine di stagnola comunicanti ambedue col polo negativo di una medesima pila di Zamboni vennero lasciate per tre giorni consecutivi, la prima sotto una campana di vetro contenente alcuni milligrammi di idrati estratti dai sedimenti, di attività pari a circa 3000 unità toriche, e l'altra sotto un'altra campana contenente una diecina di grammi di idrato di torio, dopo di che il variare delle attività delle due lamine col tempo venne accuratamente determinato per mezzo di un elettrometro.

Dopo un periodo di alcune ore durante il quale l'attività di ambedue le lamine si mantenne pressochè costante, l'attività stessa incominciò a decrescere assumendo l' andamento caratteristico di quel genere di fenomeni, vale a dire riducendosi di metà in tempi uguali, e precisamente in circa undici ore.

Nella seguente tabella sono riportati i risultati delle singole osservazioni, nonchè i valori calcolati per le attività applicando la solita formola:

$$I_t = I_0 \, e^{-\lambda t}$$

risultando per la costante i valori $\lambda = 0.0624$ nel caso della lamina attivata in presenza degli idrati estratti dai sedimenti e $\lambda = 0.0618$ nel caso della lamina attivata dall' idrato di torio.

Idrato di torio			Idrati dai fanghi		
	Attività			Attività	
tempi in ore	val. calc.	val. oss.	tempi in ore	val. calc.	val. oss.
0	98.0	100.0	0	97.4	100.0
1.5	89.3	90.8	4.4	74.0	74.0
5.7	68.9	68.4	10.0	52.2	52.5
11.7	47.5	47.3	15.0	38.2	36.1
27.2	18.2	18.1	22.6	23.7	23.9
45.3	6.0	6.5	36.0	10.3	10.6
59.2	2.5	2.3	52.0	3.8	3.7
77.8	0.8	0.8	69.3	1.3	1.3

La curva corrispondente è riprodotta nella fig. 1, dalla quale appare evidente l' identità dei due fenomeni.

Attività indotta per brevi esposizioni all'emanazione. — Come hanno dimostrato Sella [1], Miss Brookes [2] e Rutherford [3] l'attività presentata da un corpo il quale sia stato esposto per periodi di tempo non superanti poche ore all'emanazione del torio, mostra un incremento iniziale per un certo tempo successivo all'istante in cui esso è stato sottratto all'azione del gas radioattivo. Questo incremento è tanto più pronunziato per quanto minore è stato il tempo durante il quale il corpo da attivarsi è stato lasciato in presenza dell'emana-

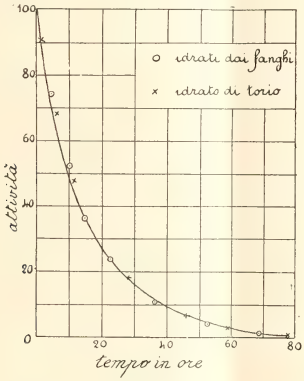


Fig. 1.

zione. Per esposizioni più lunghe, vale a dire di qualche giorno, l' irregolarità iniziale nel processo di disattivazione si riduce ad un periodo di attività stazionaria; per periodi di esposizione più lunghi ancora l'attività incomincia a decrescere secondo la legge esponenziale solita, sin dal momento in cui il corpo viene sottratto all'azione dell'emanazione.

Avendo io notato, come ho detto poco prima, qualche cosa di analogo coi preparati estratti dai sedimenti di Echaillon, ho voluto assicurarmi dell' identità di questo fenomeno con quello presentato dai sali di torio.

A tal uopo ho attivato separatamente due lamine di stagnola, una mediante l'emanazione di alcuni grammi di idrato di torio, e l'altra mediante l'emanazione prodotta da alcuni milligrammi di un preparato estratto dai fanghi. Per ottenere effetti paragonabili, la quantità di idrato di torio venne

(1) Questi Rendic. XI, pag. 242, 1° sem. 1902.
(2) Phil. Mag. Settembre 1904.
(3) Phil. Mag. Gennaio 1903.

da me scelta in modo che la quantità di emanazione da esso prodotta fosse sensibilmente uguale a quella prodotta dal mio preparato. Il metodo di attivazione adottato in questo caso fu quello dell'effluvio elettrico descritto dal Sella [1]; le sostanze emananti ricoperte di un foglio di carta da filtro, vennero poste ciascuna sotto una campana di vetro nella quale veniva prodotto un continuo effluvio fra tre punte ed un piano metallico, comunicanti le prime col polo negativo e il secondo col polo positivo di una macchina di Holtz. L'effluvio, come ha dimostrato Sella, ha la proprietà di liberare completamente l'aria di un ambiente contenente emanazione torica, dal materiale radioattivo che

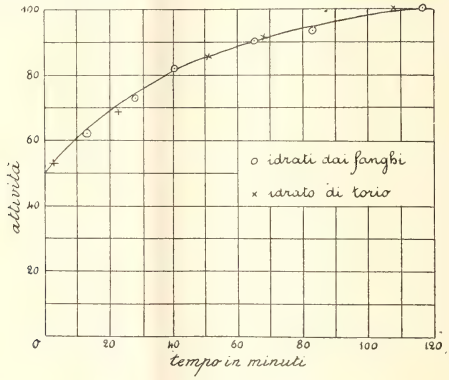


Fig. 2.

vi si trova in sospensione, fissando questo materiale (che non è altro poi che la sostanza alla quale sono dovuti i fenomeni di attività indotta) su un piano metallico il quale sia affacciato alle punte stesse.

Questo metodo si dimostrò assai più conveniente per ottenere risultati direttamente paragonabili fra loro, che non il solito metodo dell'attivazione per semplice carica negativa.

Dopo varî tentativi sono riuscito ad ottenere alcune buone serie di misure, delle quali riporto la seguente, ottenuta cimentando due lamine rimaste esposte all'effluvio in presenza delle emanazioni durante un'ora.

Idrato di torio		Idrati dai fanghi	
tempi in minuti	attività	tempi in minuti	attività
3	52.9	13	61.6
23	68.0	28	72.2
51	85.0	41	81.8
68	91.9	65	90.0
108	100.0	83	93.7
		107	100.0

La curva corrispondente a questa serie di misure è riprodotta nella fig. 2.

[1] Questi Rendic. XI, pag. 57, 1° sem. 1902.

Separazione dei due prodotti noti come torio A *e torio* B. — Come è noto, Rutherford interpreta il fenomeno suddetto ammettendo che l'emanazione del torio dia origine ad un primo tipo di materia detta torio A, la quale non emette raggi osservabili coi soliti mezzi, ma che va trasformandosi alla sua volta in un altro prodotto intensamente attivo detto torio B. Dalle curve del tipo di quella della fig. 2, Rutherford [1] dedusse per via teorica i valori delle costanti di disattivazione del torio A e del torio B, trovando che i loro tempi caratteristici dovevano essere rispettivamente di 11 ore e di circa 55 minuti.

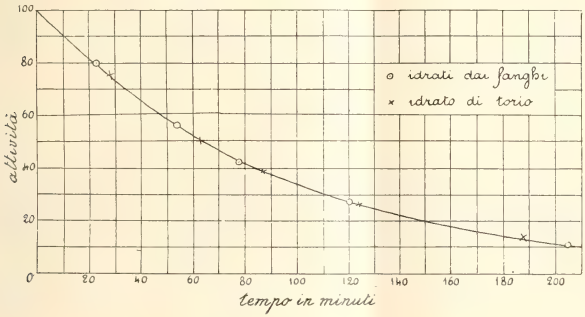


Fig. 3.

Miss Slater [2] è poi riuscita a separare il torio A dal torio B. Uno dei metodi da essa adoperati consiste nel riscaldare per alcuni minuti al calor rosso una lamina di platino la quale sia stata mantenuta a lungo in presenza dell'emanazione. Il torio A è infatti più volatile del torio B, sicchè dopo un simile trattamento l'attività della lamina incomincia a scemare rapidamente riducendosi a metà non più in 11 ore ma in circa 1 ora.

Dopo varî tentativi sono riuscito a ripetere l'esperienza di Miss Slater tanto sul torio quanto sui prodotti estratti dai sedimenti. Ho constatato che per una lamina di platino attivata per circa 48 ore, basta un arroventamento al calor rosso per circa 5 minuti per trasformare la legge di disattivazione data al § 3 in una molto simile a quella data da Miss Slater pel suo torio B.

I risultati di una di queste mie esperienze sono i seguenti: i valori calcolati applicando l'equazione della pag. 350 ed il metodo dei minimi quadrati sono anch'essi riportati. I valori trovati per la costante λ sono in ciascun caso, pel torio $\lambda = 0.01084$ e per l'idrato estratto dai fanghi $\lambda = 0{,}01083$,

[1] Rutherford, Radioactivity, 2ª Ediz. pag. 351.
[2] Phil. Mag. 1905.

valori questi concordanti in modo rimarchevole; il tempo caratteristico sarebbe in questo caso di poco più di 1 ora.

Idrato di torio			Idrati dai fanghi		
	Attività			Attività	
tempi in minuti	val. calc.	val. oss.	tempi in minuti	val. calc.	val. oss.
0	100.6	100.0	0	99.9	100.0
23	78.4	80.3	28	73.8	75.5
54	56.1	56.0	62	51.0	50.0
77	43.7	42.5	87	38.9	38.6
120	27.4	26.6	124	26.1	25.7
205	10.9	11.1	188	13.0	13.2

La curva corrispondente è riportata nella fig. 3.

CONCLUSIONE

Come appare dai risultati sopra riportati, la radioattività dei prodotti estratti dai sedimenti delle sorgenti termali di Echaillon presenta caratteri che si possono considerare come identici con quelli propri dei sali di torio. Siccome peraltro la sproporzione immensa esistente tra il potere radioattivo dei sali di torio e quello dei prodotti da me studiati non permette di attribuire l'attività di questi ultimi a torio in essi contenuto, bisogna necessariamente e definitivamente concludere che l'attività loro è dovuta ad un nuovo elemento.

Ora può sorgere la domanda: sono i caratteri radioattivi sufficienti ad identificare una sostanza allo stesso modo come lo sono i caratteri spettroscopici? La risposta secondo me è affermativa; se, infatti, nella serie delle trasformazioni successive di due sostanze radioattive diverse vi possono essere due prodotti i quali presentino delle costanti di disattivazione abbastanza simili, come ad esempio è il caso per l'emanazione del radio e pel torio X, le cui attività si riducono ambedue a metà in circa 4 giorni, non sembra ammissibile che due corpi possano dar luogo a due serie di prodotti aventi tutti le identiche costanti di disattivazione, come pure non è per lo meno probabile che due corpi diversi possano dar luogo ad una medesima serie di prodotti di trasformazione.

In tali condizioni si deve concludere che i sali di torio ordinari devono la loro attività a tracce del nuovo elemento in essi contenute e da essi difficilmente separabili a causa di una grande similitudine di caratteri chimici.

Ramsay ha proposto per il costituente radioattivo dei prodotti estratti da Hahn dalla Torianite il nome di *radiotorio*. Siccome sembra ormai evidente l'identità di quella sostanza con quella contenuta nei fanghi di Echaillon, designerò d'ora innanzi con quel nome il principio attivante dei miei preparati.

Nella mia Nota al Congresso di Liegi esprimevo il dubbio che il nuovo elemento potesse non essere un prodotto di trasformazione del torio, contrariamente a ciò che crede Sir William Ramsay. Tale mia opinione era basata sul fatto che non mi era stato possibile di mettere in evidenza la presenza nei fanghi di tracce apprezzabili di torio. Sembrerebbe infatti difficile a spiegare che vi potessero essere nei fanghi stessi delle quantità relativamente notevoli del nuovo elemento senza che vi si trovi anche la sostanza produttrice, vale a dire il torio, se i due corpi hanno, come sembra, caratteri chimici molto simili. Inoltre è notevole il fatto che nelle regioni ove sorgono le acque di Echaillon non esistono, a quanto si sappia, giacimenti toriferi.

È facile comprendere come il complemento logico di queste mie ricerche dovessero essere dei tentativi aventi per iscopo di separare il nuovo elemento dagli ordinari sali di torio. Tale problema è da varî mesi oggetto di studio per parte tanto del dottor Angelucci quanto mia, e ci auguriamo di poter presto comunicare dei risultati definitivi in proposito.

Fisica. — *Sul comportamento foto-elettrico dell'Antracene.* Nota di A. Pochettino, presentata dal Corrispondente A. Sella.

G. C. Schmidt [1], ha fatto una serie di esperienze intese a stabilire se vi fosse una relazione intima fra i fenomeni di fluorescenza delle soluzioni e l'effetto foto-elettrico, ossia la capacità di emettere degli elettroni sotto l'influenza della luce ultravioletta. Riprendendo queste ricerche ho avuto occasione di notare come alcune soluzioni di Antracene in Benzolo, per quanto necessariamente poco ricche di Antracene, fossero capaci di manifestare un effetto fotoelettrico abbastanza rimarchevole; cimentando poi l'Antracene solido, ho constatato ch'esso presentava questa proprietà in modo molto più notevole ancora; non essendosi ancora, a mia saputa, mai constatata questa proprietà nell'Antracene ed affini, credo non privo d'interesse riferire intanto qui i risultati preliminari di questa ricerca che, per una quantità di fenomeni concomitanti che complicano non poco il fenomeno foto-elettrico puro e semplice, mi riserbo di proseguire in seguito.

Ho successivamente sperimentato su tre qualità di Antracene di purezza molto differente:

La prima qualità, proveniente dalla fabbrica Kahlbaum, designata in catalogo semplicemente coll'aggettivo *puro*, ha un colore giallo verdastro citrino, si presenta in piccoli cristallini e alla luce dell'arco voltaico dà una fluorescenza vivace di colore verde smeraldo; la seconda qualità, proveniente dalla fabbrica in Höchst $^{a}/_{M}$, ha l'aspetto di una polvere finissima di colore

[1] Wied. Ann. 64, pag. 708, 1898.

bianco sporco, alla luce dell'arco presenta una fluorescenza debole di colore leggermente bluastro; finalmente la terza qualità, proveniente dalla Badische Anilin-Fabrik di Ludwigshafen, si presenta in piccole laminette brillanti, bianche, alla luce dell'arco voltaico diventa vivacemente fluorescente con un colore violetto; dall'insieme dei caratteri fisici risulterebbe più pura la terza qualità, meno pura la prima.

La disposizione sperimentale adottata è la solita: l'Antracene veniva disposto, il più uniformemente possibile, in uno strato dello spessore di circa 2-3 millimetri su una lamina orizzontale circolare di rame (diam. = 9 cm.), in comunicazione col suolo. Sopra questo strato di Antracene alla distanza di un centimetro era collocata una rete metallica in comunicazione con un elettrometro a foglia di alluminio; lo strato di Antracene veniva illuminato colla luce di una lampada ad arco (da 50 Volta, a corrente alternante, regolabile a mano) posta a circa un metro di distanza dall'apparecchio; la luce dell'arco veniva diretta sull'Antracene mediante una lente di quarzo ed uno specchio di acciaio. Onde ottenere una luce di intensità costante si proiettavano con una lente i carboni dell'arco su uno schermo di fianco e si cercava di mantenerli ad una distanza determinata durante tutte le misure.

La misura si effettuava così: si caricava il sistema, formato dall'elettrometro e dalla rete, positivamente ad un potenziale di circa 250 Volta, e poi con un contasecondi si determinava il tempo impiegato dalla fogliolina di Alluminio dell'elettrometro a percorrere una certa porzione della scala di un microscopio a micrometro oculare puntato su di essa; il tempo impiegato dal sistema per scaricarsi da un determinato potenziale ad un altro, serve così a dare un'idea dell'effetto fotoelettrico della sostanza cimentata.

Ecco i risultati di alcune misure scelte a caso fra le molte serie, abbastanza concordanti, ottenute; noto, una volta per tutte, che i numeri posti in una stessa riga sono ottenuti successivamente senza interruzione:

Antracene (di Kahlbaum)

Tempo impiegato a scaricare l'elettrometro da 250 a 160 Volta:

$$23'', 73'', 115'', 140''.$$

Come si vede, l'effetto fotoelettrico diminuisce man mano che l'esperienza va continuando; peraltro, se si tiene l'Antracene per un certo tempo al buio, l'effetto si trova di nuovo aumentato: infatti dopo quattro ore che questo campione di Antracene è tenuto al buio, ripetendo le esperienze nelle identiche condizioni, trovo:

$$106'', 122'', 136'', 138'', 140'';$$

e dopo 18 ore di permanenza nell'oscurità:

$$24'', 70'', 120'', 149'';$$

e dopo 90 ore:

$$23'', 65'', 133'', 150''.$$

Lo stesso comportamento presentano le altre due specie di Antracene studiate; infatti, operando sempre nelle identiche condizioni, ottengo:

Antracene (della Badische Anilin-Fabrik)

28″, 65″, 100″, 107″,

e dopo quattro ore di permanenza nell'oscurità:

70″, 89″, 93″, 98″,

e dopo 90 ore:

30″, 65″, 104″, 108″.

Antracene (da Höchst $^a/_M$)

30″, 42″, 59″, 69″, 78″, 96″,

e dopo quattro ore di permanenza al buio:

75″, 77″, 89″, 90″, 95″,

e dopo 90 ore:

30″, 50″, 76″, 90″.

A prima vista viene naturale l'idea di assimilare questa diminuzione dell'effetto fotoelettrico a quella specie di *stanchezza* osservata da varî sperimentatori nelle superfici di zinco, alluminio ecc.; peraltro qui il fenomeno, se pure si potrà in parte ascrivere ad una causa di questo genere, è molto complicato dal fatto che l'Antracene in granuli cristallini o scagliette va molto soggetto al fenomeno della penetrazione di carica [1], tanto che uno strato di Antracene di qualunque delle tre qualità studiate, dopo essere stato cimentato per una diecina di minuti primi di seguito nel modo descritto, presenta una carica residua notevolissima, anche dopo essere stato tenuto per diverse ore al buio e col piattello di sostegno in comunicazione col suolo.

Di più non bisogna dimenticare che, come risulta principalmente dalle ricerche di R. Luther ed F. Weigert [2], sotto l'influenza della luce ultravioletta l'Antracene, anche allo stato solido, si trasforma in Paraantracene o Diantracene, secondo l'equazione;

$$\underset{\text{Antracene}}{2C_{14}H_{10}} = \underset{\text{Diantracene}}{C_{28}H_{20}}$$

e questo processo fotochimico è riversibile tanto che si può scrivere senza altro:

$$2C_{14}H_{10} \underset{\text{allo scuro}}{\overset{\text{alla luce}}{\rightleftarrows}} C_{28}H_{20}$$

Ulteriori esperienze che ho in animo di fare, permetteranno forse di spiegare quanta parte in questa diminuzione dell'effetto fotoelettrico col tempo

[1] A questo riguardo ho in corso delle esperienze sistematiche, sui risultati delle quali spero di poter riferire quanto prima.

[2] Zeit. für. phys. Chemie. 1905, 51, pag. 297.

sotto la luce ha questa seconda causa per ammettere la quale bisognerà ad ogni modo prima vedere se il Diantracene non ha l'effetto fotoelettrico o almeno se l'ha in grado minore dell'Antracene; dell'importanza però che in questo fenomeno ha la penetrazione di carica, mi sono subito potuto convincere esperimentando su dei campioni di Antracene fuso; ecco infatti i risultati delle esperienze istituite a questo scopo:

Antracene di Kahlbaum. Appena tratto fuori dal barattolo ed esperimentato al solito modo e nelle stesse condizioni di prima, ottengo successivamente come tempi impiegati dall'elettrometro per scendere da + 250 a + 160 Volta, i seguenti numeri:

$$24'', 70'', 120'', 150'';$$

fondo l'Antracene, lo lascio rapprendere bene e poi ho:

$$12'', 12'', 12'', 14'', 13'', 12'', 13'', 13'', 11'', 14'', 11'', 12'';$$

e dopo 36 ore di permanenza al buio:

$$10'', 11'', 11'',$$

e dopo 15′ di esposizione alla luce dell'arco, ma scarico:

$$12'', 11'', 13'', 12'', 12'',$$

e dopo 20′ di esposizione alla luce, ma carico negativamente:

$$17'', 26'', 23'', 26''.$$

Dopo finalmente essere stato quattro ore al buio e completamente scarico, mi dà:

$$10'', 12'', 12''.$$

Antracene della Badische Anilin-Fabrik. Appena estratto dal barattolo mi dà:

$$30'', 65'', 104'', 108'',$$

immediatamente dopo fuso:

$$9'', 9'', 9'', 9'',$$

dopo 10′ di esposizione alla luce dell'arco, ma scarico:

$$10'', 10'',$$

e finalmente dopo 12′ di esposizione alla luce, ma carico negativamente:

$$18'', 20'', 22''.$$

Come si vede, in primo luogo allo stato fuso questa stanchezza non si fa quasi sentire, ma anche allo stato fuso, se si espone l'Antracene alla luce mantenendolo carico negativamente, la diminuzione dell'effetto fotoelettrico, sebbene in grado molto minore che non allo stato solido non fuso [1], si fa sensibilmente sentire.

[1] Questo starebbe in buon accordo col fatto che la carica residua è tanto minore quanto maggiore è l'omogeneità del dielettrico che si considera.

Questa influenza della penetrazione di carica sull'effetto fotoelettrico può anche forse essere comprovata dal fatto che se si stende uno strato esilissimo di Antracene della Badische Fabrik su dell'acqua, si viene ad ottenere una superficie dotata di un effetto fotoelettrico fortissimo; operando su di essa come precedentemente si ottengono nelle stesse condizioni le seguenti cifre:

$$12'', 12'', 12'', 12'', 12'', 13'', 13'',$$

e dopo un'esposizione di 10′ alla luce, carico negativamente:

$$14'', 15'', 15'', 15'', 15'', 15''.$$

Lasciando per ora da parte tutti questi fenomeni secondarî e molti altri che formeranno oggetto di ulteriori ricerche, mi sono anzitutto preoccupato di porre in chiaro in modo sicuro l'esistenza dell'effetto fotoelettrico puro e semplice.

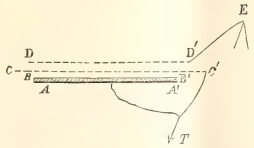


Fig. 1.

Per eliminare il verificarsi della penetrazione di carica ho adottata la disposizione sperimentale seguente:

Uno strato di Antracene della Badische Anilin-Fabrik BB′ viene disposto su piattello AA′ di rame (diam. = 9 cm.) in comunicazione col suolo, sull'Antracene viene disposta una rete di filo di ferro CC′ in comunicazione pure col suolo; sopra questa finalmente, alla distanza di circa tre millimetri è disposta una seconda rete metallica DD′ isolata e posta in comunicazione coll'elettrometro a foglie d'Alluminio E. Se veramente l'effetto osservato nell'Antracene consiste in un'emissione di elettroni, questi dovranno jonizzare l'aria fra CC′, e DD′ e se do a quest'ultima rete una certa carica, questa deve disperdersi più rapidamente alla luce che non al buio qualunque sia ora il segno di questa carica.

Operando in tal modo ho trovato che per scendere da 250 Volta a 230 occorrevano all'elettrometro:

Carica positiva		Carica negativa
387″	alla luce dell'arco	362″
720″	allo scuro	700″

effettivamente dunque il comportamento dell'Antracene in questa esperienza dimostra l'esistenza di un effetto foto-elettrico vero e proprio.

Ma ancora: se si tratta di una vera e propria emissione di elettroni si deve ancora rendere sensibile l'influenza di un campo magnetico un po' intenso normale alla direzione di emissione; per dimostrar ciò sono ricorso alla seguente disposizione sperimentale:

Fra i due poli di un elettromagnete MM′, di quelli per dimostrare le correnti di Foucault, è disposta una lamina rettangolare AA′ di rame, dalle dimensioni 1,5 × 8,5 centimetri, sulla quale è steso uno strato di Antracene di Kahlbaum. Sopra questo Antracene, ad un millimetro di distanza, vi è una rete pure rettangolare di rame BB′, molto fitta (maglie = 0,8 × 0,8 millimetri), finalmente a 4 millimetri di distanza da questa, una seconda rete CC′, dalle dimensioni 2,5 × 9 centimetri, isolata e in comunicazione coll'elettrometro E solito; tanto la lamina AA′, sorreggente l'Antracene, quanto la rete BB′ sono in buon contatto colle espansioni polari MM′ dell'elettromagnete e questo è in comunicazione colla terra, l'elettromagnete veniva alimentato con una corrente di circa 8 Ampère.

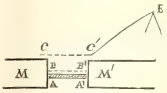


Fig. 2.

In una prima serie di misure risultò che perchè il sistema rete CC′-elettrometro scendesse da un potenziale di + 200 Volta ad uno di + 180 occorrevano, sotto l'azione della luce dell'arco, col campo eccitato 312″, mentre senza campo occorrevano 293″; sperimentando subito dopo con una carica negativa ottenni, su per giù nelle stesse condizioni i seguenti risultati: col campo 420″, senza campo 386″.

Benchè non ci sia grande differenza fra la dispersione dell'elettricità quando il campo è eccitato e quando non è eccitato, sussiste sempre una maggiore dispersione nel secondo caso che non nel primo, il che conforta sempre più l'ipotesi che anche in questo caso dell'Antracene si abbia a fare con un effetto foto-elettrico.

Come ultima prova per decidere in modo sicuro la questione ho voluto vedere se l'Antracene, nel vuoto, sotto l'influenza della luce era capace di caricarsi positivamente come lo Zinco, l'Alluminio, ecc. Perciò mi sono servito di una disposizione simile a quella adottata dal Lenard in esperienze analoghe: un tubo di vetro T è ricoperto internamente da uno strato d'argento messo in comunicazione col suolo con un filo F; questo tubo è chiuso superiormente da una lamina di Quarzo Q e contiene a metà circa un setto S fatto da una rete finissima metallica; sotto questa rete trovasi un piattello P metallico ricoperto di uno strato di Antracene della Badische Anilin-Fabrik,

questo piattello è in comunicazione mediante un filo E con un elettrometro a quadranti in condizioni da dare una deviazione di 69 mm. su una scala per una carica di un Volt sul filo F; l'estremità inferiore del tubo T è inmersa in un vaso V tutto foderato esternamente di stagnola in comunicazione col suolo e ripieno di paraffina, dal tubo veniva estratta l'aria mediante una pompa a mercurio.

Fatto il vuoto ed assicurato che non vi fossero cariche residue sull'Antracene si poneva E in comunicazione coll'elettrometro e si accendeva l'arco nelle stesse condizioni come nelle esperienze precedenti e si leggevano le

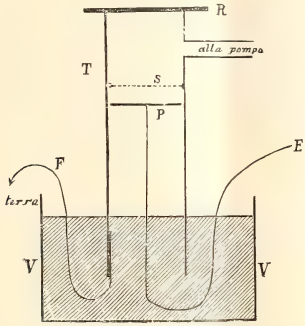


Fig. 3.

deviazioni dell'elettrometro ogni minuto primo. Ecco i risultati di due serie di misure ottenute con un vuoto molto spinto:

Dopo	1′	2′	3′	4′	5′
Carica + in Volta	0,37	0,63	0,69	0,70	0,72
	0,42	0,69	0,72	0,75	0.75

con un vuoto un po' meno spinto le cariche, come è naturale, sono molto minori, eccone un esempio:

Dopo	1′	2′	3′
Carica + in Volta	1,09	0,18	0,24.

Mi pare adunque si possa assolutamente affermare che l'Antracene gode della proprietà foto-elettrica in modo rimarchevole.

Come accennavo in principio, non solo l'Antracene solido fuso o non fuso gode la proprietà foto-elettrica, ma ancora la possiedono le sue soluzioni.

Sperimentando queste colla solita disposizione e nelle stesse condizioni descritte in principio ho ottenuto i seguenti risultati:

Antracene di Kahlbaum in Benzolo: Tempo impiegato a scaricare la rete e l'elettrometro da 250 V. a 160: 155″, 157″, 157″, 157″. Fatto evaporare il Benzolo ed esaminato il residuo d'Antracene deposto, trovo nelle stesse condizioni: 35″, 43″, 45″, 50″, 57″, comportamento quindi analogo all'Antracene solito, ma con una stanchezza meno marcata.

Antracene della Badische Fabrik in anisolo nelle stesse condizioni di prima: 372″, 356″, 372″.

Antracene della Badische Fabrik in etere: 420″, 431″ (1).

Ho pure voluto vedere se i composti affini all'Antracene godevano di questa proprietà: le sostanze studiate sono: Fenantrene, Antrachinone, Naftolo, Naftalina, Alizarina e Fluorene. Di queste il più sensibile è il Fenantrene: cimentando del Fenantrene purissimo di Schuchardt presentante alla luce dell'arco una bella fluorescenza violetta, ho trovato che, sempre nelle solite condizioni, affinchè l'elettrometro scendesse da 250 V. a 160, occorrevano successivamente:

72″, 84″, 102″, 124″, 135″, 150″

e dopo una permanenza di quattro ore al buio:

117″, 136″, 144″, 148″, 150″

e dopo 90 ore:

64″, 100″, 123″.

Questa sostanza presenta dunque un effetto foto-elettrico un po' minore di quello presentato dall'Antracene, ma colle stesse modalità. Esperimentando con una lamina di Fenantrene fuso da pochi minuti, ho ottenuto nelle stesse circostanze:

15″, 16″, 16″, 16″ 15″,

ma dopo circa quattro ore di permanenza al buio:

16″, 18″, 22″, 26″, 31″, 37″, 39″, 40″, 45″, 45″

e dopo 90 ore:

23″, 26″, 32″.

Come si vede, anche qui allo stato puro l'effetto foto-elettrico è maggiore, ma la stanchezza si fa sentire subito anche nel Fenantrene fuso per quanto in grado minore che non nel Fenantrene non fuso.

Il comportamento invece delle altre sostanze non è di questo tipo: l'effetto foto-elettrico è molto minore e la stanchezza non si fa sentire.

(1) La dispessione allo scuro è talmente piccola, che potè benissimo essere trascurata in tutte le misure effettuate con questo metodo.

Riporto qui i risultati ottenuti senz'altro:

Antrachinone. Tempo impiegato per cadere da 250 a 160 Volta:

337″, 337″, 336″.

Naftolo. Idem:

225″, 225″.

Naftalina. Idem:

504″, 526″, 517″.

Alizarina. Idem:

138″, 135″, 135″.

Fluorene (presenta una viva fluorescenza roseo-violetta) idem:

124″, 120″, 120″.

Ho voluto finalmente vedere l'influenza dell'impurità dell'Antracene sul suo effetto foto-elettrico; già dalle misure effettuate sulle tre prime qualità si può notare che l'effetto foto-elettrico, sebbene cresca colla purezza, non varia molto con essa; ad ogni modo ho voluto sperimentare anche sull'Antracene cosidetto *crudo* (della Fabbrica in Höchst $^{2}/_{M}$), che ha l'aspetto di una terra di colore verde-bruno. Sottoponendolo alle stesse condizioni degli altri corpi precedentemente studiati, ho trovato:

63″, 65″, 64″.

Come si vede, l'effetto foto-elettrico è ancora molto sensibile; ad ogni modo di tutte le qualità sperimentate da me, presenta l'effetto nel massimo grado quella che dai suoi caratteri fisici risulta essere la più pura di tutte.

Meteorologia. — *La pioggia a Roma.* Nota del dott. Filippo Eredia, presentata dal Socio E. Millosevich.

Mineralogia. — *Appunti di mineralogia sarda. Bournonite del Sarrabus.* Nota di Federico Millosevich, presentata dal Socio G. Struever.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Elettrochimica. — *Sopra la formazione elettrolitica degli iposolfiti* [1]. Nota di M. G. Levi e M. Voghera, presentata dal Corrispondente R. Nasini.

Influenza del polisolfuro nel liquido catodico. — In un'elettrolisi eseguita per incidenza durante il corso del nostro lavoro ci accorgemmo che avendo adoperato un solfuro piuttosto impuro per polisolfuro, la quantità di iposolfito formatasi era assai maggiore del solito, pur essendo rimaste identiche alle solite le condizioni d'esperienza: la cosa si presentava possibilissima per non dire probabilissima; basti pensare che mentre per soluzioni di

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova. finita nel febbraio 1906. V. pag. 322.

solfuro Na_2S un F di elettricità migra con 16 di zolfo per soluzioni di un polisolfuro per es. Na_2S_5, dovrà logicamente migrare con 80 di zolfo, cioè con una quantità di zolfo 5 volte maggiore, e se lo zolfo-ione complesso può o tale quale, o scomponendosi successivamente in ioni più semplici, reagire tutto col solfito, si deve necessariamente arrivare ad un rendimento elettrolitico in iposolfito 5 volte maggiore. Il fatto si verifica realmente come risulta dalle due elettrolisi di cui più sotto riportiamo i risultati. L'esperienze furono eseguite usando come liquido catodico nel diaframma una soluzione di polisolfuro preparata sciogliendo a caldo lo zolfo in una soluzione concentrata di solfuro e come liquido anodico una soluzione alcalina di solfito sodico. Dopo l'elettrolisi si trovava all'anodo una piccola quantità di solfuro ed anche questa probabilmente dovuta alla presenza dell'alcali all'anodo; segno evidente questo che il polisolfuro non era venuto per nulla a contatto col solfito. In realtà se questo fosse successo, allora si avrebbe avute una formazione chimica di iposolfito per semplice reazione tra solfito e polisolfuro; questa reazione è assai più rapida di quella tra zolfo e solfito come noi stessi avemmo occasione di osservare.

Da un miscuglio di 20 cc. della nostra soluzione di polisolfuro e di 50 cc. della nostra soluzione di solfito ottenemmo a 18° in 18 ore (in recipiente chiuso) gr. 5,5 di iposolfito e da un miscuglio analogo tenuto per sole 5 ore a 58°, circa la stessa quantità.

Escludendo che nelle elettrolisi eseguite sia avvenuta mescolanza di liquidi, ne riportiamo ora i risultati:

	I.	II.
Durata ore	6	6
Intensità di corrente	2 Amp.	2 Amp.
Densità anod. »	$\frac{16.6 \text{ Amp.}}{1 \text{ dmq.}}$	$\frac{16.6 \text{ Amp.}}{1 \text{ dmq.}}$
Temperatura	18°-38°	20°-37°
Tensione agli elettrodi	5.8 Volt	5.6 Volt
Rame deposto	gr. 13.8	gr. 14.4
Ampère-ora	11.6	12.1
Iposolfito trovato	gr. 20.584	gr. 27.217
» teorico	gr. 34.22	gr. 35.69
Rendimento	60 %	76 %

I rendimenti sono calcolati in base alla quantità teorica di iposolfito che è di gr. 2,95 di $Na_2S_2O_3$ per Amp.-ora quando si parta dal solfuro Na_2S; calcolati in tal modo essi risultano molto rilevanti; se però si pensa che in questa elettrolisi la quantità di zolfo migrante all'anodo per ogni Ampère-ora è molto maggiore, si capisce subito anche come realmente il rendimento sia assai minore al calcolato.

Se per es. si fosse sicuri che il nostro polisolfuro corrisponde completamente alla formola $Na_2 S_5$ e se ammettiamo che per azione della corrente avvenga la scissione in 2 Nà e S_5'' e che questo solfo-ione complesso reagisca completamente col solfito, la quantità teorica di iposolfito per 1 Amp.-ora diventa $5 \times 2,95 = 14,75$ gr. e quindi il rendimento 5 volte minore di quelli sopra riportati, eguale cioè a circa il 15 % come in generale s'era sempre trovato. Parrebbe quindi che con la complessità del ione solfo aumenti bensì la quantità assoluta di iposolfito formato, ma non venga sensibilmente a variare il reale rendimento elettrochimico.

Ad un dato sicuro però non possiamo pervenire, perchè non sappiamo esattamente quale fosse il polisolfuro da cui si partiva, e non sappiamo neppure come esso si scinda sotto l'azione della corrente e come reagisca l'eventuale solfo-ione complesso.

Misure di potenziale anodico. — A complemento delle nostre ricerche sulla formazione elettrochimica dell'iposolfito, sarebbe stato utile determinare per quali valori di potenziale anodico la reazione $S'' + SO_3'' + 2\Theta = S_2 O_3''$ abbia preferibilmente luogo, e tale determinazione noi abbiamo tentato di fare adottando il solito dispositivo a compensazione con l'elettrometro capillare e misurando la forza elettromotrice dell'elemento

Anodo | soluzione anodica || soluzione $KCl \frac{N}{10}$ | elettrodo a calomelano.

L'elettrodo di riferimento era stato preparato con tutte le cure e finiva con la punta del sifone in un bicchierino contenente soluzione di $KCl \frac{N}{10}$, nello stesso bicchierino pescava, chiuso da un piccolo tampone di carta bibula, un altro sifone riempito di soluzione di KCl e pescante nello spazio anodico della nostra solita cella elettrolitica con l'imboccatura esattamente di fronte e vicinissima all'anodo; si sospese naturalmente l'agitazione con idrogeno. In tutte le elettrolisi che più sotto riportiamo, perchè servano se non altro di complemento alle altre, eseguimmo a determinati intervalli di tempo le misure di potenziale anodico con l'aiuto dell'elettrodo campione, giungendo specialmente per piccole intensità di corrente a curve regolarissime. Pur troppo però non ci riuscì in alcun modo dall'esame di esse di giungere a qualche conclusione possibile. Tentammo di metterci successivamente (vedi poi elettrolisi IV e V) nelle condizioni più favorevoli (anodo platinato - polisolfuro al catodo - piccola alcalinità per $Na_2 CO_3$ all'anodo) e più sfavorevoli (anodo liscio - solfuro al catodo - molta Na OH all'anodo) per la formazione di iposolfito, senza trovare nei potenziali anodici differenze attribuibili alla nostra reazione. Abbiamo ancora tentato in esperienze che inutilmente riporteremmo, di elettrolizzare per un po' di tempo con Na OH al catodo e solfito all'anodo sostituendo poi alla soda il solfuro, oppure con solfito all'anodo e al catodo sostituendo poi al solfito catodico, il solfuro ed in ge-

nerale cercando in modi diversi di provocare quasi improvvisamente la formazione di iposolfito, ma senza giungere mai a variazioni un po' regolari e costanti del potenziale anodico: evidentemente sono troppe e troppo complicate le reazioni che avvengono e che possono avvenire nello spazio anodico per permettere un'osservazione sicura: inoltre bisogna sempre tener conto che anche nelle migliori condizioni di rendimento in iposolfito, prepondera sempre su tutte le altre reali e possibili reazioni, l'ossidazione del solfito a solfato o a ditionato, ed è di queste reazioni che risente principalmente l'influenza il potenziale anodico.

In ogni modo riportiamo nelle seguenti tabelle le diverse elettrolisi eseguite, in qualcuna delle quali si ottennero dei discreti rendimenti in iposolfito e che servono a confermare e a completare i risultati finora ottenuti: aggiungiamo ancora le misure di forze elettromotrici unicamente come dati esperimentali, senza pretendere di ricavare da essi la conclusione che si sarebbe desiderata. Notiamo che sopra i valori delle forze elettromotrici è sempre indicata la combinazione misurata, facendo precedere l'elettrodo funzionante da anodo.

I) Elettrolisi con diaframma:

Liquido catodico	soluzione di solfuro
" anodico	soluzione di solfito alcalina per Na_2CO_3
Anodo	platino platinato 3 × 4 cm.
Intensità.	2 Ampère
Durata	5 ore
Rame deposto nel voltametro . .	gr. 11.17
Ampère-ora	9.4
Iposolfito trovato	gr. 7.086
" teorico	gr. 27.73
Rendimento	25.5 %

Tempo in minuti'	Tensione agli elettrodi in Volt	F. E. M. della pila Anodo | liq. anodico || $KCl\frac{N}{10}$ | elett. a calom.
10	6.5	1.223
25	6.1	1.193
40	5.9	1.122
55	5.7	1.057
70	5.5	1.022
85	5.5	1.013
110	5.5	1.009
123	5.5	0.892 (?)
145	5.5	0.945
175	5.5	0.949
205	5.5	0.982
235	5.5	0.988
265	5.5	1.013
295	5.3	0.994

II) Elettrolisi con diaframma. Condizioni analoghe a quelle dell'elettrolisi precedenti:

Intensità	0.5 Amp.
Durata	10 ore
Rame deposto	gr. 5.72
Ampère-ora	4.8
Iposolfito trovato	gr. 4.671
" teorico	gr. 12.68
Rendimento	33 %

Tempo	Tensione agli elettrodi	F. E. M. Anodo | liq. anodico || KCl $\frac{N}{10}$ | elettrodo a calom.
15	3.2	0.194
40		0.238
55		0.252
80		0.260
105		0.288
135		0.250
175		0.304
195	costante	0.311
230		0.335
290		0.380
350		0.407
405		0.427
465		0.459
525		0.513
600		0.521

III) Elettrolisi con diaframma. Condizioni analoghe alle precedenti:

Intensità	0.15 Amp.
Durata	10 ore
Rame deposto	gr. 1.99
Ampère-ora	1.6
Iposolfito trovato	gr. 1.822
" teorico	gr. 4.72
Rendimento	37 %

Tempo	Tensione agli elettrodi	F. E. M. elettrodo $\frac{N}{10}$ || liq. anodico | anodo
5	2.1	0.166
20	2.1	0.166
40	2.2	0.166
70	2.2	0.166
90	2.2	0.166
120	2.2	0.166
150	2.2	0.166
180	2.25	0.173
240	2.30	0.181
300	2.3	0.190
360	2.3	0.194
420	2.3	0.203
480	2.3	0.210
540	2.3	0.215
600	2.3	0.223

IV) Elettrolisi con diaframma. Condizioni analoghe alle precedenti.

Liquido catodico . . . . . soluzione di polisolfuro
Intensità . . . . . 0.15 Amp.
Durata . . . . . 10 ore
Rame deposto . . . . . gr. 2.08
Ampère-ora 1.75
Iposolfito trovato . . . . . gr. 5.348
Iposolfito teorico { per Na_2S . . . . gr. 5.16
{ per Na_2S_5 . . . . gr. 25.80
Rendimento (per Na_2S_5) . . . . . 20 %

Tempo	Tensione agli elettrodi	F. E. M. elettrodo $\frac{N}{10}$ || liq. anodico | anodo
15	1.8	0.132
30	1.8	0.137
45	1.75	0.142
60	1.7	0.144
75	1.7	0.145
90	1.7	0.145
120	1.7	0.146
180	1.7	0.158
240	1.7	0.173
300	1.7	0.183
360	1.7	0.190
420	1.7	0.200
480	1.75	0.210
540	1.8	0.219
600	1.8	0.229

V) Elettrolisi con diaframma. Condizioni analoghe alle precedenti:

Liquido catodico . . . . soluzione di solfuro
» anodico . . . . soluzione di solfito alcalina per aggiunta di Na OH; 1 cc = 3.1 $HCl\frac{N}{1}$
Anodo . . . . . platino liscio
Intensità . . . . . 0.15 Amp.
Durata . . . . . 10 ore
Rame deposto . . . . . gr. 1.94
Ampère-ora 1.63
Iposolfito teorico . . . . gr. 4.8
» trovato . . . . traccie

Tempo	Tensione agli elettrodi	F. E. M. Anodo | liq. anodico || elettrodo $\frac{N}{10}$
15	2.50	0.546
30	2.54	0.561
45	2.56	0.578
60	2.62	0.600
90	2.64	0.618
120	2.66	0.631
150	2.69	0.654
180	2.66	0.633?
240	2.70	0.675
300	2.72	0.686
375	2.73	0.702
435	2.74	0.709
480	2.72	0.712
540	2.72	0.705
600	2.72	0.700

Da questi risultati viene ora messa in evidenza l'influenza della densità anodica di corrente sul rendimento, un po' meglio che nelle nostre prime esperienze: con piccole intensità si favorisce la formazione di iposolfito. Si può obbiettare che nell'elettrolisi con 0,15 Ampère si sarebbe anche in condizioni di formazione di tetrationato e quindi i rendimenti potrebbero risultare un po' superiori ai reali, dato il metodo d'analisi: ma in realtà se anche la reazione $2S_2O_3'' + 2\,\Theta = S_4O_6''$ può avere luogo, non devono essere che piccolissime le quantità di tetrationato che si formano per le ragioni che già esponemmo nella nostra precedente Nota, ed inoltre anche l'errore portato nell'analisi non potrebbe essere che minimo per il fatto che il tetrationato non è così facilmente scomponibile, come si trova detto in qualche luogo, nè in soluzione acida, nè in soluzione alcalina [1].

Concludendo, possiamo affermare che le condizioni più favorevoli perchè si compia il processo $SO_3'' + S'' + 2\,\Theta = S_2O_3''$ che è stato oggetto del nostro studio, sono le seguenti: anodo di platino platinato, piccola densità anodica di corrente, soluzione concentrata di solfito alcalina sempre, ma nel minimo grado possibile e per carbonato alcalino. La presenza di polisolfuro nello spazio catodico aumenta la quantità assoluta di iposolfito che si forma.

[1] La scomposizione avviene bensì, ma non così rapidamente come noi stessi avevamo asserito a pag. 10 della nostra precedente Nota.

Chimica. — *Sulla riduzione del Ferricianuro di potassio.* Nota di D. Venditori, presentata dal Socio S. Cannizzaro.

Presenta certamente grande interesse la stabilità di molti sali inorganici complessi di fronte ai mezzi più energici di ossidazione e riduzione. Molti complessi salini infatti si comportano come è noto unitariamente di fronte ai più energici mezzi ossidanti e riducenti, così come si comporterebbe un sale semplice qualsiasi. Se noi prendiamo infatti ad esaminare un qualunque sale complesso, ad es. il cloroplatinato potassico $[PtCl^6]K^2$, sappiamo che per azione dell'acido solfidrico esso subisce una riduzione secondo l'equazione seguente:

$$[PtCl^6]K^2 + H^2S = [PtCl^4]K^2 + 2HCl + S$$

in cui si vede come l'azione dell'acido solfidrico non riveli il platino ma si limiti al passaggio da un sale platinico complesso ad un sale platinoso, dal cloroplatinato cioè al cloroplatinito, senza che il sale al minimo perda il suo carattere. Analoghe considerazioni possono farsi per molti composti metalloammoniacali. Così se facciamo agire ad es. sul sale $PtCl^4 . 2NH^3$ l'acido solfidrico, questo riduce il composto dal tipo platinico al platinoso secondo la seguente reazione:

$$PtCl^4 . 2NH^3 + H^2S = PtCl^2 . 2NH^3 + 2HCl + S$$

rimanendo però le molecole di ammoniaca integralmente congiunte al cloruro di platino.

Anche qui adunque, come nel caso del cloroplatinato potassico, si passa da un composto al massimo del platino, ad un composto al minimo, permanendo inalterato il tipo complesso del sale.

Il contrario può dirsi per l'azione che molti ossidanti esercitano su un gran numero di sali complessi, azione che si effettua naturalmente in senso contrario a quella dei riduttori. Rimanendo ai due esempi sopra citati, per azione del cloro abbiamo infatti la possibilità di una reazione inversa di quella effettuata dall'acido solfidrico. Possiamo rappresentare i due processi nel modo seguente:

$$\left[\begin{matrix} Cl^4 \\ Pt \\ (NH^3)^2 \end{matrix}\right] \underset{Cl}{\overset{H^2S}{\rightleftharpoons}} \left[\begin{matrix} Cl^2 \\ Pt \\ (NH^3)^2 \end{matrix}\right]$$

$$\left([PtCl^6]K^2\right) \underset{Cl}{\overset{H^2S}{\rightleftharpoons}} \left([PtCl^4]K^2\right)$$

Analogo comportamento presentano altri sali complessi molto numerosi, tra cui i più comuni i prussiati alcalini $[FeCy^6]K^3$, $[FeCy^6]K^4$, i quali mostrano una grande stabilità e permettono agevolmente il passaggio dal ferro trivalente al bivalente e viceversa, per opera di svariati ed energici mezzi di ossidazione (Cl, HNO^3, ecc.) e di riduzione (H^2S . SO^2 ecc.). A proposito di questi ultimi, nella presente Nota riferisco intorno alla riduzione cui vanno incontro i ferricianuri alcalini per opera dell'acido solfidrico, per la quale, come si vedrà, ho potuto stabilire una equazione diversa da quella data in proposito parecchi anni or sono da Williamson [1].

Parte Sperimentale.

Il ferricianuro di potassio si trasforma per azione dell'acido solfidrico lentamente a temperatura ordinaria, rapidamente a caldo, in parte in ferrocianuro di potassio, nel mentre si forma un precipitato in sulle prime di color verdognolo che si trasforma tosto in uno di color celeste chiaro, si libera un po' di zolfo, si svolge acido cianidrico.

Il precipitato color celeste lungamente esaurito in Soxhlet con solfuro di carbonio, per liberarlo dallo zolfo cui era frammisto, venne sottoposto all'analisi, seccato a 100°. Ai saggi qualitativi esso mostrò contenere ferro, cianogeno, potassio. Bollito con soluzione di idrato di potassio, si precipitava da esso dell'idrato di ferro, e passava in soluzione il ferrocianuro di potassio.

Fu analizzato quantitativamente riscaldandone una data quantità in crogiuolo in presenza di acido solforico concentrato, indi calcinando previa aggiunta di qualche goccia di acido nitrico. Il residuo di Fe^2O^3 e K^2SO^4 si lisciviava con acqua calda pesando l' Fe^2O^3 rimasto indisciolto ed il solfato alcalino asportato.

Il gruppo cianogeno venne dosato allo stato di azoto, facendo la combustione della sostanza con i mezzi ordinari. Riferisco qui sotto i risultati delle analisi:

I. sost. gr. 0,3424 ⟶ gr. 0,1570 Fe^2O^3 ⟶ 0,1703 K^2SO^4
II. " " 0,2818 ⟶ " 0,1293 " ⟶ 0,1398 "
III. " " 0,1569 ⟶ cmc. 32,9 di N (mm. 749,7; 15°,5).

Riportandosi a 100 gr. di sostanza si ha:

	Trovato			Calcolato per $FeCy^6$ FeK^2
	I	II	III	
Fe	32,09	32,12	—	32,32
K	22,33	22,27	—	32,60
N	—	—	24,16	24,31

[1] Ann. der Pharm., 57, 237, 1846.

Da ciò risulta come il precipitato formatosi per azione dell'acido solfidrico sulla soluzione di ferricianuro di potassio, non è altro che ferrocianuro ferroso bipotassico $Fe\,Cy^6\,Fe\,K^2$, quello stesso che Erlenmeyer trovò rimanere come residuo della preparazione dell'acido cianidrico dal ferrocianuro potassico e acido solforico diluito.

Allo scopo di seguire quantitativamente questa reazione tra acido solfidrico e ferricianuro potassico, onde poterne stabilire un'equazione, si partì da una quantità ben pesata di ferricianuro potassico purissimo e seccato a 100°. La soluzione acquosa di questo sale veniva fatta attraversare da una corrente di acido solfidrico, intercalando il recipiente ove si trovava tra due bocce di lavaggio in modo che essa, durante la reazione, rimanesse all'infuori del contatto dell'aria. Il passaggio del gas si protraeva per circa 4 ore durante le quali il recipiente contenente la soluzione era mantenuto su bagno maria bollente. Dopo aver lasciato raffreddare in corrente di acido solfidrico, si separava il liquido dal precipitato formatosi raccogliendo questo su filtro tarato.

Il filtrato leggermente opalescente per zolfo in sospensione, avente il color giallo, proprio della soluzione di ferrocianuro potassico, veniva portato a secco su bagno maria, in piccola capsula tarata (filtrando all'occorrenza per separare lo zolfo raggrumatosi); indi mantenuto a 100°-105° e pesato fino a costanza di peso. Si pesava in tal modo il ferrocianuro potassico allo stato anidro, poichè questo sale perde completamente le sue molecole d'acqua di cristallizzazione a 100°-105°, onde in definitiva si partiva dal ferricianuro anidro, e si pesava il ferrocianuro pure allo stato anidro.

D'altra parte il residuo raccolto come si è detto su filtro tarato, ben lavato con acqua a temperatura ordinaria, seccato in stufa a 100° era lungamente esaurito in Soxhlet con solfuro di carbonio, onde privarlo dalle forti quantità di zolfo frammisto, indi nuovamente seccato a 100° e pesato. I dati ottenuti in tre prove eseguite furono i seguenti:

		$Fe\,Cy^6\,K^3$	$Fe\,Cy^6\,K^4$	$Fe\,Cy^6 \begin{matrix} Fe \\ K^2 \end{matrix}$
I.	gr. sost.	9,790	gr. 7,220	gr. 1,770
II.	" "	9,325	" 6,927	" 1,662
III.	" "	13,319	" 9,836	" 2,450

Riferendo questi numeri a 100 parti di ferricianuro si ha:

	I	II	III
$Fe\,Cy^6\,K^4$	73,75	71,28	73,90
$Fe\,Cy^6\,Fe\,K^2$	18,09	17,82	18,40

Derivando da questi dati centesimali i rapporti molecolari se ne deduce l'equazione seguente:

$$6Fe\,Cy^6\,K^3 + 3H^2S = 4Fe\,Cy^6\,K^4 + Fe\,Cy^6 \begin{matrix} Fe \\ K^2 \end{matrix} + 6H\,Cy + 3S$$

per la quale si calcola che da 100 parti di ferricianuro potassico devono ottenersene 74,57 di ferrocianuro potassico e 17,52 di ferrocianuro ferroso bipotassico $Fe Cy^6 Fe K^2$; numeri come vedesi, molto ben concordanti con i risultati sperimentali sopra esposti. Mentre stando a quello che asserisce Williamson (loc. cit.), l'equazione sarebbe andata nel senso:

$$\begin{aligned} 8Fe Cy^6 K^3 + 3H^2S &= 6Fe Cy^6 K^4 + 2Fe Cy^6 H^3 + 3S \\ &= 6Fe Cy^6 K^4 + Fe Cy^3 + 3HCy \end{aligned}$$

Secondo la quale equazione, 100 parti di ferricianuro dovrebbero dare 83,91 parti di ferrocianuro potassico e 10,17 parti di residuo in discordanza notevole con i risultati sperimentali su riportati.

Botanica. — *Ricerche sul Fico e sul Caprifico.* Nota di B. Longo, presentata dal Socio R. Pirotta [1].

Già ho avuto occasione di pubblicare di aver trovato nel Fico quel particolar modo di percorso del tubetto pollinico distinto col nome di *acrogamia aporogama*: nell'ovulo di questa pianta, infatti, manca il canale micropilare ed al suo posto si trova uno speciale tessuto, attraverso il quale scorre il tubetto pollinico per raggiungere l'apice della nucella [2].

Lo studio embriologico, che mi condusse a stabilire questo speciale modo di percorso del tubetto pollinico nel Fico, fu l'inizio di una serie di ricerche da me intraprese oltre che sul Fico anche sul Caprifico con lo scopo di occuparmi non solo della caprificazione, dell'importanza o meno di essa, ma anche di ricercare il valore sistematico da assegnarsi al Fico ed al Caprifico ed i loro rapporti di parentela. A queste ricerche sto tuttora attendendo e, non appena saranno ultimate, pubblicherò in una Memoria i risultati ottenuti con i relativi disegni. Ma poichè la piccolezza dei fiori, la diversità di essi in uno stesso ricettacolo e nelle varie sorta di ricettacoli sia del Fico che del Caprifico, non che nelle numerosissime razze dell'uno e dell'altro, rendono l'esame del materiale molto lungo e laborioso, credo opportuno fare frattanto una breve esposizione dei principali risultati ai quali sono finora giunto.

Studiando i fiori (pistilliferi) delle due infiorescenze (*forniti* e *fioroni*) del Fico ho potuto fare alcune osservazioni che non concordano con quanto dicono il Gasparrini ed il Solms-Laubach. Per quanto riguarda intanto i fiori dei forniti, io non vi ho trovato un canale stilare come descrive il Gasparrini,

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

[2] Longo B., *Acrogamia aporogama nel Fico domestico* (*Ficus Carica L.*). Annali di Botanica, vol. III, fasc. 1° (luglio 1905), pag. 14.

bensì lo stilo pieno, occupato nella sua parte assile da un tessuto collenchimatico. Inoltre nei fiori dei fioroni, contrariamente a quanto espongono il Gasparrini ed il Solms-Laubach, ho trovato esistente il sacco embrionale. Infatti, nei fiori dei fioroni del Fico, può presentarsi un unico ovulo oppure possono esservene parecchi. Quando l'ovulo è unico, esso è costituito come quello dei fiori dei forniti: è, cioè, anfitropo, provveduto di due tegumenti dei quali solo l'interno copre l'apice della nucella, non presenta canale micropilare ed è anche, come quello, provveduto di un sacco embrionale normalmente sviluppato. Quando, invece, si vengono a formare nella cavità ovarica parecchi ovuli, essi si comprimono a vicenda, di modo che, nella cavità ovarica più meno deformata, viene a trovarsi un mucchio di ovuli spesso deformati, o con sviluppo ridotto o mancato addirittura. Essi non sono tutti della stessa forma, nè della stessa grandezza, nè si trovano nello stesso stadio di sviluppo: si allontanano più o meno dal tipo normale ed anzi alcuni non hanno affatto la forma nè la costituzione di ovuli e mancano di ogni traccia di sacco embrionale. Però sempre, in ogni ovario, alcuni, o almeno uno, degli ovuli si presentano ben differenziati e con un sacco embrionale quasi sempre normalmente costituito, quantunque anch'essi deviino più o meno dal tipo normale: sono, infatti, spesso ortotropi, ma possono anche presentare modificazioni di questa forma fino a campilotropi o quasi; talora la nucella non è coperta dal tegumento interno, ma fuoresce da esso a guisa di un mammellone più o meno appuntito, ed anche i tegumenti possono presentarsi più o meno modificati.

Generalmente i fiori dei fioroni del Fico differiscono da quelli dei forniti per diversi caratteri. Comparando i fioroni del Fico conosciuto a Roma col nome di *Fico di S. Antonio*, con i forniti di uno qualsiasi dei Fichi da me studiati, ho potuto stabilire le seguenti differenze: i fiori dei fioroni presentano due stimmi egualmente sviluppati, lo stilo cavo e provveduto di due fasci vascolari, mentre nei fiori dei forniti uno degli stimmi si presenta ordinariamente molto più sviluppato dell'altro e lo stilo, pieno, è percorso da un solo fascio vascolare; inoltre nei primi la cavità ovarica può contenere uno o più ovuli che, come ho detto, possono avere forma diversa e sviluppo diverso; nei secondi, invece, la cavità ovarica contiene sempre un unico ovulo anfitropo. Però nei fioroni di altre razze (*Fico ottato*, *Fico brusciotto bianco*), non che in quelli di Fichi selvatici da me raccolti su vecchi muri a Roma, ho trovato nella struttura del pistillo tutti i gradi di passaggio dalla struttura su descritta a quella del pistillo dei fiori dei forniti. Talora, infatti, uno degli stimmi è più sviluppato dell'altro e lo stilo è percorso da un solo fascio vascolare; talora lo stilo è cavo soltanto in alto od anche del tutto pieno; talora, in fine, in tutti i fiori di un ricettacolo l'ovario contiene un solo ovulo anfitropo.

Per quanto riguarda i fiori dei fioroni del Fico, aggiungerò ancora che

non ho mai trovato in essi ovario biloculare, mentre il Gasparrini ed anche altri autori dicono esservi esso frequente. Nel caso in cui l'ovario contiene parecchi ovuli si può, infatti, aver l'impressione che si tratti di un ovario biloculare, però le sezioni in serie, trasversali e longitudinali, mostrano evidente l'unilocularità dell'ovario.

Come è noto il Caprifico è ordinariamente *trifero*, presenta cioè tre sorta di ricettacoli: *fioroni*, *forniti* e *cratiri*, tutti e tre galligeni; nei fioroni sono abbondanti i fiori staminiferi. Il Fico è, invece, generalmente *bifero*; esso non porta infatti che due sorta di ricettacoli: *fioroni* e *forniti*, entrambi non galligeni e generalmente privi di fiori staminiferi. Un'eccezione degna di nota relativamente alla qualità dei ricettacoli portati dal Caprifico, io ho osservato sopra un individuo vivente sulle mura di Roma. In questo Caprifico, oltre a numerosi fioroni normali, io ho trovato sopra un ramo due ricettacoli che presentavano, invece, tutti i caratteri dei fioroni del Fico: in essi mancavano, infatti, i fiori staminiferi ed i fiori pistilliferi erano longistili, con lo stilo cavo, percorso da due fasci vascolari e terminato da due stimmi molto sviluppati; l'ovario conteneva sempre un unico ovulo anfitropo e con sacco embrionale normalmente sviluppato. Questo individuo per i suoi fioroni presentava quindi caratteri sia del Caprifico che del Fico, per cui non ho difficoltà ad ammettere che il Pontedera abbia realmente potuto trovare un individuo portante *fioroni* come quelli del Caprifico e *forniti* come quelli del Fico, coi caratteri cioè di quella forma intermedia fra il Caprifico ed il Fico da lui distinta col nome di *Erinosyce* e che gli autori posteriori hanno messo fortemente in dubbio, anzi negato addirittura.

Per quanto riguarda la deposizione dell'uovo della Blastofaga (*Blastophaga grossorum* Grav.) nei fiori pistilliferi dei fioroni del Caprifico ed i fenomeni che avvengono nell'ovulo successivamente a tale deposizione, noterò anzi tutto che, come esattamente descrive il Solms-Laubach, l'uovo dell'insetto viene a trovarsi collocato fra il tegumento interno e la nucella dell'ovulo e non, come ritenne il Gasparrini, nella stretta cavità ovarica fra la superficie esterna dell'ovulo e la parete dell'ovario. Inoltre, dopo la deposizione dell'ovulo della Blastofaga, mentre da esso si va sviluppando la larva, ho osservato nel sacco embrionale la presenza di alcuni nuclei endospermici [1], come pure ho osservato moltiplicazione dei nuclei anche in cellule della nucella. Però, sia nel sacco embrionale che in queste cellule nucellari non ho mai osservato figure cariocinetiche, ciò che mi induce a ritenere che, probabilmente, tale moltiplicazione nucleare avverrà per frammentazione; e questo è anche avvalorato dal fatto che in qualche nucleo delle suddette cellule

[1] Il Solms-Laubach non fa cenno della presenza di tali nuclei.

della nucella ho osservato delle lobature ed anche talora delle strozzature più o meno pronunziate. Questa moltiplicazione di nuclei sia nel sacco embrionale che nelle cellule della nucella è certo in stretto rapporto con la presenza dell'uovo dell'insetto: infatti essa non solo è successiva alla deposizione di que st'uovo, ma non l'ho affatto osservata nei fiori in cui l'uovo non era stato deposto.

Un'altra osservazione da me fatta riguarda anche i rapporti fra il Caprifico e la Blastofaga. È un fatto reso noto dai diversi autori che, per l'allegamento dei ricettacoli del Caprifico, è necessario che la Blastofaga vi penetri e vi deponga le uova nei fiori pistilliferi; ed è così squisito tale adattamento che, quando per esempio durante l'inverno, per il gelo o per altre cause, i ricettacoli ibernanti (cratiri) cadono, per fare allegare i fioroni occorre caprificare lo stesso Caprifico. Anch'io ho generalmente constatato la necessità della visita dell'insetto per l'allegamento dei fioroni del Caprifico, però ho anche potuto constatare che vi sono dei Caprifichi i cui fioroni, pur non essendo stati visitati dall'insetto, persistono sulla pianta e portano il polline a maturità, come ho appunto osservato in qualche Caprifico vivente sulle mura di Roma.

Riguardo alla questione già tanto discussa del significato e della importanza della caprificazione, si può dire che il risultato sicuro a cui conducono le ricerche e le esperienze fatte è la conferma di un' opinione che già era stata emessa da Teofrasto, che se vi sono, cioè, delle razze di Fico che non hanno bisogno della caprificazione per l'allegamento e la maturazione dei ricettacoli, ve ne sono però altre per le quali essa è, invece, assolutamente indispensabile. Perciò possiamo spiegarci perchè siano state così contraddittorie le opinioni emesse dai diversi autori sul valore della caprificazione. La Blastofaga, sulla cui azione sono pur stati diversi i pareri degli autori, rappresenta l'agente naturale della impollinazione, giacchè per mezzo di essa è reso possibile il trasporto del polline dai fioroni del Caprifico nei forniti del Fico. È vero che vi sono anche autori i quali pretendono che l'insetto, prima del suo ingresso nel giovane *fornito* dal Fico, si forbisca così bene da non introdurre con sè nel ricettacolo granelli di polline; ma, per ritenere ciò, bisogna non aver mai aperto un ricettacolo caprificato e non averne mai osservati i fiori al microscopio, giacchè non può certamente sfuggire all'osservazione la notevole quantità di granelli pollinici che si trovano, anche germinati, sugli stimmi,

Un altro fatto al quale credo anche opportuno accennare qui è quello per cui alcune sostanze come l'olio, l'acido solforico ecc., poste sull' ostiolo dei ricettacoli già abbastanza sviluppati dei Fichi ne accelerano la maturazione. Questo processo non si può però paragonare alla caprificazione; esso

del resto viene eseguito molto tempo dopo il tempo utile per la caprificazione e non ha alcun rapporto con l'allegamento o meno dei ricettacoli, nè con l'abbonimento o meno dei semi. E tanto meno deve ritenersi che l'olio, posto sull'ostiolo, sia un mezzo che faciliti l'ingresso alla Blastofaga come avrebbe opinato qualche autore!

Anche sui rapporti di parentela fra il Fico ed il Caprifico non tutti gli autori che si sono occupati dell'argomento sono stati dello stesso parere. Ma l'opinione che deve oramai accettarsi è quella che il Fico ed il Caprifico altro non siano che individui appartenenti alla medesima specie, per quanto distinti per la qualità dei fiori, e come una delle più belle prove va senza dubbio ricordato il fatto dimostrato sperimentalmente che dai semi del Fico si sviluppano sia Fichi che Caprifichi. Il Caprifico non va però considerato, come è comunemente ammesso, come il Fico selvatico: noi possiamo, infatti, trovare allo stato selvatico anche degl'individui ben distinti dal Caprifico, che hanno i caratteri dei veri Fichi e che portano dei ricettacoli maturi, ricchi di zucchero e buoni a mangiarsi come quelli del Fico coltivato. Ne ho trovati su vecchi muri a Roma, e del resto nella valle del fiume Lao in Calabria essi sono anche distinti e conosciuti dai contadini.

Fisiologia vegetale. — *Influenza dei colloidi su la secrezione e l'azione dell'invertasi.* Nota di E. Pantanelli, presentata dal Socio R. Pirotta [1].

Con un lavoro precedente [2] ho iniziato una serie di ricerche su la meccanica cellulare della secrezione. Indico con *secrezione* (da non confondersi con la produzione intracellulare dell'enzima) una funzione vitale, e precisamente: « l'emissione di sostanze dal protoplasto vivo, resa possibile da un cambiamento *autoregolato* delle condizioni di permeabilità della membrana plasmica, tale, che l'organismo possa a piacere *revertirlo* » (l. c., pag. 113).

Simili studî sono in fisiologia animale assai difficili, per non dire impossibili, perchè, oltre alla differenziazione maggiore degli organi, le influenze sui nervi interferiscono con le influenze dirette su le cellule secretrici, e perchè anche i movimenti muscolari possono intervenire a modificare l'attività di parecchie glandule. Invece, nei vegetali è facilmente controllabile lo stato di salute, di attività moltiplicativa e di omogeneità delle cellule

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Roma.

[2] *Meccanismo di secrezione degli enzimi.* Annali di Botanica, III, pagg. 113-142 (1905).

secernenti, tanto più poi l'assenza di organismi estranei. Quest'ultima condizione è difficilmente raggiungibile nelle mucose animali. Le piante, inoltre, possono variare la superficie secernente, adattarsi più facilmente a secernere sostanze che normalmente non secernono e viceversa, come pure regolare le loro attività entro ampli limiti.

Però anche nelle piante non è facile procurarsi il materiale adatto. La maggior parte delle piante verdi non secernono altro che prodotti gasosi in condizioni normali, e specialmente se si vuole un'abbondante secrezione di enzimi, paragonabile a le secrezioni animali, bisogna ricorrere a Funghi e Bacterii. Di questi ultimi però non sono ancora riuscito a controllare con sicurezza lo stato di salute. Anche i micelii dei Funghi pluricellulari non si prestano per studî precisi, perchè (1) le ife più affondate nel substrato muoiono presto, specialmente dopo la fabbricazione delle spore ed anche indipendentemente da queste. Rimangono quindi i Funghi unicellulari ed i Lieviti, di cui mi sono appunto servito. Per i metodi di cultura e di analisi, specialmente di determinazione dell'attività inversiva (invertasi) rimando al citato lavoro, nel quale è anche esposta la ragione, per cui ho cominciato con lo studio dell'invertasi, la quale viene realmente *secreta* dagli organismi adoperati.

Ed ecco sorge una domanda: « in caso di reale secrezione, come può l'enzima, cioè un colloide a molecola assai grossa, e certamente non troppo solubile nei lipoidi della membrana plasmica, attraversare questa con tanta rapidità? » (2). Su questo punto s'impernia la questione della meccanica di secrezione degli enzimi (3).

Il mio procedere è questo: frenare o aumentare la secrezione dell'enzima diminuendo o aumentando la permeabilità cellulare. Dove era possibile, p. e.. nei Lieviti, ho misurato anche la permeabilità cellulare per alcuni sali e per lo zucchero ed ho trovato, che essa aumenta durante la fermen-

(1) *Su le regolazioni del turgore nelle volgari muffe.* Novo Giorn. Botan., (2), Vol. XI, pag. 341 (1904); *Zur Kenntniss der Turgorregulationen usw.*, Jahrb. f. wiss. Botan., XL, pag. 308 (1904). — La gravità di questa fonte di errore negli studî su la secrezione è riconosciuta ormai anche da Czapek, *Biochemie der Pflanzen*, Vol. II, pag. 81 (1895).

(2) Loc. cit, pag. 118. — Recentemente, E. Reiss, *Ueber das Verhalten von Fermenten zu kolloidalen Lösungen*, Beitr. z. chem, Physiol. u. Pathol., Bd. VII, pagg. 151-152 (1905), ha mostrato che la chimosina e la tripsina passano dall'acqua al cloroformio, e che la catalasi del latte sta nelle goccette di grasso del medesimo. Inoltre Dauwe (Ibid., Bd. VI, pagg. 426-453 (1905) ha trovato che la pepsina viene assobita da diversi colloidi, fra cui anche l'albumina, tanto disciolta che coagulata, formandovi una soluzione solida.

(3) O' Sullivan, Journ. chem. Society, Trans., Vol. LXI, pagg. 593 e 926 (1892) per l'invertasi e Beijerinck (Centr. f. Bakter., (2), Bd. III, pagg. 450, 524 (1897); Bd. IV, pag. 723 (1898), come pure Hahn e Geret (in Buchner, Zymasegärung, 1903, pag. 257) per la proteasi del lievito hanno già mostrato, che la secrezione d'enzima è possibile solo per un'alterazione della permeabilità.

tazione parallelamente alla produzione di alcool. Siccome l'alcool è una sostanza eminentemente permeante, così esso aumenta la permeabilità anche per altre sostanze per sè stesse poco permeanti, un fatto comune in tutte le cellule vegetali [1] e forse anche animali [2]. In generale, si può tentare di far variare la permeabilità facendo agire su la membrana plasmica sostanze disciolte permeanti o non permeanti, mentre i colloidi non dovrebbero influenzare affatto la permeabilità cellulare, a meno che essi non producano sfioccamento, cioè diminuzione di superficie delle micelle, nei colloidi protoplasmatici. Inoltre i colloidi, con l'aumentare la viscosità o attrito interno del liquido ambiente, dovrebbero diminuire la velocità di secrezione e di azione dell'enzima.

Nel lavoro precedente mi ero occupato solamente, per stabilire il fatto, delle variazioni dell'attività inversiva estracellulare, comparata con la produzione intracellulare di enzima, ed avevo trovato che la gomma arabica, la gelatina ed il peptone favoriscono grandemente lo sviluppo degli organismi sperimentali (*Mucor stolonifer*, razza di lievito di pane romano, razza di *Ellipsoideus* da un vino Chianti) mentre tanto l'attività inversiva interna come l'attività inversiva esterna (che io assumevo senz'altro come indice della secrezione dell'enzima) vengono notevolmente diminuite da la gomma e dal peptone, che la gelatina pareva senza effetto, e che la permeabilità di protoplasti per l'invertina variava nei detti lieviti consentaneamente a la permeabilità per alcuni sali (Na Cl, Mg SO_4, NH_4 Cl) e per lo zucchero. Infatti essa è per lo più massima durante la massima attività fermentativa e viene notevolmente diminuita dai colloidi su detti, specialmente dalla gomma e dal peptone.

Ulteriori esperienze mi permettono di confermare, ampliare e interpretare meglio questi resultati.

Anzitutto anche la *gelatina* frena nel Lievito Chianti la secrezione (intesa nel senso su detto), non però la produzione d'invertasi, mentre favorisce lo sviluppo del lievito. Questa influenza si rende evidente ad una concentrazione di gelatina più elevata che per gli altri colloidi e nel *Mucor* è anche più spiccata che nei Lieviti, perchè nel *Mucor* la gelatina frena anche la produzione intracellulare dell'enzima. Esempio (*Mucor stolonifer*):

Substrato	Invertasi esterna 3° giorno	Invertasi esterna 5° giorno	Invertasi esterna 9° giorno	Invertasi interna alla fine
Cultura A *norm.* —	38	259	178	4071
" B " + 2 % gelatina	5.6	126	125	4070
" C " + 3 % "	tracce	tracce	40	2476
" D " + 4 % "	nulla	tracce	12	1876

(1) Pantanelli, *Esplosione delle cellule*. Annali di Botanica, Vol. II, pagg. 297-358 (1905).

(2) Così p. es. la secrezione del succo gastrico è aumentata da le bevande alcooliche, gli aromi, i nervini, tutte sostanze facilmente permeabili.

Anche la *silice colloidale* ($Si(OH)_4$ [1]), impedisce parzialmente la secrezione d'invertasi, non sempre però ne frena la produzione intracellulare. Le esperienze con la silice dànno resultati meno netti, perchè la silice stessa *favorisce* l'azione inversiva, *senza* però che la silice da sola, a la concentrazione da me impiegata ed a la temperatura d'inversione (56°), basti a scindere il saccarosio. Prova:

Di uno stesso liquido culturale (di Lievito) contenente silice (circa 25 %) e invertasi, 10 cmc. vennero messi ad invertire, a 56°, 10 cmc. di saccarosio al 40 %. Hexosio formatosi in un'ora (oltre quello esistente di già): 2330 (mg. CuO). Altri 10 cmc. vennero prima della prova d'inversione tenuti a 98° C. per 25 minuti. Poi: hexosio formatosi in un'ora (per azione della sola silice): 5. La cultura parallela senza silice conteneva tanta invertasi esterna, che in un'ora dava 320 (mg. CuO) hexosio.

La silice appoggia l'azione dell'invertina, ma questa azione non comincia ad essere notevole che a temperatura elevata, ciò che mi ha permesso di stabilire, che a 25° (temperatura di cultura) la silice frena, al pari degli altri colloidi, l'attività inversiva estracellulare. Però nel lievito le esperienze con la silice non sempre riescono, perchè il lievito si agglutina facilmente e fa aggrumare anche la silice. Allora l'invertasi si ripartisce tra la fase acquosa e la fase colloidale a favore di quest'ultima, la quale assorbe anche i sali e gli zuccheri. Più chiaro è il resultato con *Mucor*, nel quale si può ridurre la secrezione dell'invertasi a meno della metà facendo uso di una silice al 4-5 %, che ha consistenza quasi gelatinosa. La produzione intracellulare però viene poco influenzata, talora anzi aumentata da la silice.

Con la dimostrazione, che la silice esercita la stessa azione inibente dei colloidi organici, si previene l'obbiezione teleologica, che questi colloidi rendano inutile l'uscita dell'invertasi per correlazione alimentare, e siccome il peptone non frena la secrezione più degli altri colloidi, è chiaro, che decidono anzi tutto le condizioni fisiche.

Influenza dell'età. — Con l'invecchiare delle cellule, risp. della cultura, aumenta sempre l'attività inversiva estracellulare, ciò che nei Lieviti coincide con l'aumento di permeabilità dovuto all'azione dell'alcool e degli altri prodotti di fermentazione, fra cui anche l'acido carbonico, che notoriamente ed al pari di qualunque sostanza nociva fa aumentare la permeabilità [2]. Nel *Mucor* è pure evidente l'aumento di secrezione dell'invertasi con l'età,

(1) Preparata mescolando soluzioni diluite di HCl e K_4SiO_4 in egual volume, e poi dialisando.

(2) Per i corpuscoli rossi, v. Bottazzi, *Fisiologia generale*, Vol. I, pag. 283 (1906). Il primo a constatare che l'insufficiente aereazione determina l'uscita di invertasi fu Fernbach, Ann. d. Institut Pasteur, IV, pagg. 1 e 641 (1890). Effetto dell'CO_2 sul lievito: Pantanelli, *Ricerche sul turgore del lievito*. Annali di Botanica, Vol. IV, pag. 1 (1906).

che dipenderà egualmente da l' azione dei prodotti del ricambio escreti e da l' insufficiente aereazione della parte sommersa del micelio. A questi risultati ero già arrivato nel precedente lavoro. Ulteriori ricerche, in cui venne seguita anche la produzione interna d' invertasi, mostrano che nelle cellule dei detti Lieviti l' invertina raggiunge un massimo in principio dello sviluppo

Lievito Chianti (Razza Nr. 31), a 16° c.

Età	norm. Invertasi interna	norm. Invertasi esterna	norm. Aumento del peso secco	norm. + 2.5 % gomma Invertasi interna	norm. + 2.5 % gomma Invertasi esterna	norm. + 2.5 % gomma Aumento del peso secco
1 giorno	513600	1620	0.8524 g.	423200	240	0.7612 g.
3 giorni	123100	152	1.8152 »	286900	430	1.3388 »
5 »	135100	108	1.8372 »	130500	710	1.7204 »
7 »	111100	110	1.8876 »	124500	160	2.3317 »

	Zucchero totale	Zucchero riduttore	Zucchero saccarosio	Zucchero totale	Zucchero riduttore	Zucchero saccarosio
Prima:	2490	0	2490	2490	0	2490
1 giorno	2310	1460	850	2260	960	1200
3 giorni	1360	1148	212	1380	1110	270
5 »	984	900	84	1170	910	260
7 »	775	700	45	450	380	70

e poi diminuisce consentaneamente dentro e fuori la cellula, se il liquido ambiente è privo di colloidi (1). Invece in presenza di questi, essa raggiunge egualmente il massimo al principio della fermentazione nell' interno della cellula, ma di fuori solamente più tardi. In seguito diminuisce ancora come in A. La mancanza di coincidenza fra le variazioni dell' invertina esterna ed interna mostra, che la secrezione di invertasi non è semplicemente una funzione della superficie secernente. Lo zucchero viene assorbito più presto in assenza del colloide; l' assorbimento maggiore negli ultimi giorni nelle culture B è in relazione con il maggior numero di cellule formatesi. Il fatto che il saccarosio scompare più presto di quel che non aumenti lo zucchero invertito e la lentezza con cui questo poi sparisce, provano che il saccarosio viene, specialmente nei primi giorni, assorbito come tale (2).

Nei *Mucor* (*stolonifer* e *Mucedo*) l' invertina interna raggiunge un massimo verso il 6° giorno nelle culture a substrato non colloidale, mentre in

Mucor Mucedo, a 25° C.

Età	norm. Invertasi interna	norm. Invertasi esterna	norm. Messe secca raccolta	norm. + 2.5 % gomma Invertasi interna	norm. + 2.5 % gomma Invertasi esterna	norm. + 2.5 % gomma Messe secca raccolta
4 giorni	10400	162	3.060 g.	6659	0	1.7763 g.
6 »	14240	180	3.4228 »	7249	68	3.1480 »
9 »	9548	215	6.7162 »	7415	255	11.4521 »

(1) Cfr. Fernbach, loc. cit., pagg. 1 e 641; O' Sullivan, loc. cit., pag. 593.

(2) Cfr. i lavori citati di Fernbach e O' Sullivan, nonchè il lavoro precedente.

	Zucchero			Zucchero		
	totale	riduttore	saccarosio	totale	riduttore	saccarosio
Prima:	2620	108	2512	2620	108	2512
4 giorni	2100	115	1985	2066	155	1911
6 »	1600	187	1413	1800	202	1598
9 »	890	755	135	890	330	560

presenza di colloide aumenta lentamente, ma continuamente, con l'età. L'invertasi esterna in ambedue i casi aumenta continuamente, sebbene sia sempre in quantità esigua; anzi in substrato colloidale non c'è nei primi giorni secrezione. Lo zucchero viene assorbito a preferenza come saccarosio. La benefica influenza del colloide su lo sviluppo si manifesta tardi, nei *Mucor* come nei Lieviti, ed anzi nei primi giorni l'accrescimento è minore in substrato colloidale [1].

Portamento di altri funghi. — Il micelio unicellulare di *Phycomyces nitens* si comporta come quello di *Mucor*, anzi nel primo la natura colloidale del substrato ostacola l'attività inversiva estracellulare e favorisce lo sviluppo assai più che nel *Mucor*; quest'ultimo fatto è probabilmente in relazione col bisogno, che ha il *Phycomyces*, di un substrato abbastanza consistente per erigere i suoi giganteschi sporangiofori.

Micelii pluricellulari, come quelli di *Penicillium glaucum* e *Botrytis cinerea*, si scostano in alcuni punti da quelli delle Mucorinee, perchè è vero che il colloide frena leggermente l'attività inversiva esterna, ma ostacola anche lo sviluppo e fa aumentare notevolmente la produzione intracellulare d'invertasi. Probabilmente lo studio di altri organismi porterebbe a resultati anche più svariati, ma la diminuzione dell'inversione estracellulare in presenza di colloidi è un fatto generale.

Influenza dei colloidi su l'attività dell'invertasi. — Stabiliti i fatti, tentiamo di addentrarci nell'*essenza* del fenomeno. Influenzano i colloidi solamente la secrezione, o anche l'attività dell'invertasi, o piuttosto solamente questa? La domanda è un po' malsicura, perchè la sostanza « enzima » nessuno l'ha mai vista; noi conosciamo dell'enzima solamente la sua attività. Siccome però in generale l'attività degli enzimi non varia proporzionalmente alla loro concentrazione, ma dipende da un gran numero di fattori, quasi tutti di natura fisica, così è lecito obbiettare, che le variazioni nell'attività inversiva estracellulare non debbono sempre essere consentanee con le variazioni nella secrezione d'invertasi.

Ciò mi ha condotto a studiare l'azione dei quattro colloidi sperimentati su l'attività dell'invertasi.

[1] Cfr. *Meccanica dell'accrescimento dei filamenti miceliari* ecc., Ann. di Botanica, II, pag. 195 (1905).

Levi [1] ha trovato, che la silice (1.5 — 2 %) non ha influenza su l'inversione del saccarosio con HCl diluito, nè diminuisce la conducibilità elettrolitica nè la pressione osmotica di soluzioni, ciò che non fanno neppure la gelatina al 0.6 % e l'agar a l'1 %. In ciò egli si trova d'accordo con precedenti autori, ma recentemente [2] numerose osservazioni scuotono questo punto, mostrando come i colloidi, tanto più quanto maggiore è la viscosità, diminuiscono la velocità di diffusione delle sostanze disciolte, quindi anche la velocità di reazione enzimatica, perchè, ammesso che le soluzioni enzimatiche sieno sistemi eterogenei, ad esse è applicabile la teoria di Nernst [3], secondo cui la velocità di reazione nei sistemi eterogenei dipende puramente da la velocità di diffusione attraverso le superficie limitanti le fasi. Infatti secondo Brunner se è diminuita la velocità di diffusione per la presenza di gomma dragante, la velocità di soluzione di un corpo solido in acqua o in acidi è pure diminuita [4]. Del resto Senter sostiene, che anche indipendentemente da la teoria di Nernst, che egli non ritiene applicabile agli enzimi, l'attività di questi diminuisce proporzionalmente a l'aumento della viscosità [5].

Egualmente è noto, che il peptone frena l'attività presamica della chimosina, e la diminuzione di attività della proteasi di lievito per l'aggiunta di albumine diverse è pure ben nota. Osservazioni del genere mancano però per l'invertasi.

Le mie misure hanno portato al resultato, che la *gelatina*, anche al 2.5 %, cioè quasi gelatinosa, non ha alcuna influenza sull'attività dell'invertasi dei detti *Mucor*, mentre anzi accelera l'azione dell'invertasi di Lievito; a maggior concentrazione però, cioè se anche il miscuglio d'inversione diventa gelatinoso, essa frena assai l'enzima. Quest'azione deprimente della gelatina dipende essenzialmente da la sua viscosità [6], ma non comincia ad essere sensibile che oltre i 2 — 2.5 % di gelatina.

Nelle mie esperienze precedenti (loc. cit., pagg. 135-139) adoperavo la gelatina al 2.5 %, ma « essa venne tenuta lungo tempo (10 — 12^h) in bagnomaria a 100° per saponificare la gelatina ed impedirne la successiva gelatinazione » (pag. 136). Siccome poi nel miscuglio d'inversione la concentrazione della gelatina era ridotta a metà, si comprende come non ne osservassi alcun effetto su l'invertasi del lievito. In tali condizioni, si dovrebbe anzi

(1) Gazzetta chimica italiana, Vol. XXX (II), pagg. 64-70 (1900). Qui la letteratura precedente. A l'autore è sfuggito il lavoro di N. Pringsheim, Jahrb. f. wiss. Botan., Bd. XXVIII, pag. 1 (1895).

(2) Meyer K., Beitr. z. chem. Physiol. u. Pathol., Bd. VII. pagg. 393-410 (1905); Nell P., Annalen d. Physik, (4), Bd. XVIII, pagg. 323-347 (1905).

(3) Zeitschr. f. physik. Chem., Bd. XLVII, pagg. 52-55 (1904).

(4) Zeitschr. f. physik. Chem., Bd. XLVII, pag. 56 (1904).

(5) Journal of physical Chemistry, Vol. IX, pagg. 311-319 (1905).

(6) Misurata con viscosimetro Ostwald a 25°. Viscosità dell'acqua pura = 108 (secondi).

notare una maggiore attività inversiva in presenza di gelatina, e se questo non è il caso, vuol dire che la *secrezione* d'invertasi fu realmente minore. Lo stesso vale per i *Mucor*, nei quali la gelatina fluida non ha influenza alcuna su l'invertasi, mentre si ha una minore secrezione di enzima anche in substrati che contengono appena 2 — 2.5 % di gelatina.

Per la *silice*, abbiamo visto di già, che essa accelera assai l'azione dell'invertasi, così che il trovarsi eguale o minore attività invertasica estracellulare in presenza di silice non può essere ascritto ad altro, se non ad una minor secrezione d'enzima.

La gomma arabica frena considerevolmente l'azione dell'invertasi, e ancor più il *peptone*. Esempio:

	Viscosità	Inversione a 56°
5 cmc. liquido invertasico + 5 cmc. acqua + 10 cmc. saccarosio al 40 %	125.8	200
5 cmc. liquido invertasico + 5 cmc. gomma al 5 % + 10 cmc. saccarosio al 40 %	243.2	125.3
5 cmc. liquido invertasico + 5 cmc. peptone al 5 % + 10 cmc. saccarosio al 40 %	180.8	83.3

Si potrebbe quindi credere, che queste sostanze diminuiscano solo l'azione e non la secrezione dell'enzima, ma non è così. Anzitutto in presenza di gomma l'attività estracellulare diminuisce assai di più che in presenza di peptone, mentre questo frena l'invertasi più di quella. Inoltre, con l'età aumenta in tutte le condizioni l'inversione estracellulare, mentre la viscosità nelle soluzioni con gomma non diminuisce e in quelle con gelatina o peptone si fa minore. Poi il lievito che è stato in gomma cede a le acque di lavaggio, prive di gomma, meno invertina, ciò che prova direttamente che ne esce meno.

L'unico colloide, per cui si potrebbe rimanere in dubbio, è il peptone, ma anche per questo la considerazione particolareggiata delle singole esperienze, che qui non posso riportare, porta a concludere, che esso frena anche la secrezione.

Esiste inoltre un metodo, per provare se l'invertina è presente in minor quantità od è solamente frenata nella sua azione, ed è la *diluizione successiva* del liquido invertasico, lasciando invariati l'acidità e la concentrazione del saccarosio da invertire. A questo modo si arriva a una diluizione, a cui il colloide non ha più effetto, per cui l'invertina può sviluppare liberamente la sua attività. Si moltiplica allora questa attività assoluta, misurata, per il fattore di diluizione e si trova l'attività invertasica che il liquido iniziale possederebbe, se non fosse presente il colloide. L'esperienza ha confermato la giustezza della previsione, e con questo metodo ho potuto stabilire, che in presenza di peptone non solo c'è meno attività invertasica, ma anche meno invertasi.

Influenza della viscosità. — Per la teoria è importante stabilire, se il colloide agisce puramente in funzione della sua viscosità. Ho appunto misurato sempre le variazioni di viscosità dei liquidi culturali, ma, sebbene con la diminuzione di viscosità (fluidificazione) della gelatina, del peptone ed anche della silice durante il progredire della cultura, aumenti la secrezione e l'attività estracellulare dell'enzima, i quattro colloidi in *soluzioni isoviscose* non fanno diminuire egualmente le due grandezze, ma bensì rispetto a la secrezione l'azione deprimente diminuisce, anche in soluzioni isoviscose, nell'ordine seguente: gomma > peptone > gelatina > silice, mentre rispetto a l'azione dell'enzima diminuisce così: peptone > gomma > gelatina. La silice anzi accelera l'azione dell'invertasi. Come si vede, la viscosità non è il fattore principale in queste azioni dei colloidi su l'invertasi.

Fisiologia. — *Sul meccanismo respiratorio dei pesci ossei* (1). Nota del dott. Taco Kuiper, presentata dal Socio L. Luciani.

Nell'intraprendere uno studio sulla respirazione dei pesci ossei, urtai fin dal principio contro una difficoltà inaspettata: la poca sicurezza delle attuali cognizioni sullo stesso meccanismo respiratorio di questi animali. Epperò s'impose innanzi tutto come ricerca preliminare, di stabilire e interpretare bene i particolari di questo meccanismo. I risultati di questa ricerca sono contenuti nella presente Nota, la quale serve come introduzione e punto di partenza indispensabile al lavoro completo che uscirà tra breve.

Parte storica. — Darò qui una breve analisi delle descrizioni del meccanismo respiratorio dei pesci ossei, fatte dai diversi autori che si sono occupati dall'argomento (2).

Duverney (1701) distinse due momenti principali nell'insieme dei movimenti respiratorî. In un primo momento tutte le parti dell'apparecchio, la bocca, il faringe, l'arcata palatina, gli opercoli, le membrane e gli archi branchiali si allargano e si dilatano: l'acqua entra per la bocca e ciò costituisce l'inspirazione. In un secondo momento tutte le parti enumerate ora, si avvicinano e si contraggono; l'acqua premuta da ogni dove, esce per le fessure branchiali: l'espirazione.

Una descrizione ben diversa dalla precedente fu fatta, un secolo dopo, da Duméril (1809) secondo il quale in un primo tempo, la bocca si apre ed il laringe si dilata mentre le fessure branchiali sono del tutto chiuse; in un secondo tempo la bocca si chiude ed il faringe si restringe mentre gli opercoli si distaccano, sicchè l'acqua esce dopo essere stata « filtrata » attraverso le lamine branchiali. Duvernoy (1839) amplificò ancora la descrizione di Duméril. « L'acqua che va alle branchie penetra prima nella cavità orale, « la cui apertura si apre a questo scopo, mentre la sua capacità aumenta. L'acqua che

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Roma.

(2) Per l'analisi storica completa e per la bibliografia si vegga: G. Van Rynberk, *Ricerche sulla respirazione dei pesci.* Questi Rendiconti, vol. XIV, ff. 9, 10, 12, 2° sem. 1905.

« vi si precipita trova, nel momento che la bocca si chiude in avanti ed il faringe « indietro, e mentre le pareti mobili della cavità orale si contraggono, cinque uscite per « ogni lato: le aperture che conducono nella cavità branchiale comune. In questo secondo « istante dunque, l'acqua inghiottita vi penetra, cacciando avanti a sè l'acqua che vi « era penetrata prima, la quale esce immediatamente dall'apertura esterna che l'animale « può a sua volontà aprire o chiudere mediante l'opercolo osseo o membranaceo... « Vi sono dunque due movimenti: quello dell'introduzione dell'acqua nella cavità buc- « cale, per la dilatazione di questa. Poi segue il suo restringimento per cui l'acqua per « una specie di deglutizione passa nella cavità branchiale. Finalmente c'è il terzo atto: « il diaframma branchiale si contrae e l'acqua viene spinta fuori della fessura branchiale ». Questo modo di concepire il meccanismo respiratorio dei pesci ossei come una deglutizione deviata o laterale passò quasi invariato nelle descrizioni degli autori successivi fino a P. Bert.

Questi (1870) cominciò dall'analizzare l'opinione di Duméril e Duvernoy riguardo l'antagonismo che esisterebbe tra i movimenti d'apertura e chiusura della bocca e delle fessure branchiali; tra la dilatazione e la contrazione delle pareti della cavità buccale e branchiale. Per risolvere il problema se questo antagonismo esista realmente, Bert ricorse al metodo grafico. Egli introdusse a quest'uopo dei palloncini di gomma, in comunicazione con dei tamburi di Marey, nella bocca, in una fessura branchiale, e nel faringe. In tal modo trascrisse in diversi esperimenti contemporaneamente i movimenti della bocca e del faringe; del faringe e dell'opercolo; di questo e della bocca. Non gli riuscì mai di trascrivere contemporaneamente i movimenti di tutti e tre questi organi. Le conclusioni di queste esperienze fatte sul barbo (*Cyprinus barbus*) sono le seguenti: innanzitutto, « appare a colpo d'occhio dai tracciati, che tutti i movimenti sono simultanei nella « bocca, nel faringe e nell'apparecchio opercolare [1]... Non è dunque in due tempi che si « effettuano i movimenti delle cavità artificialmente delimitate coi nomi di buccale e bran- « chiale: in un sol tempo tutto si dilata, la bocca s'apre, le branchie si spiegano e si « avanzano, l'opercolo si stacca; l'acqua è chiamata nello stesso istante da tutti i lati. « Poi, ancora simultaneamente la bocca si chiude, il faringe si restringe, l'opercolo s'ap- « plica contro la fessura branchiale; l'acqua è scacciata nello stesso istante da tutte le « parti » [2]. A questa affermazione recisa segue poi, poche righe più in là, la seguente restrizione: « Pur tuttavia la più grande quantità d'acqua entra per la bocca ed esce dalle « fessure branchiali. Ed ecco perchè. Il margine libero dell'opercolo non è formato dallo « scheletro osseo, ma da una membrana fluttuante. Quando l'opercolo si distacca brusca- « mente durante l'inspirazione, questa membrana premuta dalla resistenza dell'acqua « esterna, funziona da valvola, sicchè l'acqua stessa non può penetrare nella cavità bran- « chiale. Il giuoco di questa membrana è ancora favorito da un piccolo muscolo margi- « nale scoperto da Remak ».

Queste conclusioni si basano e sono illustrate da quattro figure di tracciati, due delle quali io qui riproduco per l'interesse che hanno per la questione che mi occupa. Nella prima sono registrati contemporaneamente i movimenti della bocca e dell'opercolo, nella seconda quelli dell'opercolo e del faringe (v. figg. 1 e 2). Nel primo di questi tracciati Bert riunisce con una ordinata il punto piu basso della curva dell'opercolo, con il punto più basso di quello della bocca; questi punti rappresentano dunque per lui due momenti sincronici di queste curve. Ora siccome il primo di questi punti equivale all'istante di massimo distacco dell'opercolo, ed il secondo all'istante della massima apertura della bocca, questa, secondo Bert, corrisponde al momento di massima apertura della fessura branchiale. Nello stesso modo risulta da questi tracciati che l'aprirsi ed il chiu-

[1] Pag. 230 dell'opera citata.

[2] Ibidem, passim.

dersi della bocca e della fessura branchiale si effettuano contemporaneamente. Dagli stessi tracciati si rileva inoltre che l'opercolo si chiude lentamente e con un intervallo; rimane chiuso per un istante e poi si riapre rapidamente. La bocca invece si chiude rapidamente, rimane chiusa un istante e si riapre più lentamente con velocità non costante. Invece nell'altro tracciato (fig. 2) e specialmente nella sua prima metà, la chiusura del-

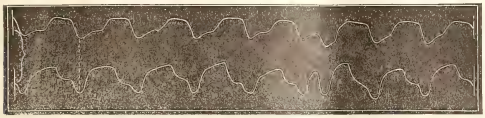


Fig. 1. — *Cyprinus barbus*. Tracciato superiore = movimenti dell'opercolo, tracciato inferiore = della bocca. (Riprodotta da P. Bert).

l'opercolo si effettua rapidamente e l'apertura lentamente con un intervallo. Questi dati non collimano e non è ben chiaro su che cosa Bert si basa quando asserisce anche per i pesci il fatto « . . . pressochè costante in tutti i vertebrati, che cioè l'ispirazione è più rapida che l'espirazione ». In ogni modo la sua conclusione netta e precisa citata sopra, che i movimenti d'apertura e chiusura della bocca e dell'opercolo sono rispettivamente simultanei, è in opposizione alla tesi di Duméril e Duvernoy, mentre si accorda pienamente colla descrizione di Duverney, che egli sembra non aver conosciuto.

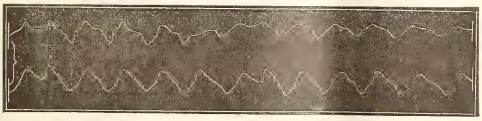


Fig. 2. — *Cyprinus barbus*. Tracciato superiore = movimenti dell'opercolo, tracciato inferiore = della faringe. (Riprodotta da P. Bert).

Finalmente Van Rynberk [1] (1905) osserva che « la chiusura degli opercoli è sempre « un po' in ritardo sulla chiusura della bocca. E ciò s'intende, chè se la chiusura fosse « assolutamente sincrona, l'acqua pressata nella cavità orale e branchiale non troverebbe « pervia alcuna via d'uscita ». Questa osservazione sembra razionale, ed io vi aggiungo che il modo nel quale Bert descrive il meccanismo respiratorio è equivoco ed illogico. Infatti egli dice, come vedemmo, che bocca ed opercolo si divaricano e si chiudono simultaneamente, ma siccome durante la divaricazione dell'opercolo la fessura branchiale è chiusa dalla membrana fluttuante, insorge la domanda, quando dunque la fessura branchiale si trova aperta per lasciar uscir l'acqua, se, come Bert sostiene pure, l'opercolo si riaccosta subito dopo divaricato?

In conclusione dai diversi autori sono state sostenute tesi diversissime, le quali però si possono riunire in tre gruppi. 1. La bocca e l'opercolo si divaricano e si chiudono simultaneamente (Duvernoy, Bert). 2. La bocca si apre quando l'opercolo si chiude ed alternativamente (Duméril, Duvernoy). 3. La bocca e l'opercolo si divaricano e si chiudono simultaneamente ma la chiusura dell'opercolo è un po' in ritardo su quella della bocca (Van Ryn-

[1] Loco citato.

berk). Fin qui quel che riguarda i rapporti reciproci dei movimenti buccali ed opercolari. Poi vi è diversità di opinione sul significato dell'apertura buccale e della fessura branchiale rispetto al movimento dell'acqua. Duverney dice che la bocca serve per l'inspirazione e la fessura branchiale per l'espirazione. Duméril e Duvernoy sebbene discordanti con lui sui rapporti nel tempo dei movimenti buccali ed opercolari, s'accordano con lui sul significato della apertura buccale e della fessura opercolare. Bert sostiene che nell'aprirsi delle due aperture, l'acqua entri da ambedue, e che esca da ambedue quando si chiudono, sicchè la bocca e la fessura branchiale servirebbero alternativamente per l'inspirazione e per l'espirazione, però colla restrizione che quando la fessura branchiale si apre non è pervia, perchè otturata dalla membrana fluttuante, il che costituisce una contradizione insolubile. Van Rynberk poi chiama il divaricarsi dell'opercolo « fase inspiratoria » ed il chiudersi « fase espiratoria ».

Ricerche originali. — Ho eseguite le mie ricerche personali su tre specie di pesci ossei: *Barbus fluviatilis* (*seu plebeius*), *Telestes muticellus* e *Cyprinus auratus*, seguendo quattro metodi: l'osservazione diretta pura e semplice dei movimenti respiratorî, l'osservazione dello spostamento dell'acqua durante i movimenti respiratorî, col sussidio d'una sospensione d'inchiostro di China, la registrazione dei movimenti respiratorî col metodo grafico e finalmente la fotografia istantanea.

A. L'osservazione diretta, pura e semplice dei movimenti respiratorî di un piccolo pesce d'acquario, non riesce a dar conto di molti particolari per la rapidità e complicazione dei movimenti eseguiti dalle diverse parti ed organi dell'apparecchio respiratorio. Pur tuttavia è possibile stabilire alcuni rapporti, abbastanza sicuramente. Per esempio: l'aprirsi della bocca è immediatamente seguito dall'abbassarsi del pavimento orale, e dalla divaricazione degli opercoli, senza che però la membrana marginale libera di questi, si stacchi dal corpo. Il chiudersi della bocca è seguito immediatamente dall'innalzarsi del pavimento orale e dal distaccarsi dal corpo della membrana libera degli opercoli, per cui la fessura branchiale viene ad essere aperta. Appena la bocca si è chiusa del tutto, gli opercoli si chiudono pur essi rapidissimamente, per cui anche le fessure branchiali vengono ad essere chiuse. Riassumendo si possono dunque osservare due serie successive di movimenti quasi contemporanei. Nella prima si ha l'aprirsi della bocca, l'abbassarsi del pavimento orale, ed il divaricarsi degli opercoli, tutti movimenti tendenti ad aumentare la capacità della cavità oro-branchiale. Durante questi movimenti di dilatazione l'unica via di comunicazione della cavità respiratoria coll'ambiente che sia pervia è la bocca, la quale è in via d'aprirsi. L'altra serie di movimenti quasi contemporanei è il chiudersi della bocca, l'innalzarsi del pavimento orale ed il distaccarsi della membrana libera degli opercoli. I due primi di questi movimenti tendono a restringere la

cavità orale ed a chiuderne la comunicazione diretta coll'ambiente. L'altro movimento costituisce il rendersi pervie le fessure branchiali. L'osservazione e l'analisi dei movimenti respiratorî dei pesci ossei esaminati, tenderebbero dunque a far supporre che la prima serie dei movimenti descritti costituisca un meccanismo inspiratorio mediante il quale l'acqua venga aspirata per la bocca. La seconda serie dei movimenti sembrerebbe espiratoria; però per quali vie l'acqua inspirata venga espulsa, non può venir assodato in questo modo.

B. Per studiare il movimento dell'acqua durante i movimenti respiratorî si fa scorrere mediante una pipetta di vetro una sospensione d'inchiostro di China, alternativamente davanti alla bocca ed alle fessure branchiali d'un pesce in riposo. In questo esperimento si vede con tutta evidenza che quando si tiene la pipetta davanti alla bocca, ad ogni apertura di questa, un'ondata d'acqua colorata vi penetra, mentre durante la chiusura nulla rigurgita. Inoltre si vede che l'acqua colorata entrata per la bocca riesce dalle fessure branchiali. Quando si tiene la pipetta davanti alle fessure branchiali non si vede penetrare mai acqua colorata in esse, ma ogni volta che la membrana libera dell'opercolo si stacca dal corpo ne esce un'ondata di liquido che spazza via la nubecola di colore che si era fatta scorrere dalla pipetta. Quando, prima di quest'ultimo esperimento, si recide colle forbici la membrana marginale libera dell'opercolo di un lato, si vede che ad ogni divaricazione dell'opercolo, un po' d'acqua colorata penetra per la fessura, nella cavità branchiale, per venirne riespulsa subito dopo. L'acqua colorata entrata in tal modo nella cavità branchiale, non si vede mai riuscire dalla bocca.

Queste esperienze completano in modo soddisfacente le osservazioni dirette. L'acqua penetra esclusivamente per l'apertura orale, e riesce esclusivamente dalla fessura branchiale quando questa è resa pervia dal distacco della membrana opercolare libera. L'apertura orale serve dunque esclusivamente per l'inspirazione, la fessura branchiale per l'espirazione. L'aprirsi della bocca, l'abbassarsi del pavimento orale ed il divaricarsi degli opercoli sono dunque movimenti inspiratorî. Il chiudersi della bocca, l'innalzarsi del pavimento orale ed il distaccarsi della membrana marginale degli opercoli sono movimenti espiratorî. Il richiudersi degli opercoli sembrerebbe costituire l'ultimo atto espiratorio.

C. Per determinare con più precisione il succedersi nel tempo d'alcuni dei movimenti sopra descritti, ricorsi finalmente al metodo grafico.

Tracciati di movimenti respiratorî di pesci ossei furono, come rilevai sopra, già nel 1870 pubblicati da Bert. Dopo di lui soltanto recentemente Van Rynberk ha riprodotti alcuni tracciati dei movimenti opercolari di una specie marina (*Pagellus mormyrus*). Egli trasmetteva i movimenti mediante un filo attaccato coll'uno dei capi ad un uncino infisso nell'opercolo, e coll'altro da una semplice leva scrivente munita di ruota. Ho seguìto anch'io questo sistema, che mi sembra più esatto di quello di Bert; la presenza infatti d'uno o due palloncini di gomma nelle aperture respiratorie non può non aver alterata più o meno la regolarità e la caratteristicità dei movimenti. Anzichè raccogliere però il solo tracciato dei

movimenti opercolari ho trascritto mediante un doppio miografo, contemporaneamente anche i movimenti della bocca. In questi esperimenti io procedeva come segue. I pesci che dovevano servire per l'esperienza venivano ritirati dalla vasca del giardino dell'Istituto e pesati. Poi si determinava il loro volume. Indi venivano immobilizzati nell'apparecchio indicato da Von Uexküll un po' modificato [1], posti orizzontalmente in una bacinella smaltata contenente due litri d'acqua della stessa condottura che si immette nella vasca del giardino, e tenuti alla stessa temperatura dell'acqua di questa. Siccome poi l'acqua della bacinella si rinnovava di frequente, le condizioni degli esperimenti si avvicinavano quanto era possibile alle normali. Per la trasmissione dei movimenti della bocca si perforava con

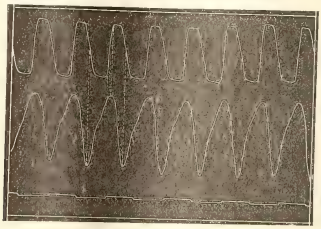


Fig. 3 — *Barbus fluviatilis*, peso 105 g., volume 100 cmc. Temperatura dell'acqua 14° C. Tracciato superiore, tratti discendenti = divaricazione dell'opercolo. Tracciato inferiore, tratti discendenti = apertura della bocca.

un ago il pavimento di questa verso il margine labiale e vi si annodava un filo di seta, il quale si innalzava direttamente e veniva fissato all'una delle leve scriventi d'un doppio miografo. Per l'opercolo si procedeva in modo simile; qualche volta si perforava la placca ossea o la membrana libera e vi si annodava il filo, oppure questo si attaccava ad una pinzettina di alluminio di Kronecker la quale si fissava all'estremo lembo della membrana marginale dell'opercolo. Comunque fissato all'organo, questo filo procedeva sempre orizzontale per un certo tratto, poi si piegava ad angolo retto intorno ad una bacchettina sottilissima di vetro e si innalzava perpendicolare all'altra leva scrivente del miografo. I punti d'attacco dei fili alle leve non sono stati sempre gli stessi; ora erano un po' più distanti, ora un po' più vicini all'asse girevole, la moltiplicazione dei movimenti non è stata quindi costante nelle diverse esperienze. Il filo che partiva dalla mascella inferiore è stato nei diversi esperimenti attaccato ora all'uno, ora all'altro braccio di leva del miografo, per cui in alcuni tracciati la direzione del movimento è inversa rispetto a quella in altri. In tutte le esperienze però si studiò sempre di ottenere curve per quanto era possibile sincrone, determinando ripetutamente e controllando con un filo a piombo la posizione delle due leve tenute orizzontali e parallele. Il tempo segnava in tutti gli esperimenti 0,5″. La rapidità di rotazione del cilindro è stata varia nelle diverse esperienze.

Passiamo ora all'analisi dei tracciati, ed innanzi tutto osserviamo quelli della bocca e dell'opercolo separatamente. Nei tracciati dei movimenti della bocca, il passaggio del tratto di curva che rappresenta l'apertura, in quello che rappresenta la chiusura è sempre brusco. Il movimento di chiusura della bocca

[1] Questo apparecchio modificato dal sig. L. Pigorini, consta d'una placca rettangolare di piombo, nella quale, a regolare distanza, sono ritagliate delle strisce che si piegano in modo da abbracciare e fissare il pesce, senza premerlo troppo e senza produrre lesioni di sorta.

rallenta nel suo ultimo tratto, oppure ha luogo una pausa più o meno lunga. Il passaggio del tratto di curva che rappresenta la chiusura, in quello che rappresenta l'apertura della bocca non è mai brusco. Nei tracciati del *Telestes* e del *Barbus* l'apertura si effettua più rapidamente della chiusura; nel *Cyprinus* invece la bocca viene più rapidamente chiusa che aperta, ma essa rimane chiusa più a lungo che nelle altre specie, sicchè in ultima analisi anche nel ciprino l'aprirsi della bocca si effettua più rapidamente che l'intera fase di chiusura. Nei tracciati dell'opercolo, colpisce innanzi tutto che la curva che rappresenta il movimento di chiusura dell'opercolo è ripidissima, il che significa che il movimento stesso si eseguisce assai rapidamente. La curva che rappresenta il movimento di divaricazione dell'oper-

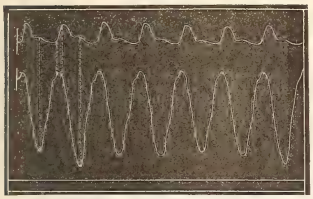


Fig. 4. — *Telestes muticellus* peso 110 g. vol. 100 cmc. Temp. 10°. Tracciato superiore, tratti ascendenti chiusura; tratti discendenti = divaricazione dell'opercolo. Tracciato inferiore, tratti ascendenti = chiusura, tratti discendenti = apertura della bocca.

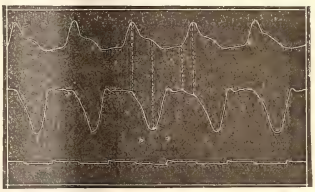


Fig. 5. — *Cyprinus Auratus*, peso 60 g. vol. 55 cmc. temp. 14°. Tracciato superiore, tratti discendenti = divaricazione dell'opercolo. Tracciato inferiore, tratti ascendenti = chiusura, tratti discendenti = apertura della bocca.

colo consta nel tracciato della fig. 3 in un tratto discendente ininterrotto, seguìto da un tratto orizzontale, la pausa dell'opercolo. Nell'esperimento nel quale è stato raccolto questo tracciato, il filo trasmettitore del movimento era fissato con un nodo dietro la placca ossea dell'opercolo e trasmetteva quindi soltanto i movimenti della parte rigida dell'opercolo. Nel tracciato delle figg. 4, 5, 6, 7 invece la curva che rappresenta il movimento di divaricazione dell'opercolo presenta pure una pausa (tratto orizzontale), ma il tratto discendente consta di due parti di diversa inclinazione divisi da un breve intervallo. Negli esperimenti nei quali furono raccolti questi tracciati, il filo trasmettitore era attaccato alla membrana mobile dell'opercolo e trasmetteva quindi anche i movimenti della membrana fluttuante. Dai tracciati si può dunque argomentare che l'opercolo chiusosi rapidamente, resta chiuso un istante, poi si divarica più lentamente e resta divaricato un momento. Ma da che cosa è data la differenza della curva discendente negli esperimenti, ove si sono registrati i soli movimenti della parte rigida dell'opercolo, ed in quelli ove si sono registrati anche i movimenti della membrana? Dall'osservazione diretta noi abbiamo imparato che mentre l'opercolo rigido divarica in un primo tempo,

la membrana libera rimane addossata alla fessura branchiale, per distaccarsi anch'essa in un secondo tempo nel quale soltanto la fessura branchiale è pervia. Rappresentiamo questi dati d'osservazione schematicamente nella fig. 8. In 1 si ha l'opercolo chiuso, in 2 l'opercolo rigido è divaricato ma la mem-

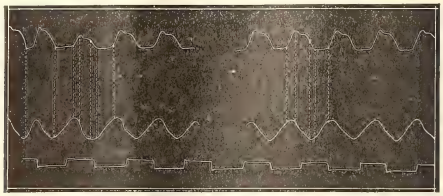


Fig. 6. — *Barbus fluviatilis* peso 105 g vol. 100 cmc. Temp. 13°. — Tracciato superiore, tratti ascendenti = chiusura; tratti discendenti = divaricazione dell'opercolo. Tracciato inferiore, tratti ascendenti = chiusura; tratti discendenti = apertura della bocca.

brana è tutt'ora addossata alla fessura branchiale, in 3 finalmente si distacca anche la membrana e si rende pervia la fessura branchiale. È chiaro ora in che cosa consista la differenza notata nei tracciati. In quello ove non si re-

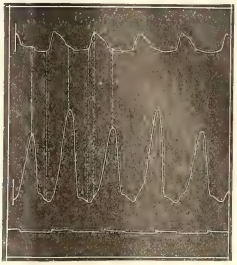


Fig. 7. — *Telestes muticellus*, peso 110 g. vol. 100 cmc. temp. 12.5°. — Tracciato superiore, tratti ascendenti = chiusura; tratti discendenti = divaricazione dell'opercolo. Tracciato inferiore, tratti ascendenti = apertura; tratti discendenti = chiusura della bocca.

gistravano che i movimenti dell'opercolo rigido si ha nell'apertura una curva discendente uniforme ed una pausa. Nel tracciato ove si registravano i movimenti della membrana marginale, il primo tratto della curva discendente rappresenta il divaricarsi dell'opercolo rigido; il secondo tratto il distaccarsi della membrana stessa. In riguardo alla condizione della fessura branchiale, si conferma quindi che essa rimane chiusa nel primo tratto della curva discendente, mentre è pervia nel secondo tratto. Vediamo ora che cosa insegna il confronto dei tracciati dei movimenti buccali ed opercolari. Riuniamo perciò mediante ordinate (presa per ascissa la linea tracciata dal segnale del

tempo) i punti caratteristici delle due grafiche. Ne risulta: 1° Il rapidissimo chiudersi dell'opercolo coincide col tempuscolo nel quale la bocca comincia ad aprirsi. 2. L'istante nel quale la bocca comincia per chiudersi coincide col punto ove la curva discendente dell'opercolo cambia direzione, nei tracciati delle figg. 4, 5, 6, 7; coincide col punto medio della curva discendente nel tracciato della fig. 3. Cioè nell'intera fase dell'aprirsi della bocca, in un primo tempuscolo che introduce l'apertura della bocca, si chiude rapidissimamente l'opercolo, poi si riapre. Nel chiudersi della bocca l'opercolo rigido si apre poco più, la membrana marginale si distacca e la fessura branchiale si rende pervia. La divaricazione dell'opercolo rigido prima che si renda pervia la fessura branchiale costituisce dunque un movimento attivo di aspirazione dell'acqua nella cavità oro-branchiale attraverso la bocca. Questa parte del movimento opercolare è dunque nettamente inspiratoria. Ma la seconda parte del divaricarsi dell'opercolo rigido, accompagnata dal distaccarsi e sollevarsi della membrana marginale (che sembra un movimento piuttosto passivo prodotto dalla forza propulsiva dell'acqua cacciata dalla cavità oro-branchiale per il chiudersi della bocca, il sollevarsi del pavimento boccale ecc.) è dunque espiratoria. Espiratoria parimenti è la rapida chiusura dell'opercolo, per cui l'ultima porzione d'acqua viene cacciata attraverso la fessura branchiale. Questo movimento coincide, come si è visto, col tempuscolo che introduce l'aprirsi della bocca. Questo istante rappresenta dunque la chiusura completa della cavità oro-branchiale e l'ultima fase di un'intera rivoluzione respiratoria, la quale fase è però brevissima e del tutto virtuale perchè già in essa la bocca sta aprendosi, col quale movimento si inizia una nuova inspirazione.

Fig. 8.

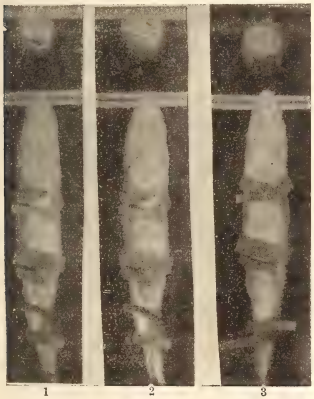


Fig. 9.

D. In ultimo ho cercato di illustrare quanto le fin qui riferite ricerche mi avevano dato conoscere, mediante la fotografia istantanea. A quest'uopo veniva fissato nell'apparecchio di Uexküll un barbo, col ventre in alto, e disposto sott'acqua in una bacinella di vetro. Dinnanzi gli si poneva uno

specchietto inclinato di circa 45° in modo che dall'alto si vedeva direttamente la parte ventrale della fessura branchiale, col suo opercolo e relativa membrana marginale, e riflessa nello specchio l'imagine della rima buccale. Riproduco quì (fig. 9) tre istantanee le quali rispettivamente mostrano: in 1 la bocca aperta, gli opercoli rigidi semiaperti le fessure branchiali ricoperte dalle membrane marginali; in 2 la bocca chiusa, gli opercoli del tutto divaricati, le fessure branchiali aperte e le membrane marginali distaccate; in 3 la bocca chiusa, gli opercoli del tutto accostati al corpo, le fessure branchiali chiuse.

Da quanto precede appare che non si può parlare nè di simultaneità e neppure di alternanza del complesso dei movimenti. Però nei particolari ciascuno degli autori sopracitati ha visto qualche cosa di giusto.

Conclusioni.

1. L'inspirazione è data dall'aprirsi della bocca, dall'abbassarsi del pavimento buccale, e da una moderata divaricazione degli opercoli. Durante questa fase le fessure branchiali sono chiuse e l'acqua entra esclusivamente per la bocca.

2. L'espirazione è data dal chiudersi della bocca, dall'innalzarsi del pavimento buccale, da un ulteriore divaricarsi degli opercoli branchiali e dal distacco della membrana marginale degli opercoli. Durante questa fase le fessure branchiali si aprono e restano aperte e l'acqua esce esclusivamente da esse.

3. Alla fine dell'espirazione avviene il rapido accostarsi al corpo degli opercoli. Questo movimento forma il termine dell'intera rivoluzione respiratoria. Però in questo tempuscolo stesso già la bocca comincia di nuovo a riaprirsi e si inizia quindi una successiva inspirazione.

Anatomia. — *Sulle capsule surrenali e sul simpatico dei Dipnoi. Ricerche in Protopterus annectens.* Nota preliminare di Ercole Giacomini, presentata dal Socio C. Emery.

Sul sistema delle capsule surrenali dei Dipnoi si avevano finora notizie molto incerte e inesatte, così per quanto riguarda l'interrenale (sostanza corticale) come per quello che concerne i corpi soprarenali (sistema feocromo o tessuto cromaffine o sostanza midollare) [1].

[1] Für die Dipnoern liegen sowohl was das Vorkommen, wie den Bau der Stannius'schen Körper anlangt, nur ungenaue Angaben vor. Das phäochrome System ist völlig unbekannt (H. Poll, *Die vergleich. Entwickelungsgeschichte der Nebennierensysteme der Wirbeltiere.* In: Handbuch der vergleich. und experim. Entwickelungslehre der Wirbeltiere, herausg. von O. Hertwig, Jena, 1905).

Relativamente poi al simpatico dei Dipnoi nessuno fino ad oggi era giunto a dimostrarne l'esistenza, e a tale proposito il Wiedersheim nella sesta edizione del suo trattato di Anatomia comparata, pubblicato a principio di quest'anno, doveva ancora scrivere: « Bei Dipnoërn ist bis dato noch keine Spur eines Sympathicus nachgewiesen ».

Oggetto delle mie ricerche furono quattro giovani esemplari di *Protopterus annectens,* della lunghezza totale di circa 17-18 cm., molto generosamente donatimi dal prof. Wiedersheim, al quale rendo qui con animo gratissimo le mie più vive grazie.

Uno dei detti esemplari venne da me ridotto in numerose sezioni seriali trasverso-verticali dal capo fino all'inizio della coda. Di due altri sezionai, pure trasversalmente in serie, pezzi delle varie regioni del tronco e della coda. E finalmente in uno, quantunque si trattasse di materiale già fissato e conservato in alcool, feci delle dissezioni coll'aiuto del microscopio binoculare.

Passando ora ad esporre brevemente i principali risultati delle mie ricerche, mi trovo costretto a chiarire anzitutto un equivoco.

Il Wiedersheim (1) recentemente credette di poter additare i corpi soprarenali (tessuto cromaffine) di *Protopterus annectens* in un tessuto addossato dorsalmente e in parte medialmente a quei vasi, che egli, nella sua descrizione e nelle annesse figure (2), indica come vene cardinali posteriori.

L'esame accurato delle mie sezioni seriali mi ha dimostrato che gli organi ritenuti dal Wiedersheim quali corpi soprarenali sono i rami polmonari del vago e che i vasi, interpetrati per vene cardinali posteriori, sono invece le arterie polmonari costeggiate appunto da quei rami del vago, dalla loro origine fino al momento in cui rami nervosi e arterie s'incrociano fra di loro (3) per poi decorrere indietro lungo i polmoni. Certamente il Wiedersheim fu tratto in inganno dalla posizione di quegli organi, dall'aspetto particolare che i medesimi offrono nei tagli trasversi ed inoltre dall'essergli mancata l'opportunità di seguirli in una serie completa di sezioni.

Lo studio dei miei preparati mentre da un lato mi dimostrò l'esistenza degli organi soprarenali in *Protopterus annectens*, valse dall'altro lato a persuadermi che in questo Dipnoo manca l'interrenale.

(1) Wiedersheim R., *Ueber das Vorkommen eines Khelkopfes bei Ganoiden und Dipnoërn.* Zool. Jahrbücher, Suppl. VII, Jena 1904 e Vergleichende Anatomie der Wierbeltiere, Sechste Auflage, Jena, 1906.

(2) Figg. 27 e 28 della tav. 5 del citato lavoro e fig. 301 del trattato.

(3) A tale riguardo veggasi la Memoria di W. N. Parker *(On the anatomy and physiology of Protopterus annectens,* in: The Transactions of the R. Irish Acad., vol. XXX, part. III, Dublin, 1892) in cui è descritto il chiasma formato dai rami polmonari del vago e dalle arterie polmonari. In conseguenza di questo incrocio il ramo nervoso e l'arteria d'un lato passano sul polmone del lato opposto.

In ciò si avrebbe un riscontro con quanto ebbi a constatare nei Missinoidi, dove, in *Bdellostoma*, esiste il tessuto cromaffine, rappresentante dei corpi soprarenali, ed è assente l'interrenale (1).

Considerando che in ambedue i casi si ha una straordinaria ricchezza di tessuto linfoide, caratterizzato anche da una struttura del tutto speciale, il quale occupa pure gran parte della parete intestinale, potrebbe supporsi che qui la funzione dell'interrenale sia in qualche modo disimpegnata, almeno parzialmente, da cotesto particolare tessuto linfoadenoide (2).

I corpi soprarenali offrono in *Protopterus* una disposizione assai caratteristica. Essi stanno in rapporto con le arterie intercostali e sono perciò distribuiti a paia segmentalmente. Le arterie intercostali non sono tutte ugualmente sviluppate, chè anzi alcune di esse si presentano regredite ed obliterate, ma anche con questi resti di arterie intercostali si trova connesso il tessuto cromaffine (tessuto feocromo). Per tutta la regione del tronco, all'intorno d'ogni arteria intercostale, in quel tratto del vaso che si estende dalla sua origine dall'aorta fino al punto di sua biforcazione in ramo dorsale e ramo ventrale, si riscontrano cellule cromaffini (cellule feocrome) raggruppate a nidi. Questi elementi, come ben dimostra l'esame di arterie intercostali isolate ed osservate nel loro insieme al microscopio dopo le opportune manipolazioni, sono più specialmente situati lungo il margine craniale e lungo il margine caudale dell'arteria.

Inoltre tessuto cromaffine rinvenni pure nella parete della porzione più craniale della vena cardinale posteriore sinistra sino al suo sbocco (dotto di Cuvier) nell'atrio destro. Similmente trovai cellule feocrome nella parete dell'azygos destra, che rappresenta la porzione craniale della vena cardinale destra (3) e che, unendosi alla succlavia dello stesso lato, si versa anch'essa per mezzo di un dotto venoso nell'atrio destro. Cellule feocrome circondano

(1) Giacomini E., *Contributo alla conoscenza delle capsule surrenali dei Ciclostomi. Sulle capsule surrenali dei Missinoidi.* Rend. delle Sess. della R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1904.

(2) A. Pettit (*Recherches sur les capsules surrénales*, in Journal de l'Anat. et de la Phys., Année 32, Paris, 1896) annunziò di aver trovato le capsule surrenali in *Protopterus annectens*, ma nulla riferì sulla loro struttura ed è certo che i corpi da lui veduti non erano altro che cumuli di tessuto linfoide. Vincent (*On the Morphology and Physiology of the Suprarenal Capsules in Fishes*, in: Anat. Anz. Bd. XIII, 1897) esaminò in *Protopterus* e *Lepidosiren* il tessuto linfoide, descritto dal Parker attorno ai reni e che secondo questi rammenterebbe i corpi adrenali (la sostanza corticale) degli Anfibii, e concluse che nulla avea che fare con le capsule surrenali.

(3) Il rimanente di questa vena, ossia tutta la sua porzione posteriore forma, come ha dimostrato Parker, la vena cava posteriore, la quale si apre nel seno venoso. Però Parker aggiunge: « non esiste traccia di una azygos destra, rappresentante la porzione anteriore della cardinale destra: apparentemente questa scomparirebbe del tutto ». Secondo le mie ricerche invece devesi ammettere che il tratto craniale della vena cardinale posteriore destra permane come azygos destra.

poi la parete di tale dotto sin presso al suo sbocco. È da notarsi che gli elementi feocromi, posti nelle mentovate porzioni delle vene cardinali, guardano il lume vasale, da cui rimangono separati soltanto per mezzo della sottile lamina di endotelio.

La disposizione dei corpi soprarenali in *Protopterus* molto somiglia a quella da me riscontrata nei Petromizonti [1] e d'altra parte, per quanto concerne la presenza di tessuto cromaffine attorno alla porzione craniale delle vene cardinali posteriori, ricorda assai da vicino la disposizione consimile posta in evidenza nei Teleostei [2].

Avuto riguardo ai loro rapporti con le arterie intercostali e col simpatico e alla loro distribuzione segmentale, i corpi soprarenali di *Protopterus* possono anche paragonarsi agli organi omologhi degli Elasmobranchi.

L'accurato studio dei corpi soprarenali mi condusse infine a dimostrare assai chiaramente in *Protopterus* la esistenza del sistema nervoso simpatico, ricercatovi invano dal Parker, il quale a questo riguardo in una nota del suo lavoro scrisse: « I should add that in Protopterus I have not succeeded in finding a sympathetic — not even such rudimentary traces as have been described in Petromyzon by Dohrn. A sympathetic is not known to exist in the other genera of Dipnoi ».

Nel *Protopterus* il simpatico è rappresentato da due tenuissimi tronchi nervosi (tronchi del simpatico) che corrono continui lungo i lati dell'aorta, addossati alla corda dorsale: fu senza dubbio per la loro estrema sottigliezza che essi si sottrassero all'occhio di altri osservatori. Questi tronchicini seguii nelle sezioni seriali cranialmente fino a livello della glottide e caudalmente fino alla radice della coda. Riuscii anche ad isolarli per mezzo della dissezione fatta col sussidio del microscopio binoculare. Non è improbabile che il simpatico si spinga ancora più in avanti nella regione cefalica ponendosi in rapporto con i nervi cranici. Nella regione caudale non mi fu più possibile scorgerlo, forse a causa della sua straordinaria esilità. Lungo ogni tronchicino si trovano sparse singole cellule nervose simpatiche e vi s'incontrano inoltre manifesti gangli nervosi relativamente grandi, rispetto all'esiguo volume del tronchicino nel quale essi s' intercalano. Interessa qui rilevare che i detti gangli stanno in stretto rapporto con le arterie intercostali e con il tessuto cromaffine dal quale queste sono circondate. Lungo il tronco del simpatico stesso viene dato di rintracciare qualche piccolo nido di cellule feocrome.

[1] E. Giacomini, *Contributo alla conoscenza delle capsule surrenali nei Ciclostomi. Sulle capsule surrenali dei Petromizonti.* Monit. Zool. Ital., anno XIII, Firenze, 1902.

[2] E. Giacomini, *Sulla esistenza della sostanza midollare nelle capsule surrenali dei Teleostei*, Monit. Zool. Ital., anno XIII, Firenze, 1902; *Contributo alla conoscenza del sistema delle capsule surrenali dei Teleostei. Sulla sostanza midollare (organi soprarenali o tessuto cromaffine) di Amiurus catus L.*, Rend. delle Sess. della R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1905.

Devo da ultimo ricordare che rinvenni numerose cellule nervose, spesso raggruppate in cospicui ganglietti, nei rami polmari del vago, lungo tutto quel loro tratto che dal punto del loro incrocio, ossia dal chiasma dei detti rami, decorre fin presso all'estremo caudale dei polmoni. Nell'altro tratto che dal chiasma portasi cranialmente fino alla sua origine dal vago, correndo dorsalmente all'arteria polmonare, non appariscono cellule nervose. Ne vidi una sola nel ramo di un lato.

I rami polmonari del vago mostransi assai grossi, e non è improbabile che la estrema sottigliezza dei tronchicini del simpatico stia in correlazione col notevole sviluppo di quei rami.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

G. Zambiasi. *Verifica dei Coristi normali dell' Ufficio centrale italiano per Corista uniforme.* Presentata dal Socio Blaserna.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Struever, relatore, a nome anche del Corrisp. Balbiano, legge una Relazione sulla Memoria del dott. F. Zambonini, intitolata: *Ulteriori ricerche sulle zeoliti,* proponendo l'inserzione del lavoro nei volumi delle Memorie.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna legge la seguente Commemorazione del Socio S. P. Langley.

Samuel Pierpont Langley nacque a Boston (Mass.) nel 1831; fu Direttore dell'Osservatorio di Alleghany, indi Segretario della Smithsonian Institution, Direttore del Museo Nazionale e Direttore dell'Osservatorio astrofisico di Washington. Nella lunga sua vita sviluppò una attività meravigliosa nei campi dell'Astronomia, della Fisica e della Storia naturale.

A lui si deve l'organizzazione dell'Osservatorio astronomico di Alleghany in Pensilvania, dove eseguì bellissimi disegni della superficie solare, che sono ancora oggidì ricordati per la loro finezza e precisione, e si occupò inoltre della misura del tempo. Prese parte alle osservazioni di quasi tutte

le eclissi solari. Egli rimarrà poi sempre celebre per le sue ricerche col bolometro. Prendendo per punto di partenza una disposizione proposta da Svanberg fino dal 1849, ma poi caduta in dimenticanza, il Langley introdusse nella scienza un ammirabile istrumento di ricerca, che prima chiamò col nome di bilancia attinica e poi di bolometro. Il primo apparecchio di questo genere comparve verso il 1881 e fu poi successivamente portato a tale grado di perfezione, che egli potè misurare negli spettri luminosi e calorifici variazioni di temperatura di un diecimilionesimo di grado. Un istrumento di così squisita sensibilità fu da lui impiegato in svariatissime ricerche: ricorderò soltanto il grandioso suo studio sulla distribuzione del calore nello spettro solare e specialmente nell'infrarosso sino a lunghezze d'onda di 5 e più micron, determinando in questa regione parecchie centinaia di linee di Fraunhofer; poscia lo studio dello spettro lunare e degli spettri di emissione di un grande numero di corpi, fra limiti estesi di temperatura e scendendo fino alla temperatura del ghiaccio fondente.

Tutti questi lavori sono d'importanza capitale. Voglio anche ricordare le sue interessanti ricerche sul colore proprio della luce solare, le quali lo condussero a ritenere che esso colore, a causa dell'assorbimento solare e molto più del terrestre, venga fortemente spostato verso il rosso; dimodochè, senza tali assorbimenti, il sole si presenterebbe a noi con una tinta azzurrognola.

Nè meno notevoli sono le sue ricerche sulle condizioni del volo meccanico. Il Langley affrontò il problema dal punto di vista teorico, coi suoi studî sul lavoro interno del vento. Osservò acutamente come gli uccelli sappiano utilizzare nel loro volo le brusche variazioni d'intensità nel vento, la cui esistenza egli dimostrò sperimentalmente. E passò infine alla costruzione del suo *aerodromo*, col quale istituì, nel 1896, sul fiume Potomac delle prove rimaste celebri nella storia dell'aeronautica, perchè confermarono fino all'evidenza la possibilità delle macchine volanti.

Il Langley dimostrò infine il multiforme suo interesse alla scienza nel ventennio, in cui fu Segretario influentissimo della Smithsonian Institution. A lui si deve il riordinamento dei Musei, l'organizzazione dell'ufficio di etnologia e la creazione di un vasto parco zoologico, in cui gli animali indigeni potessero vivere in condizioni possibilmente identiche al loro stato naturale; con che egli salvò l'esistenza di molte specie ed aprì nuove ricerche di biologia e di arti zoologiche. Fu anche un brillante scrittore di scienza popolare; e non vi fu impresa scientifica che non appoggiasse colla grande sua autorità e col suo consiglio. Uno degli scienziati più eminenti dell'America, il Langley salì nella più alta fama e conseguì onori accademici anche in Europa. Ci basti ricordare che fu eletto membro straniero della R. Society di Londra nel 1895, e che fino dal 1901 appartenne alla nostra Accademia come Socio straniero.

È certamente una grave perdita, che tutto il mondo scientifico ha fatto colla morte improvvisa di questo grande scienziato, e a questo lutto la nostra Accademia si associa con sentimento particolare e profondo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Corrispondenti: Grassi Guido, Leonardi Cattolica, e del Socio straniero Langley; richiama inoltre l'attenzione della Classe sul vol. 1° delle *Opere* di Carlo Hermite, e sul 33° fascicolo dei *Risultati delle campagne scientifiche* del Principe di Monaco.

Il Presidente Blaserna, a nome del Corrispondente Viola, fa omaggio della pubblicazione: *Ueber bromsaures Silber*.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona: la Società di scienze naturali di Tokyo; la R. Società zoölogica di Amsterdam; la Società di scienze naturali di Braunschweig; l'Associazione per l'avanzamento della scienza di Sydney; l'Istituto Smithsoniano di Washington; l'Università di Glasgow; gli Osservatorii di Oxford e di San Fernando.

V. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 4 marzo 1906.

Andreini A. — Sulle reti di poliedri regolari e semiregolari e sulle corrispondenti reti correlative. Roma, 1905. 4°.

Berlese A. — Gl'insetti, loro organizzazione, sviluppo, abitudini e rapporti coll'uomo. Vol. 1°. Milano, 1906. 4°.

Campana R. — Dei morbi sifilitici e venerei. 4ª ed. Torino, 1906. 8°.

Carnera L. e Volta L. — L'attività della stazione astronomica internazionale di Carloforte dall'ottobre 1903 a tutto l'anno 1904. Relazione (R. Comm. Geod. Ital.). Firenze, 1905. 4°.

Castagneris G. — L'Istituto speciale di aerodinamica di Koutchino e lo sviluppo tecnico mondiale dell'aerodinamica. (Boll. della Soc. Aerodinamica italiana, nov.-dic. 1905. Roma. 1905. 4°.

Darboux G. — Notice historique sur Charles Hermite, lue dans la Séance publ. ann. du Lundi 18 déc. 1905 de l'Institut de France. Acad. des Sciences. Paris, 1905. 4°.

Flint J. M. — A contribution to the Oceanography of the Pacific. (Bull. of the U. S. National Museum. N.° 55. Smithsonian Institution. Washington 1905. 8°.

Haeckel E. — Prinzipien der generellen Morphologie der Organismen. Berlin, 1906. 8°.

Helmert R. — Generalleutnant Dr. Oscar Schreiber. (Vierteljahrsschrift d. Astron. Gesellsch. 40 Jahrg. 4 Heft. Leipzig 1905). Leip- zig, 1905. 8°.

Herdman W. A. — Report to the Government of Ceylon on the Pearl Oyster Fisheries of the Gulf of Manaar, with supplementary Reports upon the Marine Biology of Ceylon by other Naturalists. Part III-IV. London, 1905. 4°.

Jaegerskiöld L. A. — Results of the Swedish Zoological Expedition to Egypt and the White Nile 1901, under the direction of L. A. Jägerskiöld. II. Uppsala, 1905. 8°.

Lavori dell'Istituto d'Anatomia patologica dell'Università di Torino, diretto dal prof. P. Foà. Anno 1905. Torino, 1906. 8°.

Longo B. — Contribuzione alla Flora della Basilicata. (Annali di Bot., vol. IV, fasc. 1°). Roma, 1905. 8°.

Pflueger E. — Ueber Ernährung mit Eiweiss und Glykogenanalyse. (Physiol. Laboratorium in Bonn). Bonn, 1906. 8°.

Pirandello E. — L'utilizzazione della forza motrice delle onde del mare e dei laghi, con appendice circa l'impiego ed il lavoro dei Galleggianti-Motori. Roma 1906. 8°.

Platania G. — I cavi telegrafici e le correnti sottomarine nelle Stretto di Messina. 2ª ed. Messina, 1905. 8°.

Platania G. — Le librazioni del mare con particolare riguardo al golfo di Catania. (Atti del Congr. Geogr. Ital. 1904, vol. 2°, sez. I). Napoli, 1905. 8°.

Policlinico Umberto I. Ricordo della costruzione. (Ministero dei LL. PP., Ufficio del Genio Civile di Roma). Roma, 1905. f.

Richardsor H. — A monography of the Isopods of North America. (Bull. of the U. S. National Museum. Smithsonian Institution). Washington, 1905. 8°.

Saccardo P. A. — Sylloge fungorum omnium hucusque cognitorum. Vol. XVIII, Suppl. Univers. Pars VII. Patavii, 1906. 8°.

Seitz W. — Die Leber als Vorrathskammer für Eiweissstoffe. (Physiol. Laboratorium in Bonn). Bonn, 1906. 8°.

Taramelli T. — Discorso letto nell'adunanza della Soc. Geol. Ital. tenuta in Tolmezzo il 20 agosto 1905. Roma, 1905. 8°.

Verbeek R. D. M. — Description géologique de l'Ile d'Ambon (avec Atlas in f°.). Batavia, 1905. 8°.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE
DELLE UNIVERSITÀ DI BASEL, BONN, HALLE, TÜBINGEN.

I. — BASEL.

ABEGG G. — Ueber quantitative Bestimmung von Zink durch Destillation der zinkhaltigen Stoffe im Clorwasserstoffgasstrom. Aachen, s. a. 8°.

ALBER E. — Ueber Benzylcrotonsäure. Zur Kenntnis der Attraktion zwischen Phenylgruppe und Doppelbildung. Basel, 1905. 8°.

BOESCH H. — Der Aquaeductus vestibuli als Infektionsweg. Wiesbaden, 1905. 8°.

BRASCH L. — I. Ueber die Einwirkung von Phenylhydrazin auf Itadibrombrenzweinsäure. — II. Ueber die Anhydrobase der Isoamylessigsäure. Basel, 1905. 8°.

BRAUNE H. — Ueber eine schnelle Methode für die Bestimmung des Stickstoffgehaltes in Eisen und Stahl und eine Untersuchung von prähistorischen Eisen aus Castaneda (Sud-Graubünden). Basel, 1905. 8°.

BUROW R. — Beiträge zur Entscheidung der Frage, ob die Caseine verschiedener Tierarten identisch sind. Basel, 1905. 8°.

CHRISTIE W. A. K. — Ueber die quantitative Bestimmung von Chlor und Kohlensäure nebeneinander und über die Titerstellung von Permanganatlösungen mittelst elektrolytischen Eisens. Zurich, 1905. 8°.

EGGER A. S. — Zur Kasuistik des Rhinophyma. Würzburg, 1905. 8°.

EXCHAQUET L. — Contribution à l'étude de la Laminectomie, avec 9 observations recueillies à l'hôpital de Bâle. Lausanne, 1904. 8°.

FREIDEL R. — Ueber das durch Typhusähnliche Bacillen und abweichende Typhusrassen erzeugte Krankheitsbild. Basel, 1905. 8°.

FRISELL G. — Ueber den Cinnamalcampher und seine Reduktionsprodukte. Basel, 1904. 8°.

FÜEG G. — I. Ueber 1-Phenil-3-methyl-5-pyrazolidon-carbonsäure. — II. Ueber α-Methyl-$\gamma\delta$-Pentensäure. Basel, 1904. 8°.

GAGEUR R. — Beiträge am Kenntnis Periamidonaphtols. Basel, 1904. 8°.

GEBHARD. N. L. — Ueber Tetramethylbenzidindioxyd und die Oxydation von p-Dimethylaminobenzaldehyd mit Sulfomonopersäure. Zürich, 1905. 8°.

GISIGER E. — I. Ueber β-Methyl-$\beta\gamma$-Pentensäure und β-Methyl-$\alpha\beta$-Pentensäure. — II. Ueber Tolilsäure. Basel, 1905. 8°.

HASSLER A. — Ueber symmetrische und unsymmetrische Phenylhydrazine. Basel, 1905. 8°.

HELBING H. — Beiträge zur Anatomie und Systematik der Laemargiden. Halle, 1904. 4°.

HUESLER G. — Beiträge zur Lehre von den Harnblasengeschwülsten im Kindesalter. Berlin, 1905. 8°.

HUNZIKER H. — Ueber die unmittelbaren und späteren Resultate der künstlichen Frühgeburt, eingeleitet wegen Beckenenge. Leipzig, 1904. 8°.

IMHOF G. — Anatomie und Entwicklungsgeschichte der Lumbalmarkes bei den Vögeln. Bonn, 1905. 8°.

JAQUET A. — Ueber die physiologische Wirkung des Höhenklimas. Basel, 1904. 4°.

KASANSKY S. — Operative Behandlung des Oesophaguscarcinom. Bern. 1905. 8°.

KOCKERSCHEIDT J. W. — Ueber die Preisbewegung chemischer Produkte unter besonderer Berücksichtigung des Einflusses neuerer Erfindungen und technischer Fortschritte. Jena, 1905. 8°.

LEUTENEGGER J. — Eine mehrfach symmetrische Kurve. Basel, 1904. 8°.

Meyer F. — Ein Fall von angeborenen grossen Blasendivertikel. Leipzig, 1905. 8°.

Monn J. A. — Die Heisswasser - Alkoholdesinfektion. Frauenfeld, 1904. 8°.

Müller H. — Die Reduktionsprodukte des 2,4-Dinitrorbodanbenzols. Affinitätmessungen an einbasischen Fettsäuren. Basel, 1905. 8°.

Niethammer T. — Relative Bestimmungen der Schwerkraft im Nikolaitale. Basel, 1904. 8°.

Nöldeke A. — Ueber die Umlagerungsprodukte des Acetylorthoamidohydrazotoluols. Basel, 1904. 8°.

Philipp K. — Ueber jodierte Phenylhydrazine und deren Derivate. Basel, 1905. 8°.

Porai-Koschitz A, — Zur Kenntnis der Methinammonium-Farbstoffe. Wiesbaden, 1905. 8°.

Preiswerk A. — Ueber allgemeine Haemochromatose. Basel, 1905. 8°.

Pyman F. L. — Ueber O-Hydroxylaminobenzoësäure und ihre Ester und über Oxy-ψ-Anthranil. Zürich, 1904. 8°.

Rabbethge O. — Stereochemische Studien in der Zimmtsäurereihe. Strassburg, 1904. 8°.

Raeber S. — Die Konstante der inneren Reibung des Ricinusöls und das Gesetz ihrer Abhängigkeit von der Temperatur. Halle, 1905. 4°.

Reynier L. E (De). — Die Resultate von 40 Frühgeburtseinleitungen mittels Eihautstichs. Leipzig, 1904. 8°.

Rocco J. R. — Ueber das primäre und metastatische Carcinom im Ductus hepaticus und an der Vereinigungs stelle der drei Gallengänge. Basel, 1905. 8°.

Schedler R. — Zur Casuistik der Blasentumoren bei Farbarbeitern. Basel, 1905. 8°.

Scheidig C. — Zur Kenntnis der Metanitro- und Metamidosulfamide in der aromatischen Reihe. München, 1005. 8°.

Sclaepfer C. — I. Studien über aromatische Carbinole. — II. Notiz über α-γ-Dimethyl- und α-Aethylitaconsäure. Basel, 1905. 8°.

Schulz A. — Ueber symmetrische und unsymmetrische Phenylhydrazinderivate. Basel, 1905. 8°.

Schwab J. — I. Ueber die Stereoisomeren β-Methylglutaconsäuren. — II. Ueber O-Diaminoguajacol und sein Oxydationsprodukt. Basel, 1004. 8°.

Senn H. — Zur Kenntnis der Elektrolytischen Raffination von Blei in kieselfluorwasserstoffsaurer Lösung. Halle, 1905. 4°.

Sokolow P. — Der Canalis cranio-pharyngeus. Leipzig, 1904. 8°.

Stroebe F. — Ueber die Abhängigkeit der Streckungsverhältnisse der Tracheïden von der Jahresringbreite der Fichte. Stuttgart, 1905. 8°.

Tschudi R. — Zur Altersbestimmung der Moränen im untern Wehratale. Basel, 1904. 8°.

Vogt A. — Weitere experimentelle und klinische Untersuchungen über den schädlichen Einfluss von künstlichen Anilinfarben auf das Auge. Berlin. 1905. 8°.

Wassilieff-Kononowitsch N. — Ueber Thrombophlebitis im Wochenbett insbesondere über das sogenannte Mahler'sche Zeichen. Basel, 1905. 8°.

Weiss E. — I. Kenntnis der synthetischen p.-Dialkyldioxychinone. — II. Ueber die Kondensation von Piperonal mit Bernsteinsäure. Basel, 1905. 8°.

Wharton H. — Zur Kenntnis des m-Nitrosobenzaldehyds. Zürich, 1995. 8°.

Zickendraht H. — Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Luftstossen in engen Röhren. Basel, 1905. 8°.

II. — Bonn.

Bernd A. H. — Die Entwicklung des Pecten im Auge des Hühnchens aus den Blättern der Augenblase. Bonn, 1905. 8°.

Böcker R. — Ueber Acetylmandelsäure und Acetylmandelsäurechlorid und über γ-Phenyltetronsäure. Bonn, 1905. 8°.

Coolidg J. — Die dual- projetkive Geometric im elliptischen und sphärischen Raume. Greifswald, 1904. 8°.

Crone (von der) G. — Ergebnisse von Untersuchungen über die Wirkung der Phosphorsäure auf die höhere Pflanze und eine neue Nährlösung. Bonn, 1904. 8°.

Dahm H. — Ueber das Enchondrom der Oberschenkel-Knochens mit besonderer Hinsicht auf die traumatische Genese Bonn, 1905. 8°.

Dobbelmann P. — Die infektiöse Thrombose der Gehirnsinus nach eitrigen Erkrankungen am Kopfe (Ausgenommen die nach Otitis media). Bonn, 1904. 8°.

Dupin B. — Ueber Fremdkörper in der Speiseröhre und ihre operative Entfernung. Bonn, 1904. 8°.

Eberth F. — Ueber Blennorrhoea neonatorum. Marburg, 1905. 8°.

Ehlers H. W. E. — Zur Histologie der Arteriosklerose der Pulmonalarterie. Berlin, 1904. 8°.

Engelmann W. — Ueber das tuberöse subchoriale Haematom der Decidua. Bonn, 1904. 8°.

Fraune F. — Ein Beitrag zur Lehre von den Pankreascysten. Cöln, 1904. 8°.

Friederichs W. — Ueber Absorptionsspektra von Dämpfen. Königswinter, 1905. 8°.

Gausen G. — Ueber Diverticel der männlichen Harnröhre ihre Entstehung und ihre Beziehungon zu Harnröhren, bezw. Blasensteinen. Bonn, 1905. 8°.

Goedecke F. — Ein Fall von Brust-Bauchspalte bei einen achtmonatlichen Kinde. Bonn, 1904. 8°.

Grafe E. — Die Urnieren-Pfortader beim Hühnerembryo. Bonn, 1904. 8°.

Grewè A. — Beiträge zur Kenntnis der Doppelsalze im Umwandlungsintervall. Bonn, 1905. 8°.

Hartmann K. — Ueber Vaginismus. Bonn, 1905. 8°.

Heuser K. — Beitrag zur Frage: Dupuytren'sche Contractur und Unfall. Neuwied, 1904. 8°.

Jakobs F. — Statistik des Alters der Gebärenden an der Universitäts-Frauenklinik zu Bonn 1893-1903. Bonn, 1904. 8°.

Kaebitz B. — Ueber die Absorptionsspectra der Chlorsäuren. Bonn, 1904. 8°.

Keppler W. — Ueber die Heilung von Pseudarthrosen unter spez. Berücksichtigung grosserer Knochendefekte. Bonn, 1904. 8°.

Klein H. — Zur Therapie der Uterusruptur. Bonn, 1904. 8°.

Knauer E. A. — Kann der Dünndarm stearinsäuren Kalk resorbieren? Altenburg, 1904. 8°.

Koch O. — Krampfadern, Krampfaderbrüche und Unfall. Bonn, 1905. 8°.

Korten F. — Beitrage zur Kenntnis der Iridiumverbindungen. Bonn, 1905. 8°.

Kremer E. — Ein Beitrag zur Kasuistik und Aetiologie der Darminvagination. Aachen, 1904. 8°.

Krumm W. — Ueber Darmeinstülpung. Mit besonderer Berücksichtigung der selbstheilung und ihrer Entstehung durch Unfall. Bonn, 1904. 8°.

Leinen J. — Die « Theorie Thieles über die Struktur der Banden » geprüft an der dritten Kohlebande. Bonn, 1905. 8°.

Leuwer C. — Ueber die Wirkung der tuberkulösen Erkrankung auf die Ernährung des menschlichen Körpers. Bremen, 1905. 8°.

Morsch H. — Das Bogenspektrum von Tantal. Bonn, 1905. 8°.

Nell P. — Studien über Diffusionsvorgänge wässeriger Lösungen in Gelatine. Bonn, 1905. 8°.

Nerking J. — Die Schilddrüse und ihre Einwirkung auf die Entwicklung des Embryos. Bonn, 1905. 8°.

Patton R. — Ueber Carcinom des Rectum mit Polypenbildung. Bonn, 1906. 8°.

Pfeil F. E. — Ueber traumatische Harnröhrenverengungen mit Bezug auf das Unfallversicherungsgesetz. 1905, 8°.

Quickert W. — Ueber ein papilläres Fibrom der Pulmonolklappe. Bonn, 1905, 8°.

Reichensperger A. — Zur Anatomie von Pentacrinus decorus Wy. Th. Leipzig, 1905. 8°.

Reintgen P. — Die geographie der Kautschukpflanzen. Berlin, 1905. 8°.

Reuland W. — Ueber multiple carcinomatöse Geschwüre und maligne Adenome des Dünndarms. Bonn, 1905. 8°.

Richarz A. — Ueber die klinische Bedeutung der peritonealen Adhaesionen. Bonn, 1904. 8°.

Rolshoven F. — Ueber die Behandlung innerer Blutungen mit besonderer Berücksichtigung der Gelatine-Anwendung. Ehrenfeld, 1905. 8°.

Rütten C. — Das Bogenspektrum von Samarium. Bonn, 1905. 8°.

Sambeth L. — Zwei Fälle von Facialis-Hypoglossus-Anastomose. Cöln, 1904. 8°.

Scheemann F. — Statistische Beiträge zur Puerperalfieberfrage. Bonn, 1904. 8°.

Schmidt H. — Ueber Pancreatitis haemorrhagica mit Fettgewebsnekrose infolge obliterierender Endarterütis. Bonn, 1904. 8°.

Schmiz C. — Zur Geschichte der ortlichen Gefühlslähmung. Bonn, 1905. 8°.

Schumacher H. — Ueber einen Fall von Peritheliom der Parotis und Submaxillaris. Bonn, 1904. 8°.

Schürhoff P. — Das Verhalten des Kernes im Wundgewebe. Leipzig, 1905. 8°.

Schwellenbach P. — Typischer Zerrungsschmerz in der Gegend des Epicondylus externus humeri. Bonn, 1905. 8°.

Sonntag E. — Unterschenkelbrüche mit Bezug auf das Unfallversicherungsgesetz. Bonn, 1904. 8°.

Steinhausen J. — Ueber « Enhanced Lines ». Euskirchen, 1904. 8°.

Stoppenbrink F. — Der Einfluss herabgesetzter Ernährung auf den histologischen Bau der Süsswassertricladen. Leipzig, 1905. 8°.

Usener W. — Experimentelle Beiträge zur inneren Desinfektion. Bonn, 1904. 8°.

Wiedmann O. — Ein Beitrag zur Lehre von der Heissluftbehandlung des traumatischen Kniegelenksergusses. Cöln, 1904. 8°.

Wilms H. — Ueber nervöse Störungen nach Unfällen durch Elektricität. Bonn, 1904. 8°.

Wolff E. — Das Lauthanspektrum. Bonn, 1905. 8°.

Wortmann C. — Ueber Haematoma Vulvae. Bonn, 1905. 8°.

III. — Halle.

Aeuer E. — Ueber das Atomgewicht des Jods. Halle a. S., 1904. 8°.

Altmannsberger K. — Ueber den Nährwert des mit Natronlauge unter erhöhtem Brucke aufgeschlossenen Roggenstrohes. Halle a. S., 1905. 4°.

Apelt O. — Indoxyl und Phenylglycin-o-carbonsäure. Halle a. S., 1904. 8°.

Assmy J. — Beitrag zur Casuistik der Symphysiotomie. Halle a. S., 1904. 8°.

Baumgarten O. — Ein Beitrag zur Kenntniss. des Diabetes-mellitus Berlin, 1905. 8°.

Becker E. — Der Rossbergbasalt bei Darmstadt und seine Zersetzungsprodukte. Frankfurt a. M., 1904. 8°.

Bewersdorff R. — Ueber Syphilis maligna. Halle, 1905. 8°.

Birk W. — Ueber Aethylmethylxanthin. Halle a. S., 1905. 8°.

Birth W. — Zur Aetiologie der Spina bifida. Halle a. S., 1904. 8°.

Braemer G. — Ueber die Erfahrungen bei placenta praevia in der Universitäts-Frauenklinik zu Halle a. S. Halle a. S., 1905. 8°.

Brenning J. — 81 Fälle von Magengeschwür, beobachtet in der Med. Klinik zu Halle. Halle a. S., 1905. 8°.

Brüel L. — Ueber die Geschlechts und Verdauungsorgane von Caliphylla mediterranea Costa: ihr morphologischer Wert und ihre physiologische Leistung. Halle u. d. S, 1904. 8°.

Cantor E. — Zur Casuistik der Symphysiotomie. Halle a. S., 1905. 8°.

Chatschatrnz A. — Periostitis typhosa. Halle a. S., 1904. 8°.

Dahlem K. — I. Azo-und Azoxybenzoësäureester. II. Dibromdiphensäure. Halle a. S., 1905. 8°.

Ernst W. — Das Pyramidon und sein saures kampfersaures Salz mit einigen Beobachtungen ihrer Wirkung bei Phthisikern. Halle a. S., 1905. 8°.

Fiedler L. — Ueber die rektale Resorbierbarkeit wassriger Natriumsalicylicumlösung. Halle a. S., 1905. 8°.

Fischer J. — Ueber Verengerung und Verschliessung der Vena cava superior. Halle a. S., 1904. 8°.

Gawronsky J. — Ueber Schornsteinfeger- und Paraffinkrebs. Halle a. S., 1904. 8°.

Giese H. — Histologische Untersuchungen ueber den Weissen Infarkt der Placenta. Halle a. S., 1905. 8°.

Gittel W. — Ueber die Einwirknng von Hydroxylamin auf Dimethylhydroresorcin. Halle a. d. S., 1904. 8°.

Goeschen K. — Ueber 27. Fälle von abdominaler Totalexstirpation des Uterus und der Adnexe wegen Carcinoma Uteri. Halle a. S., 1904. 8°.

Haehnel A. — Ueber Foetus papyraceus bei Zwillingsschwangerschaft. Halle a. S., 1905. 8°.

Hausmann R. — Experimentelle Untersuchungen uber die Ausnutzung verschieden zusammengesetzer Zuckerclysmen. Halle a. S., 1905. 8°.

Heine H. — Ueber knöscherne Geschwülste der Orbitalhöhle und ihre Röntgendurchleuchtung. Halle a. S., 1905. 8°.

Henze A. — Die Entwickelung der Forstdüngungsfrage. Mit einem Anhange: Die Forstdüngungsversuche der Landwirtschaftskammer für die Provinz Sachsen. Dresden, 1904. 8°.

Hildebrandt H. — Pharmakologische Studien über synthetisch kergestellte Basen aus der Piperidinreihe. Strassburg, 1904. 8°.

Hoffmann M. — Ueber Veränderungen des Magen-Darmkanales bei Leukämie und Pseudoleukämie. Halle a. S., 1905. 8°.

Ihsecke O. — Ueber eine ungewöhnliche Form innerer Hernie. Halle a. S., 1904. 8°.

Kathe J. — Das ätherische Oel im Knoblauch, ein neues, angeblich antituberkulöses Specifikum. Halle a. S., 1905. 8°.

Katté D. L. — Beitrag zur Kenntnis der Bildung des Roten Farbstoffs (Anthocyan) in vegetativen Organen der Phanerogamen. Halle a. S., 1995. 8°.

Kersten M. — Ueber β-Benzyläpfelsäure. Halle a S., 1905. 8°.

Kindborg A. — Die Pneumokokken. Vergleichende Untersuchungen mit besonderer Berücksichtigung der Agglutination. Leipzig, 1905. 8°.

Kleint F. — Beiträge zur Kenntuis der inneren Reibung von gemischen zwischen Sauerstoff, Wasserstoff und Stickstoff. Halle a. S., 1904. 8°.

Krause P. — Conjunctivitis Phyctänulosa. Halle a. S., 1905. 8°.

Laible Fr. J. — Ueber die Wirkung kleiner Alkoholgaben auf den Wärmehaushalt des tierischen Körpers. Halle a. S., 1905. 8°.

Lungwitz H. — Condensation von Zimtaldehyd mit organischen Basen der aromatischen Reihe. Halle a. S., 1905. 8°.

Lehnerdt B. — Bericht über 38 Fälle von Stauungspapille. Halle a. S., 1905. 8°.

Liebig (von) H. F. — Ueberführung des dibenzalacetons in Derivate des Diphenylcyklopentans. Halle a. d. S., 1904. 8°.

Makowka O. A. W. — Ueber Metallbestimmungen und Metalltrennungen mit Acetylen. Halle a. S., 1905. 8°.

Malherbe D. du T. — Zur Kenntnis des Tertiärbutylbenzols. Halle, 1905. 8°.

Marx F. — Beiträge Zur Diagnose der Zeit der Schwangerschaft. Halle a. S., 1905. 8°.

Mathes V. — Ueber die heutigen Anschauungsweisen über Theorie und Therapie der Basedow'schen Krankheit mit kasuistischen Beiträgen. Halle a. S., 1904. 8°.

Matzel R. — Zur Pharmakologie der ätherischen Oele. Halle a. S., 1905. 8°.

Meinecke W. — Ringformige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeitsmassen bei Anziehung durch einen Centralkörper. Halle a. S., 1905. 8°.

Mekus F. — Schiefschädel der Sammlung des anatomisohen Institutes zu Halle a. S. Halle a. S., 1905. 8°.

Meyer O. — Ueber multiple Adenome des Rectum und des Dickdarms. Halle a. S., 1905. 8°.

Milburn Th. — Ueber Aenderungen der Farben bei Pilzen und Bakterien. Halle a. S. s. a. 8°.

Müller A. — Die hydrographische Entwicklung der Fuhneniederung. Halle a. S., 1904. 8°.

Müller K. — Untersuchungen über den Futterwert des gemeinen Heidekrautes (Calluna vulgaris). Halle a. S., 1904. 8°.

Nieszytka Th. — Naphtalinsulfosaure Salze des Cers. Halle, 1904. 8°.

Penot J. — Vergleichender Futterungsversuch mit proteinreicheren und proteinärmeren Rationen. (Ausgeführt Beimschaf.). Halle a. S., 1904. 8°.

Peraold B A. — Ueber die Verbindungen der Wolle mit farblosen Aminen und Säuren. Halle a. S., 1904. 8°.

Pohl H. — Ueber den feinern Bau des Genitalsystems von Polycera quadrilineata. Mit. 2 Taf. und 2 Abbildungen im Text. Halle a. S., 1905. 8°.

Rackwitz H. — Beiträge zur Therapie der Extrauterin-Gravidität. Halle a. S., 1905. 8°.

Rademacher E. — Hodenretention und Abdominaltumorem. Halle, 1904. 8°.

Rodenwaldt E. — Aufnahmen des geistigen Inventars Gesunder als Masstab fur Defektprüfungen bei Kranken. Halle a. S., 1904. 8°.

Riehm E. — Beobachtungen an isolierten Blättern. Halle a. d. S., 1904. 8°.

Rott F. — Zur Alexander-Adamsschen Operation. Halle a. S., 1905. 8°.

Rühlmann E. — Ueber die Ursachen der Erblindung. Halle a. S., 1905. 8°.

Rücker. F. — Beiträge zur Kenntnis der Stetigen und Stufenweisen Magnetisierung. Halle a. S., 1905. 8°.

Schele (v.) A. F. — Ueber den Einfluss oberirdischer und unterirdischer Wasserzufuhr bei Pflanzenkulturversuchen. Halle a. S., 1905. 8°.

Schenk R. — Radioaktive Eigenschaften der Luft, des Bodens und des Wassers in und um Halle. Halle a. S., 1905. 8°.

Schmidt E. — Ueber 50 Fälle von Diabetes mellitus. Halle a. S., 1905. 8°.

Schmidt J. — Zur Kenntnis des wahren Harnblasendivertikel. Halle a. S., 1905. 8°.

Schober C. — Ueber die therapeutischen Wirkungen des Glykosals. Halle a. S., 1904. 8°.

Schulte W. — Zur Lehre von den solitären Hämatocelen. Halle a. S., 1904. 8°.

Schulze M. — Beitrag zur Lehre von den Hirnbrüchen. Halle a. S., 1905. 8°.

Segelitz L. — Ueber β-Aethyläpfelsäure. Halle a S., 1904. 8°.

Seliber G. — Variationen von Jussieua repens mit besonderer Berücksichtigung des bei der Wasserform vorkommenden Aerenchyms. Halle a. d. S, 1905. 8°.

Spannaus K. — Ueber die Resultate der Blasensteinbehandlung. Halle a. S., 1905. 8°.

Sponnagel F. — Addition von Natriummalonester an ungesättigte Verbindungen. Halle, 1905. 8°.

Wimmer G. — Beitrag zur Kenntniss der Nitrificationsbakterien. Halle a. S., 1904. 8°.

Werner M. A. — Corpus epitheliale und Linfe. Halle, 1904. 8°.

Weissheimer P. — Addition von Natriummalonester an ungersättigte Verbindungen. Halle a. S., 1905. 8°.

Ziegler E. — Ueber die Wärmeleitung von Aethan und Methan. Halle a. S., 1904. 8°.

IV. — Tübingen.

Albert E. — Ueber die Aenderung des Farbentones von Spectralfarben und Pigmenten bei abnehmender Lichtstärke. Leipzig, s. a., 8°.

Amos J. — Ueber vaginale Ovariotomie. Tübingen, 1905. 8°.

Antweiler P. J. — Ueber einige Säurecyanide und aus denselben erhaltene Ketonsäuren. Bonn, 1880. 8°.

Bantlin D. — Ueber einen Fall von Lebercirrhose im Kindesalter. Tübingen, 1903. 8°.

Barringer J. B. — Investigations on sorbic and parasorbic Acids. Tübingen, 1871. 8°.

Basler A. — Ueber die Art des Absterbens verschiedener quergestreifter Muskeln bei erhöhter Temperatur. Tübingen, 1902. 8°.

Rattershall J. P. — Investigations on some new derivatives of naphtalene. Tübingen, 1872. 8°.

Bauer H. — Ueber die Siedepunktsanomalieen der chlorirten Acetonitrile und einiger ihrer Abkömmlinge. Tübingen, 1884. 8°.

Bauer L. — Ueber den Einfluss von Temperatur und Jahreszeit auf den Ausbruch des acuten primären Glaucomanfalls nach dem Material der Klinik. Tübingen, 1903. 8°.

Baur H. v. — Ueber Dimethyl-Xylidine,-Toluidine und Aniline. Tübingen, 1882. 8°.

Beck C. — Ueber das Dioxydiphenylmethan. Nürtingen, 1877. 8°.

Becker G. — Zur Therapie der Kniegelenkankylosen. Tübingen, 1876. 8°.

Bennert K. — Beiträge zur Kenntniss der Isomerie von Fumar- und Maleïnsäure. Tübingen, 1884. 8°.

Bertsch E. — Ein neues Enterotom zur elektrolytischen Behandlung des Anus praeternaturalis. Tübingen, 1879. 8°.

Bilfinger E. — Ueber Haematocele retrouterina. Tübingen, 1872. 8°.

Bilfinger H. — Zur Frage von der Entstehung der traumatischen Hernien. Gmünd, 1901. 8°.

Binder A. — Ueber die Lage der Leprabacillen in den Geweben. Tübingen, 1877. 8°.

Binnecker F. — Ueber verschiedene Metallsalze als Sauerstoffüberträger an schweflige Säure. Wetzlar, 1887. 8°.

Bischoff H. — Das Caryophyllinenroth. Ein Beitrag zur Kenntniss der Pflanzenfarbstoffe. Tübingen, 1876. 8°.

Blumhardt H. — Beitrag zur diätetischen Behandlung der Epilepsie. Cannstatt, 1904. 8°.

Bodewig J. — Ueber Meta,-Para- und Ortho-Chlorchinolin und Derivate derselben. Bonn, 1855. 8°.

Bohnenberger J. T. F. — De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroidica institutis. Tübingen, 1826. 8°.

Bonhoeffer O. — Zur Kenntniss des Diphenylharnstoffchlorids. Stuttgart, 1887. 8°.

Bonz A. — Ueber die Bildung von Amid aus Ester und Ammoniak und die Umkehrung dieser Reaktion. Tübingen, 1888. 8°.

Bornemann W. — Ueber Chlorjod, Bromjod, Chlorobrom und deren Verhalten gegen Wasser. Tübingen, 1877. 8°.

Bötsch K. — Unvollständige Verbrennung von Gasen. Tübingen, 1881. 4°.

Brix R. — Ueber den Austausch von Chlor, Brom und Jod zwischen organischen und anorganischen Verbindungen. Tübingen, 1882. 8°.

Buchka A. — Ueber die Exstirpation des Zungenkrebses. Tübingen, 1896. 8°.

Büchner E. W. — Ueber ein Chlorbromanilin und die Zersetzung des Parabromanilins. Tübingen, 1875. 8°.

Bürger F. — Untersuchungen über Perspiratio insensibilis bei Diabetes mellitus und insipidus. Tübingen, 1872. 8°.

Cluss F. — Ueber Myiasis interna et externa. Tübingen, 1902. 8°.

Coromilas L. A. — Ueber die Elasticitätsverhältnisse im Gyps und Glimmer. Tübingen, 1877. 8°.

Damm G. — Ueber Bromnitro- und Bromamidoderivate des Phenols. Tübingen, 1879. 8°.

Danielsen W. — Der Cysticercus cellulosae im Muskel. Tübingen, 1904. 8°.

Denzel J. — Ueber Chlorbromsubstitutionsprodukte des Aethanes und des Aethylenes. Tübingen, 1878. 8°.

Doebner O. — Untersuchungen über das Diphenyl. Tübingen, 1873. 8°.

Doerenberger G. — Zur Therapie und Statistik des Abdominaltyphus. Tübingen, 1901. 8°.

Donner A. — Zur Kenntnis der Chinoxaline und ähnlicher Basen. Crefeld, 1889. 8°.

Dörken C. — Ueber Derivate des Diphe-

nylphosphorchlorürs und des Diphenylphosphins. Achen, 1888. 8°.

Dreischer A. — Beiträge zur Kenntnis der Thiophenverbindungen. Elberfeld, 1892. 8°.

Ehrig O. — Ueber einen Fall von Bauchblasengenitalspalte. Tübingen, 1901. 8°.

Eichler E. — Beiträge zur Kenntnis der Octylderivate. Breslau, 1879. 8°.

Eickhoff C. — Ueber die Erregbarkeit der motorischen Nerven an verschiedenen Stellen ihres Verlaufes. Tübingen, 1901. 8°.

Einhorn A. Ueber Isopropylphenylketon. Tübingen, 1880. 8°.

Eisaesser O. — Ueber die Häufigkeit und die Bedeutung der isolierten primären Nebennierentuberkulose. Rudolstadt, 1904. 8°.

Elsaesser F. — Ueber die specifischen Volumina der Ester der Fettreihe. Tübingen, 1881. 8°.

Enderle L. — Ueber spontane Gasentwicklung in eitrigen Exsudaten. Tübingen, 1876. 8°.

Endlich F. M. — Das Bonebed Württembergs. Tübingen, 1870. 4°.

Falckenberg K. — Ein Beitrag zur Pathologie und Therapie der Iridocyclitis tubercolosa. — Tübingen, 1901. 8°.

Fikentscher F. W. — Ueber Benzyl-Aether und ihr Verhalten beim Nitriren. Tübingen, 1881. 8°.

Finckh E. — Aufhebung der sogenannten bactericiden Wirkund des Blutserums durch Zusatz von Nährstoffen. Rudolstadt, 1902. 8°.

Finsterwalder S. — Ueber Brennflächen und die räumliche Verteilung der Helligkeit bei Reflexion eines Lichtbündels an einer spiegelnden Flache. München, 1886. 8°.

Fittig R. — Ueber die Constitution der sogenannten Kohlenhydrate. Tübingen, 1871. 4°.

Fleck H. — Ueber Magnesium-Alkyle. Tübingen, 1892. 8°.

Flick K. — Beiträge zur Kasuistik der Pfählungsverletzungen des Beckens. Tübingen, 1905. 8°.

Francksen F. — Ein Fall von Retroflexio Uteri gravidi. Tübingen, 1876. 8°.

Frey F. X. — Beitrag zum Casuistik der retrochorioidealen Blutung nach Staroperation. Tübingen, 1903. 8°.

Friedrich C. — Die Flechten des Grossherzogthums Hessen mit Berücksichtigung der anstossenden Gebiete. Riga, 1878. 8°.

Fritzgaertner R. — Die Pentacriniten- und Oelschieferzone des Lias Alpha bei Dusslingen. Tübingen, 1872. 8°.

Froehner E. — Ueber rheumatische Hämoglobinämie (toxämische Hämoglobinurie Bollinger's) beim Pferde und ihr Verhältniss zur paroxysmalen Hämoglobinurie des Menschen. Berlin, 1884. 8°.

Gerlach A — Ueber das Diphenylmethan und das Benzophenon. Tübingen, 1881, 8°.

Giersbach J. — Ueber die Nitrirung des Benzols. Tübingen, 1886. 8°.

Gleichmann L. — Zur Kenntnis der tertiären aromatischen Phosphine. Erlangen, 1882. 8°.

Goebel H. — Ueber die Ortsbestimmung der Nitrogruppen im Dinitro-p-Kresol. Darstellung des symmetrischen Dinitrotoluols und Toluylendiamins. Tübingen, 1881. 8°.

Goerlich M. — Ueber die Dauerresultate der Saphenaunterbindung bei der Behandlung der Varicen. Tübingen, 1904. 8°.

Greiss F. — Ueber Vergiftung mit schwefliger Säure. Tübingen, 1872. 8°.

Groschopf K. E. — Ein Beitrag zur Histogenese der Nebenhodentuberkulose. Tübingen, 1903. 8°.

Gross H. — Ueber die Affinitätsgrössen einiger Stickstoffbasen. Tübingen, 1891. 8°.

Gross W. — Ueber die Combinanten binärer Formensysteme, welche ebenen rationalen Curven zugeordnet sind. Stuttgart, 1887. 8°.

Gruenenwald T. — Ueber die Temperatur in peripheren Körperteilen. Tübingen, 1901. 8°.

Gutekunst O. — Ein Fall von Cylindrom der Highmarshöhle. Rudolstadt, 1904. 8°.

Haarland M. — Ueber Bindehauttransplantation. Tübingen, 1901. 8°.

Haecker R. — Katalog der anthropologischen Sammlung in der anatomischen Anstalt zu Tübingen. Nebst einer Abhandlung: Ueber die Grössenentwickelung der Hinterhauptsschuppe und deren Beziehungen zu der Gesamtform des Schädels. Braunschweig, 1902. 4°.

Hagmann J. — Ueber abnorm Lange Retention abgestorbener Früchte im Uterus. (Missed Labour). Berlin, 1903. 8°.

Hahn E. — Ueber Siedepunktsregelmässigkeiten bei den gechlorten Aethanen. Tübingen, 1877. 8°.

Hahn W. — Ueber Doppelgitter-Erscheinungen. Bonn, 1878. 8°.

Hankel H. — Untersuchungen über die nnendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. Tübingen, 1870. 4°.

Hauck G. — Grundzüge einen allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective. Dresden, 1876. 8°.

Haueisen P. — Ein Fall von Lammbluttransfusion auf den Menschen. Tübingen, 1877. 8°.

Haug G. — Beitrag zur Statistik der Hasenscharten. Tübingen, 1904. 8°.

Hempel C. — Untersuchungen über Oxydationsproducte des Terpins. Tübingen, 1875. 8°.

Herdegen R. — Zwei Geburten complicirt mit Grossen Eierstockgeschwülsten. Tübingen, 1875. 8°.

Hirschkowitz P. — Zur Frage über die Natur der Grundsubstanz in den Exsudaten bei Bronchitis fibrinosa und deren Beziehungen zur Lungentuberkulose. Würzburg, 1904. 8°.

Hoffmann C. J. — Ueber die Eiwirkung einiger Reagentien auf ein polymeres Anethol und die Zersetzungsprodukte, welche dabei entstehen. Tübingen, 1873, 8°.

Hoffmann P. — Ueber Nitroäthylparaoxybenzoesäure aus Aethylparakresol und Salpetersäure. Tübingen, 1880. 8°.

Hoelder O. — Beiträge zur Potentialtheorie. Stuttgart, 1882. 8°.

Holm O. — Ein Fall von primären Sarkom der Leber. Rudolstadt, 1904. 8°.

Hoelzer A. — Ueber einige Phenoläther. Berlin, 1881. 8°.

Hornstein F. — Verletzungen des Auges durch Kupfer- und Messingsplitter. Tübingen, 1905. 8°.

Hubbauer H. — Zwei Fälle von spontaner Uterusruptur. Tübingen, 1873. 8°.

Igerscheimer J. — Ueber den Blutdruck bei Tuberkulösen. — Tübingen, 1904. 8°.

Jaeger E. — Zur Encephalopathia saturnina. Tübingen, 1902. 8°.

Johannes J. — Die rationalen Raumkurven sechster Ordnung erzeugt durch geometrische Transformation aus einem Kegelschnitte. Bamberg, 1888. 8°.

Junker F. — Ueber Algebraische Korrespondenzen. Tübingen, 1889. 8°.

Just R. — Ueber das Verhalten von Piperidin-Basen gegen aromatische Halogenverbindungen. Dresden, 1891. 8°.

Kachel E. — Untersuchungen über die Sorbinsäure. Tübingen, 1873. 8°.

Kapff F. — Ueber die Exstirpation des Kehlkopfes. Tübingen, 1879. 8°..

Keller E. — Ueber Nitrophtalanile. Tübingen, 1880. 8°.

Kerez C. — Ueber die Einwirkung von Halogeuverbindungen des Aluminiums auf halagensubstituirte Kohlemvasserstoffe. Tübingen, 1885. 8°.

Kerrow W. J. M°. — Zur Kenntnis der Bromüberträger. Tübingen, 1891. 8°.

Kessler A. — Die Nitrierung des Benzols in ihrer Abhängigkeit von der Masse der wirkenden Stoffe. Dresden, 1887. 8°.

Klaus R. — Die Knochenbrüche aus den Jahren 1896-1903. Mit besonderer Berücksichtigung der Rentenverhältnisse. Tübingen, 1904. 8°.

Kleinschmidt F. — Ueber Isoindol. Tübingen, 1879. 8°.

Klotz C. — Ueber Dichlortoluole und Dichlorbenzoë-Säuren. Stuttgart, s. a., 8°.

Knaebel A. — Ueber Keratomalacia infantum. Tübingen, 1901. 8°.

Kobbé K. — Ueber das Atomgenwicht des Rhodiums. Tübingen, 1890. 8°.

Koch T. — Zur Frage der Zuckerbildung aus Eiweiss. Tübingen, 1904. 8°.

Köhler H. — Ueber Derivate des Phosphenylchlorids und des Monophenylphosphins. Tübingen, 1877. 8°.

Kölmel F. — Die Grassmannsche Erzeugungsweise von ebenen Kurven dritter Ordnung. Lahr, 1886. 8°.

Kommerell V. — Beitrage zur Gauss'chen Flächentheorie. Tübingeu, 1890. 8°.

Könyöki A. G. — Untersuchung des Methyleugenols. Pressburg, 1879. 8°.

Krehl L. — Ueber die Entstehung der Diagnose. Tübingen, 1903. 4°.

Krieg R. — Beiträge zur Lehre vom Enchondrom der Speicheldrüsen. Tübingen, 1874. 8°.

Krimmel O. — Ueber den Braunen Jura Epsilon. Tübingen, 1886. 8°.

Krüger L. — Die geodätische Linie des Sphäroids und Untersuchung darüber wann dieselbe aufhört, kürzeste Linie zu sein. Berlin, 1883. 8°.

Kumpf G. — Ueber Nitrophenyl-Benzyl und Nitrophenyl-Nitrebenzyläther. und die Nitrirungsproducte des Benzylchlorids. Tübingen, 1882. 8°.

Kurtz G. — Ein Beitrag zur Pathologie der Uterustumoren. Tübingen, 1873. 8°.

Kurz E. — Ein Fall von Placenta praevia centralis. Tübingen, 1874. 8°.

Kurz F. — Ueber das episklerale Melanom. Tübingen, 1905. 8°.

Laggai F. — Ueber die Beziehungen der spontanen Netzhautablösung zu Geschlecht, Lebensalter und Refraktion nack dem Materiale der Klinik. Tübingen, 1900. 8°.

Landerer H. — Beitrag zur Kenntnis des Korsakowschen Symptomenkomplexes. Tübingen, 1905. 8°.

Landerer P. — Zur Casuistik der Addison'schen Krankheit. Tübingen, 1878. 8°.

Lange G. — Zur Kenntnis des Chinolins. Osnabrück, 1887. 8°.

Lassalle E. — Ueber einen Satz von den Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades. Tübingen, 1885. 8°.

Lebsanft F. — Zwei seltene Fälle von Lage und Stellungswechsel während des Kreissens. Tübingen, 1873. 8°.

Lehrfeld T. — Ueber die Einwirkung von Ammoniak auf Bibrombernsteinsäure und auf Bibrombernsteinsäureäthylester. Pforzheim, 1881. 8°.

Leopold G. — Kasuistischer Beitrag zur Kenntnis des Herpes zoster ophthalmicus. Kübingen, 1904. 8°.

Leube M. — Ueber den Einfluss autolytischer Organprodukte auf die Blutgerinnung. Tübingen, 1904. 8°.

Leppert W. — Ueber die Zersetzung der Aether durch Wasserstöffsäuren. Halle, 1892. 8°.

Löhr P. — Ueber die Einvirkung von Alkyljodiden auf Cadmium und Magnesium. Tübingen, 1885. 8°.

Long J. H. — On the diffusion of liquids. Tübingen, 1879. 8°.

Macalpine T. — On ethylene-protocatechuic acid. Paisley, 1872. 8°.

Mager E. — Beitrage zur Entscheidung der Stellungsfrage in der aromatischen Gruppe. Tübingen, 1875. 8°.

Marshall J. — The Determination of the Spectro-photometric Constants and the Molecular weight of Carbonic oxide Haemoglobin. Tübingen, 1882. 8°.

Mayer N. — Ueber einige Nitro-, Azo- und Amido-Benzylverbindungen. Tübingen, 1892. 8°.

Mehmke R. — Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene. Stuttgart, 1880. 8°.

Meissner C. — Ueber die Deformationen eines elastischen isotropen Kegels durch mechanische an seiner Oberfläche wirkende Kräfte. Tübingen. 1882. 8°.

Mente A. — Ueber einige anorganische Amide. Hannover, 1888. 8°.

Meyer C. — Ueber Metachlornitro- und Metachloramidosulfobenzole. Hamm, 1883. 8°.

Meyer E. — Ueber die Affinität der Vitriolometalle zum Wasser. Hannover, 1886. 8°.

Meyercluwen A. — Ueber das Acenaphten. Tübingen, 1874. 8°.

Mildenberger A. — Sind im Sehnerven

des Pferdes Centralgefässe vorhanden? Tübingen, 1905. 8°.

Miller A. — Untersuchungen über die Elasticität dünner Drähte. München, 1874. 8°.

Mock E. — Beitrag zur Kasuistik der Stauungspapille. Tübingen, 1904. 8°.

Morris J. — Ueber den Einfluss der Masse auf chemische Umsetzungen. Tübingen, 1879. 8°.

Müller H. — Ueber die unendliche Potenzkette Stuttgart, 1886. 8°.

Nafzger F. — Ueber die Säuren des Bienenwachses. Stuttgart, 1882. 8°.

Nendörffer E. — Zwei neue Fälle von Pyometra und Pyokolpos lateralis. Tübingen, 1873. 8°.

Neumann. C. — Ueber die Theorie der Kugel-Functionen. Tübingen, 1866. 4°.

Id. — Die Principien der Elektrodynamik. Eine mathematische Untersuchung. Tübingen, 868. 4°.

Neumann H. — Ein Beitrag zur Kenntnis des induzierten Irreseins. Tübingen, 1903. 8°.

Noack E. — Ueber die Phenylester der phosphorigen Säure. Tübingen, 1882. 8°.

Oehler J. — Ueber die Hauttemperatur des gesunden Menschen. Naumburg, 1904. 8°.

Ostermayer E. — Ueber einen neuen Kohlenwasserstoff im Steinkohlentheeröl. Tübingen, 1879. 8°.

Page A. G. — The action of Chlorine upon organic bodies in presence of in organic Chlorides. Gloucester, 1883. 8°.

Pantlen C. — Ueber Tuberculose der äusseren Haut. Tübingen, 1873. 8°.

Paul L. G. — On the identity of certain mixed Ethers of Oxalic Acid. s. l., 1882. 8°.

Paul L. — Untersuchungen über die Methacrylsäure und eine neue aus der Citronensäure entstehende Säure. Tübingen, 1876. 8°.

Peveling J. — Das System konfokaler Parabeln, die eine Strecke harmonisch teilen. Aachen, 1891, 4°.

Pfeilsticker W. — Ueber einen Fall von Osteomalacia carcinomatosa infolge von Mammacarcinom. Rudolstadt, 1904. 8°.

Pfeiffer W. — Weitere Beobachtungen über die Haemolytische Fähigkeit des Peptonblutes. Leipzig, 1903. 8°.

Philips B. — Ueber einige unsymmetrische secundäre Kydrazine der aromatischen Reihe. Aachen, 1888. 8°.

Pietsch C. — Die Rotationsfläche von grösstem oder kleinstem Volumen. 1) bei gegebener Länge der Meridiankurve; 2) bei gegebener Oberfläche. Oppeln, 1881. 8°.

Pietsch G. — Das sphärische Viereck mit gleichen Gegenseitigen. Ein Beitrag zur Kinematischen Geometrie auf der Kugel. Gleiwitz, 1882. 4°.

Praetorius H. — Ueber die Nitrirungsproducte des Benzophenons. Tübingen, 1878. 8°.

Prehn A. C. — Untersuchungen über die aus der Citra- und Mesamonochlorbrenzweinsäure entstehende Crotonsäure. Tübingen, 1875. 8°.

Püttbach W. — Ueber Molybdänacichloride. Elberfeld, 1878. 8°.

Ramsay W. — Investigations on the Toluic, and Nitrotoluic Acids. Tübingen, 1872. 8°.

Rapp C. — Zur Casuistik der direkten Verletzungen des Sehnerven in der Augenhöhle. Tübingen, 1905. 8°.

Rauter G. — Ueber das Siliciumtetrachlorid. Köln, 1891. 8°.

Reichert H. — Ein Beitrag zum Puerperalfieber. Tübingen, 1877. 8°.

Reichmann V. — Ueber das sporadische Auftreten der Meningitis cerebrospinalis epidemica. Tübingen, 1876. 8°.

Reiff R. — Ueber den Einfluss der Capillarkräfte auf die Form der Oberfläche einer bewegten Flüssigkeit. Tübingen, 1899. 4°.

Rembold S. — Ueber Pupillarbewegung. Tübingen, 1899. 8°.

Remy A. — Ueber β-Nitronaphtalin und einige andere Abkömmlinge des Naphtalins. Bonn, 1886. 8°.

Reucklin H. — Zur Kasuistik des doppelseitigen pulsirenden Exophthalmus. Tübingen, 1902. 8°.

Reusch H. — Zur Kenntnis des Chinolins. Tübingen, 1889. 8°.

Reusch E. — Beiträge zu den Elementen der Katoptrik und Dioptrik. Tübingen, 1857. 4°.

Riffel A. — Beitrag zur Histologie der Lungentuberkulose des Menschen und des Rindes. Tübingen, 1874. 8°.

Römer H. — Ueber die histologischen Initialveränderungen bei Lungenphthise un dihre Verwertung für die Theorie des Infektionsweges. Tübingen, 1904. 8°.

Römer P. — Ueber die Einwirkung von saurem schwefligsaurem Kali auf einige Diazoverbindungen. Tübingen, 1872. 8°.

Rothauer M. — Ueb r des Maclurin. Tübingen, 1876. 8°.

Rügheimer L. — Ueber einen neuen Alkohol (Phenylpropylalkohol) im Storax und die Produkte der Einwirkung von Wasserstoff im status nascendi auf Zimmtalkohol. Tübingen, 1893. 8°.

Salzmann M. — Ein Fall einer Harnleiter-Gebärmutterfistel. Tübingen, 1876. 8°.

Sapper E. — Ueber die Einwirkung der Halogenwasserstoffe auf zusammengesetzte Aether. Stuttgart, s. a. 8°.

Sauer E. — Ueber das α und β Dioxybenzophenon. Tübingen, 1879. 8°.

Saexinger J. — Ueber den Einfluss akuter und kronischer Krankheiten auf den Verlauf der Schwangerschäft. Tübingen, 1872. 8°.

Schaal R. — Die Indicationen für das Anlegen der Zange nach der Prager Schule. Tübingen, 1872. 8°.

Schefold E. — Ueber die Verwendung der Killian'schen Bronchoskopie bei der Pneumotomie. Tübingen, 1904. 8°.

Scheiffele K. — Ein Beitrag zur Kasuistik der chirurgischen Behandlung des Empyems. Tübingen, 1890. 8°.

Schiler A. — Die Pathologie der Vehenthätigkeit. Tübingen, 1879. 8°.

Schleich A. — Ueber Castration bei Myofibromen des Uterus. Tübingen, 1884, 8°.

Schleich C. — Ueber nitrobenzylierte Malonsäureester. Tübingen, 1889. 8°.

Schleich G. — Burkard David Mauchart. Tübingen, 1897. 4°.

Schliemann J. — Ueber die Affinitätsgrössen der Säuren. Stuttgart, 1893. 8°.

Schmidt A. — I. Ueber nitrirte Anetholderivate. II. Untersuchungen über das Pinakon. Stuttgart, s. a. 8°.

Schmidt O. — Ueber einige Abkömmlinge des Naphtalins. Dillenburg, 1887. 8°.

Schmidtlein A. — Beitrag zur Lehre von der hochgradigen Myopie. Tübingen, 1902. 8°.

Schöffler G. W. — Ueber die Tuberkulose des Herzfleisches. Tübingen, 1873. 8°.

Schoop P. — Die Aenderung der Dampfdichten bei variablem Druck und variabler Temperatur. Zürich, 1880. 8°.

Schottky A. — Die Kupfererze des Districtes von Aroa, Venezuela. Bressau, 1877. 8°.

Schulte C. J. — Ueber die Arsenoverbindungen des Benzols und Naphtalins und über Phenylarsensulfide. Elberfeld, 1881. 8°.

Schultz R. — Ueber drei Dichlorbenzoësäuren und einige Derivate des Trichlortoluols. Tübingen, 1877. 8°.

Schumann O. — Ueber die Affinität des Schwefels und des Sauerstoffs zu den Metallen. Tübingen, 1877. 8°.

Schuncke J. — Ueber die Löslichkeit des Aethyloxydes in Wasser und wässriger Salzsäure. Tübingen, 1879. 8°.

Schürmann E. — Ueber die Verwandtschaft der Schwermetalle zum Schwefel. Barmen, 1888. 8°.

Schwab L. — Ueber Naphtoläther und das Verhalten derselben beim Nitriren. Tübingen, 1881. 8°.

Schwaderer R. — Ueber Piperideïn und Dipiperideïn. Tübingen, 1889. 8°.

Schwartz A. — Ueber lineäre partielle Differential - Gleichungen. II. Ordnung. Berlin, 1887. 8°.

Schwarz (v.) J. F. — Einiges über Falcoiden (Hohlkieler des mittleren Lias). Salzburg, 1873. 8°.

Sehlbach P. O. — Ueber Tubargravidität und ihre Schicksale. 44 Fälle aus der

Tübinger Frauenklinik. Tübingen, 1903. 8°.

Settegast A. — Beiträge zur quantitativen Spectralanalyse. Tübingen, 1878. 8°.

Seubert K. — Ueber das Atomgewicht des Iridiums. Tübingen, 1878. 8°.

Sieber H. — Ueber die Drainage der Beckenbauchhöhle auf Grung von 315 diesbezügl. Fällen aus der Frauenklinik Tübingen. Tübingen, 1903. 8°.

Siepermann O. — Ueber eine neue Synthese sauerstoffhaltiger organischer Basen. Tübingen, 1881. 8°.

Siepermann W. — Ueber das aus Diamidomesitylen entstehende Chinon. Tübingen, 1875. 8°.

Sievert H. — Ueber die Zentraflächen der Enneper'schen Flächen konstanten Krümmungsmasses. Tübingen 1886. 8°.

Sigel O. — Ueber Fremde Körper im hinteren Augenabschnitte, insbesondere in der hinteren Bulbuswand. Tübingen, 1876. 8°.

Southworth M. S. — Investigations on the isomeric Cresoles with reference to their occurrence in Coal-tar. Pau, 1873. 8°.

Stahl K. — Untersuchungen über die Einwirkung von Bromwasserstoff auf Sorbinsäure und Hydrosorbinsäure. Tübingen. 1876. 8°.

Staiger E. — Ueber die Centralgefässe im Sehnerven unserer einheimischen Ungulaten. Tübingen, 1905. 8°.

Staigmüller H. — Die harmonische Configuration. Stuttgart, 1886. 8°.

Steinbrüch H. — Ueber idiopathische chronische Peritonitis. Tübingen, 1876, 8°.

Stolte L. — Das Focalaxensystem einer Fläche zweiter Ordnung. Strassburg 1877. 8°.

Straub F. — Beitrag zur operativen Behandlung der Oedeme der Haut. Tübingen, 1882. 8°.

Strecker A. — Ueber eine neue Klasse organischer Stickstoffverbindungen. Tübingen, 1863. 4°.

Stumpf M. — Beiträge zur Kenntniss der Säuren des Naptalins. Tübingen, 1876. 8°.

Taute M. — Ueber tödliche Blutungen im Gefolge der Tracheotomie. Tübingen, 1903. 8°.

Teufel M. — Ueber einen Fall von Sarcom des kleinen Netzes mit Perforation der Aorta abdominalis. Tübingen, 1901. 8°.

Tscherning F. A. — Untersuchungen ueber die Entwicklung einiger Embryonen bei der Keimung. Tübingen, 1872. 8°.

Uebelmesser H. — Ueber 12 Fälle von Kephalocranioklasie nach Zweifel. Tübingen, 1902. 8°.

Valeur F. — Ueber Chinolindisulfonsäuren und Derivate derselben. Aachen, 1886. 8°.

Vianna de Lima A. — Ueber eine Bewegung einer materiellen Punktreihe. Berlin, 1882. 4°.

Vollmar G. — Ueber Siedepuncte u. Specifische Volumina der Halogensubstitutionsproducte des Aethans. Stuttgart, 1882. 8°.

Vortisch H. — Ueber Sehnervenerkrankungen bei Turmschädel. Tübingen, 1901. 8°.

Waldbaur A. — Untersuchungen über die Einwirkung des alkoholischen Kalis auf Monobromisobuttersäure und des feinvertheilten Silbers auf den Aethylester derselben. Stuttgart, 1878. 8°.

Wassmann T. — Ueber Brom- nitro- und Brom- amidosubstitutionsprodukte des Phenetols. Tübingen, 1881. 8°.

Weichsel G. — Unterbindung der Nierengefässe zum Studium der fettigen Degeneration. Rudolstadt. 1904. 8°.

Wetzel A. — Ein Beitrag zur Frage des toxischen Eiweisszerfalls beim Carcinom. Tübingen, 1904. 8°.

Wolff A. — Ueber die Reductionsfähigkeit der Bacterien einschliesslich der Anaërobien. Braunschweig, 1901. 8°.

Wulff H. F. — Der primäre Leberkrebs. Tübingen, 1876. 8°.

Wurstemberger A. R. C. v. — Ueber Lias Epsilon. Stuttgart, 1896. 8°.

Würthner E. — Vergleichende Untersuchungen über das chemische Verhalten aromatischer und fetter Diamine. Tübingen, 1884, 8°.

Wüst A. — Theorie der Centrifugal- Regulatoren. Stuttgart, 1871. 8°.

Zech J. — Zur Methode der kleinsten Quadrate. Tübingen, 1857. 4°.

Zeller E. — Ueber primäre Tuberkulose der quergestreiften Muskeln. Tübingen, 1903. 8°.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° aprile 1906.

Bell Dawson W. — Solar and Lunar Cycles Implied in the Prophetic Numbers in the Book of Daniel. (From the « Transactions of the R. Soc. of Canada » Second series, 1905-06, vol. XI. Sect. III). London, 1905. 8°.

Boccardi G. — Apparenza del pianeta Marte. (Mem. della Cl. di Scienze della R. Accad. degli Zelanti. 3ª serie, vol. IV. 1905-06). Aci- reale, 1906. 8°.

Dufour G. et Gautier R. — Les ombres volantes. Observations. (Arch. des scien. phys. et nat. Cent onzième année. Tome XXI). Genève, 1906. 8°.

Falbo. — Interviste capitoline. I grandi servizi pubblici e l'Amministrazione comunale. (Com. « Pro Roma Marittima »). Roma, 1906. 8°.

Gautier R. (et autres). — L'éclipse totale du soleil du 30 août 1905. Observations de la Mission astronomique suisse à Santa Ponza. (Arch. des scien. phys. et nat. Cent dixième année. Tome XX). Genève, 1905. 8°.

Grassi G. — Corso di elettrotecnica, vol. II. (Grande bibliot. tecnica). Roma-Torino, 1906. 8°.

Guidi C. — Sul calcolo delle sezioni in beton armato (dal « Cemento » n. 1, anno III, 1906. 8°.

Guidi C. — Influenza della temperatura sulle costruzioni murarie. (Accad. delle scienze di Torino, 1905-1906). Torino, 1906. 8°.

Hermite Ch. — Oeuvres publiées par E. Picard. Tome I. Paris, 1905. 8°.

Langley S. P. — Experiments with the Langley Aerodrome (from the Smiths. Report for 1904). Washington, 1905. 8°.

Leonardi Cattolica P. — Trattato di Idrografia. Libro di testo per la R. Accadomia navale. Parte II. Fascicolo II. Rilievo sottomarino. Parte II. Fascicolo IV. Disegno delle carte nautiche e sua riproduzione. Genova, 1905. 8°.

Meyer M. — Die Nervosität in der Armée. (Separatabd. aus « Der Militärarzt » N°s 3 und 4 1906). Wien, 1906). 8°.

Id. — Zur Behandlung der entzündlichen Erkrankungen der oberen Harnwege. (Sonderabd. aus: «Theraup. Monatssh. » 1906, März) Berlin, 1906, 1906. 8°.

Otis Hovey E. The Grande Soufrière of Guadeloupe. (Bull. of the American Geographical Society. Sept. 1904).

Russo A. — Prime ricerche dirette a determinare la permeabilità e la struttura istochimica della zona pellucida dei mammiferi. Nota preliminare. (Boll. dell'Acc. Gioenia di scienze nat. in Catania. Fasc. LXXXVIII. Febb. 1906).

Sinigaglia F. — La surchauffe appliquée à la machine à vapeur d'eau. (Revue de Mécanique, 1905). Paris, 1906. 4°.

Sommerfeldt E. — Geometrische Kristallographie. Leipzig. 1906. 8°.

Sorauer P. — Zeitschrift für Pflanzenkrankheiten. Organ für die Gesamtinteressen des Pflauzenschutzes herausg. von D. F. Sorauer. XVI, B. I. H. Stuttgart, 1906. 8°.

Tommasina T. — Sur un dispositif pour mesurer la radioactivité des végétaux. Radioactivité de la lave de la dernière

éruption du Vésuve (1904). (Premier Congrès internat. pour l'étude de la Radiologie et de l'Ionisation. Liége). Bruxelles, 1906. 8°.

TOMMASINA T. — Sur la théorie cinétique de l'electron qui doit servir de base à la théorie électronique des radiations. (Premier Congrès internat. pou rl'étude de la Radiologie etc. Liége). Bruxelles, 1906. 8°.

TOMMASINA T. — Ueber die kinetische Theorie des Elektrons als Grundlage der Elektronentheorie der Strahlungen. (Sonderabd. aus der Physikalischen Zeitschrift. 7. Jahrg. N. 2). Leipzig, 1905. 4°.

TOMMASINA T. (et autres). — Etude de l'effet Elster et Geitel: Radioactivité induite. (Premier Congrès intern. pour l'étude de la Radiologie etc. Liége). Bruxelles, 1906. 8°.

TONI G. B. (DE). — Sull'origine degli erbarii. Nuovi appunti dai manoscritti aldrovandiani. Modena, 1906. 8°.

TONI G. B. (DE). — Una interessante scoperta del modenese Giamb. Amici e dei suoi progressi. Discorso inaugurale letto nella R. Univ. di Modena. 4 nov. 1905. Modena, 1906. 8°.

VERNEY L. — Sul bonificamento idraulico dell'Agro Romano. (Giorn. di Geologia pratica. Perugia, 1905). Roma, 1906. 8°.

VIOLA C. — Ueber bromsaures Silber. (Sonderabd. aus « Zeitschrift für Krystallographie usw. ». XLI Band. 5. Heft). Leipzig, 1906. 8°.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE

DELLA UNIVERSITÀ DI UTRECHT.

UTRECHT.

BUSCH P. W. C. M. — Over de localisatie van het glycogeen bij enkele darmparasieten. Utrecht, 1905. 8°.

DALHUISEN A. A. — Over eenige aantallen van kegelsneden, die aan acht voorwaarden voldoen. Utrecht, 1905. 8°.

HOOGENHUYZE C. E. A. (v.). — Bijdrage tot de kennis van den dood door verbranding. Utrecht, 1904. 8°.

HUBRECHT P. F. — Ueber Cerussitviellinge von Sardinien. Leipzig, 1904. 8°.

MAANEN A. (v.) — De oorzaack van den dood na het afbinden der Ureteren. Utrecht, 1905. 8°.

MINKEMA H. F. — De gevoeligheid van het Menschelijk oor voor verschillende tonen der toonladder. Arnhem, s. a. 8°.

MULDER A. — Bijdrage tot de kennis der 24-dinitroanilinen. Utrecht, 1905. 8°.

MULLER F. — De wederzijdsche verhouding tusschen ei en uturus bij de knaagdieren meer in het bijzonder bij sciurus vulgaris. Leiden, 1905. 8°.

TUINZING E. C. — Over den invloed van halssympathicus op de accomodatie. Rotterdam, 1905. 8°.

UBRECHT P. F. — Ueber Cerussitviellinge von Sardinien. Leipzig, 1905.

VALEWINK G. C. A. — Over asymptotische ontwikkeligen. Haarlem, 1905. 8°.

VREESWIJK I. A. — Involuties op rationale krommen. Utrecht, 1905. 8°.

V. C.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1906). Fasc. 7°. 1° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 9°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VI. Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Fasc. 1°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° aprile 1906.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Castelnuovo. Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica . . . . . Pag. 337
Di Stefano. Sull'esistenza dell'Eocene nella penisola Salentina (*) . . . . . » 344
Marcolongo. Sugli integrali delle equazioni dell'elettrodinamica (pres. dal Socio *Cerruti*). » »
Lauricella. Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi (pres. dal Socio *Dini*) (*) . . . . . » 349
Nielsen. Sur quelques propriétés nouvelles de fonctions cylindriques (pres. *Id.*) (*) . . . » »
Lebon. Théorie et Construction de Tables permettant de trouver rapidement les facteurs Premiers d'un nombre (pres. dal Socio *Volterra*) (*) . . . . . » »
Blanc. Ricerche su un nuovo elemento presentante i caratteri radioattivi del torio (pres. dal Corrisp. *Sella*) . . . . . » »
Pochettino. Sul comportamento foto-elettrico dell'Antracene (pres. *Id.*) . . . . . » 355
Eredia. La pioggia a Roma (pres. dal Socio *Millosevich*) (*) . . . . . » 363
F. Millosevich. Appunti di mineralogia sarda. Bournonite del Sarrabus (pres. dal Socio *Strüver*) (*) . . . . . » »
Levi e *Voghera.* Sopra la formazione elettrolitica degli iposolfiti (pres. dal Corrisp. *Nasini*) . » »
Venditori. Sulla riduzione del Ferricianuro di potassio (pres. dal Socio *Cannizzaro*) . . » 370
Longo. Ricerche sul Fico e sul Caprifico (pres. dal Socio *Pirotta*) . . . . . » 373
Pantanelli. Influenza dei colloidi su la secrezione e l'azione dell' invertasi (pres. *Id.*) . . » 377
Kuiper. Sul meccanismo respiratorio dei pesci ossei (pres. dal Socio *Luciani*) . . . . » 385
Giacomini. Sulle capsule surrenali e sul simpatico dei Dipnoi. Ricerche in Protopterus annectens (pres. dal Socio *Emery*) . . . . . » 394

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Zambiasi. Verifica dei Coristi normali dell'Ufficio centrale italiano pel Corista uniforme (pres. dal Socio *Blaserna*). . . . . » 398

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Strüver (relatore) e *Balbiano.* Relazione sulla Memoria del dott. *Zambonini*, intitolata: « Ulteriori ricerche sulle zeoliti » . . . . . » »

PERSONALE ACCADEMICO

Blaserna (Presidente). Commemorazione del Socio straniero *S. P. Langley* . . . . . » »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Cerruti (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Corrispondenti *Grassi G.*, *Leonardi Cattolica*, del Socio straniero *Langley*, il 1° vol. delle Opere di *C. Hermite*, e il 33° fascicolo dei « Risultati delle campagne scientifiche » del Principe di Monaco . . . . . » 400
Blaserna (Presidente). Fa omaggio di una pubblicazione del Corrispondente *Viola* . . . » »

CORRISPONDENZA

Cerruti (Segretario). Dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti . . . » »
BULLETTINO BIBLIOGRAFICO . . . . . » 401

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. *Roma 22 aprile 1906.* **N. 8.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 *aprile* 1906.

Volume XV.° — Fascicolo 8°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

cancelled

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. – *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. – *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. – *c*) Con un ringraziamento all'autore. – *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 aprile 1906.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Condizioni di esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali.* Nota del Corrispondente Cesare Arzelà.

1. Per un'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dove x e y sono variabili reali in un certo campo, è dimostrato che, presupposta la continuità della $f(x, y)$, o anche solo la integrabilità in x e la continuità in y, preso ivi a piacere un punto $(x_0\, y_0)$, sempre esiste almeno una funzione continua $y = y(x)$ che per $x = x_0$ assume il valore $y = y_0$ e soddisfa, per un certo intervallo, all'equazione differenziale. Se si aggiunge la condizione di Cauchy, o quella di Lipschitz, quella funzione è unica.

Se poi $f(x, y)$ è funzione analitica delle x e y variabili complesse, allora un procedimento ben noto, fondato sul cosidetto *Calcolo dei limiti* di Cauchy, assicura l'esistenza di una funzione analitica $y(x)$ della x che in $x = x_0$ diviene $y(x_0) = y_0$, e soddisfa all'equazione differenziale.

Per un'equazione a derivate parziali

$$p = f(x, y, z, q),$$

l'esistenza dell'integrale è stabilita nell'ipotesi che il secondo membro sia funzione analitica degli argomenti x, y, z, q, con dimostrazione pure fondata

sul *Calcolo dei limiti*: ma, come nota E. von Weber [1], un teorema *generale* di esistenza, nel dominio delle quantità reali, analogo a quello ricordato qui a principio, ancora non è stato dato.

In una Nota *Sull'esistenza degli integrali* ecc. (Memorie dell'Accademia delle scienze di Bologna, 1896), come anche nell'altra 1895 *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali ordinarie*, dimostravo per queste l'esistenza della soluzione servendomi del teorema generale relativo alla *condizione per l'esistenza di una funzione limite continua per una successione di funzioni qualunque, comprese tra limiti finiti*; e annunciavo che, seguendo via analoga, mi ripromettevo di pervenire a un analogo teorema di esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali.

Ma la cosa non mi riuscì, e così, anche più tardi dovetti pur rimandare la pubblicazione della Memoria relativa, annunciata nei Rendiconti del 1903 dell'Accademia di Bologna.

Ora giudico di avere ottenuto in modo semplice mediante opportuna costruzione di una successione di funzioni discontinue, la dimostrazione di che si tratta, e nella Memoria, di cui qui si espone il sunto, precisamente stabilisco che:

Presupposta nella funzione $f(x, y, z, q)$ *la sola continuità rispetto alle variabili in un certo dominio, data ad arbitrio una funzione* $\varphi_0(y)$ *della* y *continua essa e la sua derivata* $\varphi_0'(y)$ *in un certo intervallo e con rapporto incrementale* $\dfrac{\varphi_0'(y+k)-\varphi_0'(y)}{k}$ *sempre compreso tra* $-\mathrm{L}$ *e* L, L *finito, l'equazione*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ammette sempre una, o infinite soluzioni, $z = z(x, y)$ *finite e continue insieme con le rispettive derivate* $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ *in un certo campo, e che per* $x = x_0$ *si riducono* $z(x_0, y) = \varphi_0(y)$.

Questo lavoro è da riguardarsi come un'applicazione del teorema generale relativo alla convergenza verso funzioni limiti continue, di una successione, o di una varietà di funzioni discontinue solo supposte comprese tra limiti finiti.

Darò in altra Nota condizioni semplici per la unicità della soluzione.

2. Ecco i teoremi sui quali si fonda la dimostrazione.

1°. *Data una varietà* G *di funzioni, delle quali è solamente presupposto che siano tutte contenute tra limiti finiti, la condizione necessaria*

[1] *Encyklopedie der mathematischen Wissenschaften* ecc. II Band, Heft 2, 3.

e sufficiente affinchè essa ammetta una o più, o anche infinite funzioni limiti egualmente continue, è, che si possa assegnare una successione di numeri

$$\sigma_1 , \sigma_2 , \ldots$$

positivi, decrescenti indefinitamente, e insieme anche un'altra successione di numeri pure positivi.

$$\delta_1 , \delta_2 , \ldots$$

tali che nella varietà G *si trovino infinite sotto-varietà, che indicheremo con*

$$G(\sigma_1) , G(\sigma_2) , \ldots$$

ognuna di infinite funzioni e contenuta in quella che la precede, egualmente oscillanti, rispettivamente per meno di

$$\sigma_1 , \sigma_2 , \ldots$$

in ogni cerchio, di raggio

$$\delta_1 , \delta_2 , \ldots$$

rispettivamente.

2°. *Se la varietà* G *si riduce a una successione ordinata*

$$u_1(x , y) , u_2(x , y) , \ldots$$

la condizione sarà verificata se per ogni σ, *esiste un intero* m *e un numero positivo* δ *tale che in ogni area di massima corda* δ, *oscillino per meno di* σ *tutte le*

$$u_{m+1}(x , y) , u_{m+2}(x , y) , \ldots$$

3°. *Se le successioni*

$$u_1(x , y) , u_2(x , y) , \ldots$$
$$v_1(x , y) , v_2(x , y) , \ldots$$

convergono rispettivamente in egual grado alle funzioni continue $u(x , y)$ *e* $v(x , y)$ *e in ogni cerchio comunque piccolo e per ogni intero* m, *si trova sempre per qualche indice* $n > m$ *un punto* (x , y) *nel quale è*

$$u_n(x , y) = v_n(x , y) ,$$

sarà in ogni punto del campo

$$u(x , y) = v(x , y) .$$

3. È data l'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x , y , z , \frac{\partial z}{\partial y}\right) ,$$

ovvero

$$p = f(x , y , z , q) .$$

La $f(x, y, z, q)$ è supposta funzione continua nelle variabili x, y, z, q nel dominio limitato dalle disuguaglianze

$$\begin{aligned} x_0 &\leq x \leq X_0 \\ y_0 &\leq y \leq Y_0 \\ -Z_0 &\leq z \leq Z_0 \\ -Q_0 &\leq q \leq Q_0 . \end{aligned}$$

È data la $x = x_0$, $z = \varphi_0(y)$ continua essa e la sua derivata prima $\varphi'(y)$ nell' intervallo

$$y_0 \leq y \leq Y_0$$

e con $\left|\frac{\varphi'(y+h) - \varphi'(y)}{h}\right|$, sempre minore di L, per ogni y e $y+h$ ivi.

Deve essere ancora

$$\begin{aligned} -M &< \varphi_0(y) < M \\ -M' &< \varphi_0'(y) < M' \end{aligned}$$

con M e M′ rispettivamente minori di Z_0 e di Q_0.

Si costruisca una successione di funzioni

$$\varphi_0(y), \varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots$$

continue esse e le rispettive derivate

$$\varphi_0'(y), \varphi_0'(y), \varphi_2'(y), \ldots$$

nell' intervallo $y_0 \ldots Y_0$ e i cui rapporti incrementali

$$\frac{\varphi_s'(y+h) - \varphi_s'(y)}{h}$$

siano pur sempre compresi tra $-L$ e L.

Le

$$\varphi_0(y), \varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots$$

siano tutte comprese tra

$$-M_1 \text{ e } M_1$$

essendo

$$M \leq M_1 < Z_0 ;$$

le

$$\varphi_0'(y), \varphi_1'(y), \varphi_2'(y), \ldots$$

comprese tra

$$-M_1' \text{ e } M_1'$$

con

$$M' \leq M_1' < Q_0 .$$

Le $Z_0 - M_1$ e $Q_0 - M_1'$ saranno così maggiori di una determinata quantità maggiore di zero.

4. Consideriamo poi l'altra successione

$$\varphi_0(y)\,,\ \varphi_0(y) + (x_1 - x_0)\,\varphi_1(y)\,,\ \varphi_0(y) + (x_1 - x_0)\,\varphi_1(y) + (x_2 - x_1)\,\varphi_2(y)\,, \ldots$$

che indicheremo con

$$\varphi_0(y)\,,\ \psi_1(y)\,,\ \psi_2(y)\,, \ldots$$

Queste saranno contenute dentro i limiti $-Z_0$ e Z_0 e le rispettive derivate dentro i limiti $-Q_0$ e Q_0, se si prenderà $X_0 - x_0$ al più eguale al minore dei due numeri

$$\frac{Z_0 - M}{Z_0}\,,\ \frac{Q_0 - M'}{Q_0}\,.$$

I rapporti incrementali delle $\psi_s'(y)$ saranno sempre compresi tra

$$-L(1 + X_0 - x_0) \text{ e } L(1 + X_0 - x_0),$$

dove $X_0 - x_0$ ha il valore ora detto, e con ciò le $\psi_s'(y)$ saranno tutte egualmente continue.

Mediante rette

$$x = x_0\,,\ x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_n$$
$$y = y_0\,,\ y_1\,,\ y_2\,, \ldots y_m$$

si divida il campo delle $(x\,,y)$ in mn rettangoli. Si consideri la striscia tra la $x = x_0$ e la $x = x_1$.

Sopra la curva iniziale $x = x_0\,,\ z = \varphi_0(y)$ si segnino i punti le cui coordinate sono

$$\begin{array}{l} x_0\,,\ y_0\,,\ z_{0,0} = \varphi_0(y_0) \\ x_0\,,\ y_1\,,\ z_{0,1} = \varphi_0(y_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_0\,,\ y_{m-1}\,,\ z_{0,m-1} = \varphi_0(y_{m-1}) \end{array}$$

e si immaginino i piani

$$\begin{array}{l} Z - \varphi_0(y_0) = (X - x_0)\,p_{0,0} + (Y - y_0)\,q_{0,0} \\ Z - \varphi_0(y_1) = (X - x_0)\,p_{0,1} + (Y - y_0)\,q_{0,1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Z - \varphi_0(y_{m-1}) = (X - x_0)\,p_{0,m-1} + (Y - y_0)\,q_{0,m-1} \end{array}$$

dove è

$$q_{0,0} = \varphi_0'(y_0)\,,\ q_{0,1} = \varphi_0'(y_1)\,, \ldots \varphi_{0,m-1} = \varphi_0'(y_{m-1})$$
$$p_{0,0} = f(x_0\,y_0\,,\varphi_0(y_0)\,,\varphi_0'(y_0))\,, \ldots p_{0,m-1} = f(x_0\,,y_{m-1}\,,\varphi_0(y_{m-1})\,\varphi_0'(y_{m-1})$$

e sopra ciascuno di questi piani si consideri il rettangolo che ha per proiezione nel piano (x, y) il rettangolo avente per vertice inferiore sulla $x = x_0$, il punto (x_0, y_0), o il punto $(x_0\, y_1)$, ... o il punto $(x_0\, y_{m-1})$ rispetivamente.

Si costruisce a questo modo una superficie composta di m rettangoli giacenti in piani tangenti alla curva iniziale nei varî punti dianzi segnati: superficie in generale discontinua nel passaggio da un piano all'altro. Essa, quando si consideri come sua ordinata z quella che corrisponde al lato inferiore $y = \text{cost}$ dei rettangoli che la costituiscono, ammette sempre la derivata a destra in x, e ammette anche quella in y superiore.

Inoltre se con $\Sigma_{m,n}$, $D_x^+ \Sigma_{m,n}$, $D_y^+ \Sigma_{m,n}$ si indicano la funzione costruita e le derivate a destra rispettive in x e in y, si ha verificata l'equazione

$$D_x^+ \Sigma_{m,n} = f(x, y, \Sigma_{m,n}\, D_y^+ \Sigma_{m,n})$$

in ogni vertice inferiore sinistro.

Si consideri poscia la striscia fra le rette $x = x_1$, $x = x_2$: assumendo qui la curva $x = x_1$, $z = \psi_1(y)$ come curva iniziale e operando come dianzi, si costruisce una seconda superficie avente per proiezione nel piano (x, y), quella striscia.

Si prosegua analogamente colla $x = x_2$, $z = \psi_2(y)$, ecc.

Sopra il dominio

$$x_0 \leq x \leq X_0$$
$$y_0 \leq y \leq Y_0$$

si avrà costruita una superficie discontinua, a derivate in x e in y a destra pure discontinue e che verifica l'equazione proposta in ogni vertice inferiore sinistro degli mn rettangoli, in cui è decomposto il dominio anzidetto [1].

Si determini l'oscillazione rispettiva delle

$$\Sigma_{m,n}, D_x^+ \Sigma_{m,n}, D_y^+ \varepsilon_{m,n}$$

in una parte c del campo; si vede che considerando ad es. le successioni

$$\Sigma_{2,2}, \Sigma_{4,4}, \Sigma_{8,8}, \ldots$$
$$D_x^+ \Sigma_{2,2}, D_x^+ \Sigma_{4,4}, \ldots$$
$$D_y^+ \Sigma_{2,2}, D_y^+ \Sigma_{4,4}, \ldots$$

è, per ognuna, sodisfatta la condizione della proposizione 2ª del § 2.

Esiste dunque, per ognuna, una funzione limite continua, a cui essa, o una successione estratta da essa, converge in eguale grado.

Siano

$$\Sigma_0(x, y), \quad \Sigma_0^{(x)}(x, y), \quad \Sigma_0^{(y)}(x, y)$$

queste funzioni limiti continue.

[1] Sulle rette $x = x_s$ si considererà come valore z della $\Sigma_{m,n}$ quello che corrisponde al lato sinistro dei singoli rettangoli formanti la $\Sigma_{m,n}$: sulle $y = Y_r$, il z corrispondente al lato inferiore: eccettuate le $x = X_0$, $y = Y_0$.

Le $\Sigma_0^x(x, y)$, $\Sigma_0^y(x, y)$ sono, per note proposizioni, le derivate continue in x e in y della $\Sigma_0(x, y)$; inoltre per la proposizione 3ª (§ 2), è in ogni punto (x, y)

$$\frac{\partial \Sigma_0(x, y)}{\partial x} = f\left(x, y, \Sigma_0(x, y), \frac{\partial \Sigma_0(x, y)}{\partial y}\right).$$

Così rimane provato, quanto ci eravamo proposto.

Di funzioni, come la $\Sigma_0(x, y)$, ve ne possono essere più di una; anzi, se ve ne sono due, ve ne sono sicuramente infinite.

Vedremo poi la condizione qer l'unicità.

Geologia. — *Sull'esistenza dell'Eocene nella Penisola Salentina.* Nota del Corrispondente G. Di-Stefano.

L'esistenza dell'Eocene in provincia di Lecce è stata indicata dal professor C. De Giorgi in vari lavori (1) e dalle carte dell'Ufficio geologico. Questa formazione, una volta creduta discretamente estesa, fu poi nella Carta ristretta in minori confini; infatti su quella al 100000, pubblicata nel 1904 dal sovraddetto Ufficio, si trova segnata sui fogli 214, 215 e 213 solo dalla Punta Macurune fin presso Vitigliano; nei dintorni del Capo di Otranto, cioè dalla Masseria La Caprara fino al nord della regione Torre Specchia la Guardia; dal Porto di Castro fin presso quello di Tricase e dal sud di Gagliano del Capo fino al Faro di S. Maria di Leuca. Però nel 1903 il De Giorgi (2) si ricredette, scrivendo che le sue precedenti affermazioni sull'esistenza dell'Eocene in Terra d'Otranto erano solo fondate sul carattere litologico.

L'anno scorso il dott. G. Dainelli, che nelle sue escursioni del 1900 (3) non aveva trovato nummuliti nella parte meridionale del Capo di Leuca, facendo suo pro' di un interrogativo messo sulla Carta dell'Ufficio geologico per un eccesso di scrupolo, quando il materiale raccolto non era ancora studiato, negò (4) l'esistenza dell'Eocene nella regione litorale al Sud di Gagliano; anzi, fondandosi sul ritrovamento di alcune rudiste fatto dal sig. E. Bercigli al castello di Castro, si credette autorizzato di poter conchiudere troppo presto con le seguenti parole: *Ed ultima conseguenza infine si è la lecita suppo-*

(1) De Giorgi C., *Note geologiche sulla provincia di Lecce*, 1876; *Note statigrafiche e geologiche da Fasano a Otranto.* Bull. d. Com. geol., 1881; *Cenni di geografia fisica della provincia di Lecce*, 1884; *Geografia fisica e descrittiva della prov. di Lecce*, 1897.

(2) De Giorgi C., *Serie geologica dei terreni nella Penisola Salentina.* Mem. d. pont. Acc. d. Nuovi Lincei, XX, 1903.

(3) Dainelli G., *Appunti geologici sulla parte meridionale del Capo di Leuca.* Boll. d. Soc. geol. ital., XX, 1901.

(4) Dainelli G., *Vaccinites* (*Pironaea*) *polystylus* Pirona *nel Cretaceo del Capo di Leuca.* Boll. d. Soc. geol. ital., XXIV, 1905.

sizione che anche i lembi ad Orbitoides di Tricase (da me citato come eocenico sulla fede del De Giorgi) e di Otranto appartengano, come gli altri di Gagliano e di Castro, al Dordoniano, anzichè all'Eocene e che il Nummulitico non si debba trovare nelle colline di Puglia a mezzogiorno del Gargano. Così, secondo il Dainelli, l'Eocene dovrebbe scancellarsi dalle carte geologiche della Penisola Salentina.

La presente Nota è scritta per dimostrare che questo sarebbe un errore, e non perchè il Dainelli mi abbia tratto nella controversia per via di una conversazione che egli ebbe con me parecchi anni fa, nella quale esattamente affermai che nella regione del Capo di Leuca ci sono dei calcari con nummuliti macroscopiche. Finora non ho avuto modo di tornare ad occuparmi di quella importante questione, tanto più che il materiale raccolto dall'ing. L. Baldacci, dall'aiutante-ingegnere sig. M. Cassetti e in parte da me stesso, non era più a mia disposizione. Avendolo potuto ora studiare, grazie alla cortesia dei capi dell'Ufficio geologico, mi trovo in condizioni di poter riconfermare l'esistenza dell'Eocene nella provincia di Lecce.

Il materiale da me esaminato porta, nei vari esemplari, le seguenti indicazioni di provenienza: Regione a S-S-E. della stazione telegrafica di Gagliano — Presso la Torre del Mito, sotto il Miocene, tra il Porto di Tricase e quello di Castro — Masseria La Pezza presso Porto Badisco (a S-O. del Capo d'Otranto) — Torre S. Emiliano (a S-O. del Capo d'Otranto) — Masseria La Caprara (a N-O. del Capo d'Otranto).

Si tratta di molti pezzi di calcare bianco, biancastro, in qualche caso tendente al gialliccio, per lo più tenace, ma non di raro grossolano e facilmente disgregabile. Tra l'un tipo e l'altro avvengono dei passaggi. I campioni di calcare raccolti a S-S-E. della stazione telegrafica di Gagliano, sono spesso a grana fina e molto tenaci. Frequentemente questi non fanno osservare fossili; ma pure ce ne sono nei quali si vedono vari esemplari macroscopici di nummuliti, assiline ed alveoline, appartenenti a poche specie. In quelli raccolti presso la Torre del Mito, tra Castro e Tricase, vi è un maggior numero di foraminiferi macroscopici e molti microscopici. Vi si osservano a occhio nudo nummuliti, belle opercoline, ortofragmine e lepidocicline, tutte indubbiamente associate. Questi generi abbondano nei calcari a N.O e a S.O del Capo d'Otranto. La lista di foraminiferi che riporto qui appresso mi pare abbastanza dimostrativa:

Alveolina elongata d'Orb. — A S-S-E. della stazione telegrafica di Gagliano.

Operculina granulosa Leym. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria la Pezza; Torre S. Emiliano; Masseria La Caprara.

Operculina ammonea Leym. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria La Pezza; Masseria La Caprara.

Nummulites (*Camerina*) *Molli* Lmk. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria La Pezza.

Nummulites (*Lenticulina*) *complanata* Lmk. (Un grosso frammento ben determinabile) — Fra Tricase e Castro.

Nummulites (*Lenticulina*) *Tchihatcheffi* d'Arch. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria La Pezza.

Nummulites (*Lenticulina*) *Guettardi* d'Arch. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Torre S. Emiliano; Masseria La Caprara.

Nummulites (*Lenticulina*) *curvispira* Mgh. — A S-S-E. della stazione telegrafica di Gagliano.

Assilina exponens Sow. sp. — A S-S-E. della stazione telegrafica di Gagliano.

Orthophragmina stellata d'Arch. sp. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria La Pezza.

Orthophragmina sp. — Masseria La Pezza.

Lepidocyclina sp. n. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria La Pezza; Torre S. Emiliano; Masseria La Caprara.

Lepidocyclina sp. n. — Presso la Torre del Mito, fra Tricase e Castro; Masseria La Pezza; Masseria La Caprara.

La fauna notata sopra è certamente eocenica; essa rappresenta il Luteziano de Lapparent (= Parisiano Mayer, non d'Orbigny).

Il Nummulitico dunque esiste nella Penisola Salentina e corrisponde litologicamente e paleontologicamente a quello del promontorio Gargano. Esso è rappresentato da ristretti lembi, che stanno sotto quella lumachella detta *Fragiuolo*, la cui età miocenica io *non supponevo*, ma conoscevo assai bene sin dal 1891, quando il Cassetti ne portò all'Ufficio Geologico i molti fossili.

La lista di foraminiferi dei calcari bianchi eocenici sarà certamente accresciuta, sia disgregando altri dei pezzi di calcare raccolti, che facendo ancora ricerche sui luoghi; del resto io non ho citato varie nummuliti che sembrano nuove. Ho riportato, sebbene corrispondano a specie indescritte, le *Lepidocyclina*, perchè la loro associazione con nummuliti eoceniche e con ortofragmine è importante. Questo fatto dimostra ancora una volta che il genere *Lepidocyclina*, rappresentato qui da molti e belli esemplari, non è caratteristico di strati più elevati dell'Eocene. Riconosco la necessità che i foraminiferi eocenici della prov. di Lecce siano illustrati, e questo sarà fatto o da me stesso, o da qualcuno degli assistenti al Museo geologico dell'Università di Palermo.

Le rudiste trovate dal sig. Bercigli al castello di Castro indicano, se sono in posto, che il lembo di Cretaceo superiore segnato sulla Carta dell'Ufficio geologico al nord della Punta Macurune, deve estendersi un po' più a Sud; ma da questo non potrà dedursene che il Nummulitico manchi del tutto nella Penisola Salentina, perchè il materiale da me studiato prova il contrario. Salvo qualche eventuale modificazione di limiti, i rilevatori della Carta geologica hanno fatto cosa esatta indicando l'Eocene in quella regione.

Chimica. — *Sopra gli azossicomposti.* Nota del Corrispondente A. Angeli e di G. Marchetti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sull' integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi.* Nota del prof. G. Lauricella, presentata dal Socio U. Dini.

In una Nota pubblicata negli *Annali di matematica* dello scorso anno, dimostrai l'esistenza degli integrali delle equazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta^2 u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \\ \Delta^2 v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \\ \Delta^2 w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

per dati spostamenti nei punti della superficie σ di un corpo elastico S e per $k > 0$. Una nuova dimostrazione è stata recentemente tracciata dal ch. prof. A. Korn [1], il quale non conosceva ancora il mio risultato. Qui voglio esporre un'altra dimostrazione, la quale si basa sui noti risultati del sig. Fredholm relativi alle equazioni funzionali [2] e vale certamente nell'ipotesi che le componenti degli spostamenti dei punti di σ, arbitrariamente date, siano finite e continue [3], che sia $k > -\frac{2}{3}$ e che la superficie σ soddisfi alle seguenti condizioni generali:

1° in ogni suo punto abbia il piano tangente determinato e variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2° esista una lunghezza l tale che, preso un punto p_0 qualsiasi di σ e considerato il cilindro circolare avente per asse la normale n_0 a σ in p_0 e per raggio l, la porzione di superficie σ interna a questo cilindro sia incontrata in un solo punto al più dalle parallele ad n_0;

(1) Comptes Rendus; N. 6 (5 Février 1906). *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, ...*

(2) Acta mathematica, tome 27.

(3) L'ipotesi che fa in proposito il prof. Korn è assai più restrittiva.

3° esista un numero positivo a tale che, chiamando r_0 la distanza di p_0 da un altro punto p' qualsiasi di σ ed n la normale in p', si abbia [1]:

$$\widehat{nn_0} < ar_0 .$$

Le precedenti condizioni geometriche sono certamente soddisfatte per tutte le superficie a curvatura finita.

1. Dalle equazioni (1) si ha, integrando per parti,

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = \int_S \left\{ u\left(\Delta^2 u + k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + v\left(\Delta^2 v + k\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) + \cdots \right\} dS = - \\ = -\int_S \left\{ \Delta u + \Delta v + \Delta w + k\theta^2 + \frac{2k}{2+k}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} dS - \int_\sigma \left\{ u\left[\frac{\partial u}{\partial n} + k\theta\cos nx + \right.\right. \\ \left. + \frac{k}{2+k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos ny + \frac{\partial w}{\partial x}\cos nz - \frac{\partial v}{\partial y}\cos nx - \frac{\partial w}{\partial z}\cos nx\right)\right] + \\ \left. + v[\ldots\ldots] + w[\ldots\ldots]\right\} d\sigma . \end{cases}$$

Si può scrivere poi:

$$(3)\quad \begin{cases} \int_S \left\{ \Delta u + \Delta v + \Delta w + k\theta^2 + \frac{2k}{2+k}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \cdots - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} dS = \\ = \int_S \left\{ \frac{2}{2+k}(\Delta u + \Delta v + \Delta w) + k\frac{1+k}{2+k}\theta^2 + \frac{k}{2+k}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \right.\right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{2k}{2+k}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \right. \\ \left.\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]\right\} dS = \\ = \int_S \left\{ \frac{(1+k)(2+3k)}{2+k}(\Delta u + \Delta v + \Delta w) - \frac{k}{2+k}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \right.\right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] - k\frac{1+k}{2+k}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \cdots\right] - \\ \left. - 3k\frac{1+k}{2+k}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \cdots\right]\right\} dS . \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} X_\sigma = \frac{\partial u}{\partial n} + k\theta\cos nx + \frac{k}{2+k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos ny + \cdots - \frac{\partial w}{\partial z}\cos nx\right) = \\ = \left\{(1+k)\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{1+k}{2+k}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}\cos nx + \\ + \left\{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k}{2+k}\frac{\partial v}{\partial x}\right\}\cos ny + \left\{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{k}{2+k}\frac{\partial w}{\partial x}\right\}\cos nz , \\ Y_\sigma = \ldots\ldots , \quad Z_\sigma = \ldots\ldots \end{cases}$$

[1] $\widehat{nn_0}$ indica l'angolo formato dalle normali n, n_0 nelle direzioni che entrano in S.

Supponiamo che gl'integrali delle (1) si annullino nei punti di σ. Si avrà dalle (2), (3) per $k > -\frac{2}{3}$:

$$\text{(in tutto S)} \qquad u = v = w = 0 .$$

Supponiamo che u, v, w siano integrali delle (1) nello spazio indefinito S' limitato da σ, che a distanza infinita queste funzioni si annullino come l'inversa della distanza di un punto fisso dal punto variabile (x, y, z) e le loro derivate prime come il quadrato di questa inversa, e che nei punti di σ si abbia:

$$X_\sigma = Y_\sigma = Z_\sigma = 0 .$$

Dalle (2), (3), scritte per lo spazio S', risulta anche qui per $k > -\frac{2}{3}$:

$$\text{(in tutto S')} \qquad u = v = w = 0 .$$

2. Poniamo:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} ,$$

$$u' = \frac{1}{r} - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} , \quad v' = -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial y} , \quad w' = -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial z}$$

Le funzioni u', v', w' sono integrali delle equazioni (1), sia che si considerino come funzioni di x, y, z, sia che si considerino come funzioni di ξ, η, ζ. Se si considerano come funzioni di ξ, η, ζ, si ha per le corrispondenti espressioni (4):

$$(5) \qquad X'_\sigma = \frac{2}{2+k} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} + \frac{3k}{2+k} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} , \quad Y'_\sigma = \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} , \ldots .$$

Similmente poniamo:

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} u'' = -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial y \, \partial x} , \; v'' = \frac{1}{r} - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} , \; w'' = -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r}{\partial y \, \partial z} ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

e indichiamo con $X''_\sigma, Y''_\sigma, Z''_\sigma$; $X'''_\sigma, Y'''_\sigma, Z'''_\sigma$ le corrispondenti espressioni (4).

Considerazioni notorie ci dànno per un sistema qualsiasi di integrali delle (1):

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma (X'_\sigma u + Y'_\sigma v + Z'_\sigma w - X_\sigma u' - Y_\sigma v' - Z_\sigma w') \, d\sigma ,$$

$$v(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma (X''_\sigma u + Y''_\sigma v + Z''_\sigma w - X_\sigma u'' - Y_\sigma v'' - Z_\sigma w'') \, d\sigma ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Indipendentemente dalle precedenti formole, consideriamo le tre espressioni:

$$(7)\quad \begin{cases} \Phi(x, y, z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma (X'_\sigma u + Y'_\sigma v + Z'_\sigma w)\, d\sigma\,, \\ \Psi(x, y, z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma (X''_\sigma u + Y''_\sigma v + Z''_\sigma w)\, d\sigma\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{cases}$$

nelle quali *le funzioni* u, v, w *dei punti di* σ *sono arbitrarie ed assoggettate alla sola condizione di essere finite e continue.*

Osservando che le funzioni $X'_\sigma, Y'_\sigma, Z'_\sigma$; $X''_\sigma, \ldots$; $X'''_\sigma, \ldots$ sono formate dal prodotto di una funzione sempre finita per $\dfrac{d\frac{1}{r}}{dn}$, risulta facilmente [1] che *le espressioni* Φ, Ψ, X *hanno un significato e sono finite anche quando il punto* (x, y, z) *si trova su* σ.

Se indichiamo poi con p_0 un punto di σ, con $p \equiv (x, y, z)$ un punto di S e con $p' \equiv (x, y, z)$ un punto dello spazio indefinito S', si avranno le formole [2]:

$$(8)\quad \begin{cases} \lim\limits_{p=p_0} \Phi(x, y, z) = u(p_0) + \Phi(p_0)\,, \quad \lim\limits_{p=p_0} \Psi(x, y, z) = v(p_0) + \Psi(p_0)\,, \ldots \\ \lim\limits_{p'=p_0} \Phi(x, y, z) = -u(p_0) + \Phi(p_0)\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Supponiamo ora che *le funzioni* u, v, w *dei punti di* σ *ammettano le derivate tangenziali dei primi due ordini finite e continue su tutta la superficie* σ. Indichiamo con n_0 la normale in un punto qualsiasi $p_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ di σ, e poniamo:

$$(9)\quad \begin{cases} P(x, y, z)_0 = \left\{(1+k)\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + k\dfrac{1+k}{2+k}\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} + \dfrac{\partial X}{\partial z}\right)\right\}\cos n_0 x + \\ \qquad + \left\{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + \dfrac{k}{2+k}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\right\}\cos n_0 y + \left\{\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} + \dfrac{k}{2+k}\dfrac{\partial X}{\partial x}\right\}\cos n_0 z\,, \\ Q(x, y, z)_0 = \left\{(1+k)\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} + k\dfrac{1+k}{2+k}\left(\dfrac{\partial X}{\partial z} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right\}\cos n_0 y + \cdots\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Servendosi delle ipotesi fatte sulla natura della superficie σ e sulla natura delle funzioni u, v, w dei punti di σ, si dimostra la seguente propo-

[1] Cfr. per i particolari il caso di due variabili discusso nella mia Memoria: *Sull'integrazione della equazione doppia di Laplace per le aree piane,* che sarà prossimamente pubblicata negli Annali di Matematica.

[2] Cfr. loc. cit., for. (10), cap. II.

sizione [1]: *le espressioni* $P(x, y, z)_0$, $Q(x, y, z)_0$, $R(x, y, z)_0$ *ammettono limiti determinati e finiti, quando il punto* $p \equiv (x, y, z)$ *dell'interno di* S (*o il punto* $p' \equiv (x, y, z)$ *di* S'), *mantenendosi sempre discosto da* σ, *si avvicina indefinitamente al punto* $p_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, *e tali limiti soddisfanno alle condizioni*:

$$(10) \quad \lim_{p=p_0} P(x, y, z)_0 = \lim_{p'=p_0} P(x, y, z)_0 \ , \ \lim_{p=p_0} Q(x, y, z)_0 = \lim_{p'=p_0} Q(x, y, z)_0, \ldots$$

Finalmente, *ammessa la sola continuità delle funzioni* u, v, w *dei punti di* σ, si può dimostrare che [2], *se sono determinati e finiti*:

$$\lim_{p=p_0} P(x, y, z)_0 \ , \ \lim_{p=p_0} Q(x, y, z)_0 \ , \ \lim_{p=p_0} R(x, y, z)_0 ,$$

saranno ancora determinati e finiti:

$$\lim_{p'=p_0} P(x, y, z)_0 \ , \ \lim_{p'=p_0} Q(x, y, z)_0 \ , \ \lim_{p'=p_0} R(x, y, z)_0$$

e sussisteranno le (10); *e viceversa.*

Le proposizioni precedenti sono la naturale estensione agli integrali (7) delle note proprietà dei *doppi strati.*

4. In forza delle condizioni poste per la superficie σ, le coordinate x, y, z dei suoi punti si possono considerare come funzioni finite e continue, insieme alle loro derivate prime, dei parametri α, β di un sistema di coordinate curvilinee su σ; sicchè le funzioni (5), quando il punto (x, y, z) è nel punto (α_0, β_0) di σ e il punto $(\xi, \eta, \zeta) \equiv (\alpha, \beta)$ varia su σ, sono finite e continue rispetto ad α, β ed hanno solo un polo, del primo ordine rispetto ad $\frac{1}{r}$, per $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$. Indichiamo queste funzioni rispettivamente con $X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)$, $Y'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)$, $Z'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)$, e con $X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)$,...; $X'''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)$, ... le funzioni analoghe corrispondenti alle (6).

Siano $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ *tre funzioni finite e continue dei punti di* σ, *date arbitrariamente.* Si considerino le equazioni funzionali:

$$(11) \quad \begin{cases} u(\alpha_0, \beta_0) = \varphi(\alpha_0, \beta_0) + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \{ X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \varphi(\alpha, \beta) + \\ \qquad + Y'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \psi(\alpha, \beta) + Z'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \chi(\alpha, \beta) \}\, d\sigma , \\ v(\alpha_0, \beta_0) = \psi(\alpha_0, \beta_0) + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \{ X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \varphi(\alpha, \beta) + \cdots \}\, d\sigma , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

con $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ funzioni incognite dei punti di σ.

[1] Cfr. mia cit. Mem. § 6. cap. II.
[2] Cfr. ibid.. § 7, cap. II.

In virtù dei risultati del sig. Fredholm [1] si ha che *o esistono terne di funzioni* $\varphi_1(\alpha, \beta), \psi_1(\alpha, \beta), \chi_1(\alpha, \beta)$, *finite e continue in tutti i punti di* σ *e non identicamente nulle, tali che si abbia per qualsiasi punto* $p_0 \equiv (\alpha_0, \beta_0)$:

$$(12)\quad \begin{cases} 0 = \varphi_1(\alpha_0, \beta_0) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \varphi_1(\alpha, \beta) + \\ \qquad\qquad + Y'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \psi_1(\alpha, \beta) + \cdots \}\, d\sigma, \\ 0 = \psi_1(\alpha_0, \beta_0) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots \}\, d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \end{cases}$$

oppure esiste una terna di funzioni finite e continue, che soddisfa alle equazioni (11).

Ora la prima ipotesi è da escludersi. Infatti si considerino le funzioni analoghe alle (7):

$$(13)\quad \begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma\, \varphi_1(\alpha, \beta) + Y'_\sigma\, \psi_1(\alpha, \beta) + Z'_\sigma\, \chi_1(\alpha, \beta)\}\, d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Esse soddisfanno alle equazioni (1). Si ha poi, in virtù delle (8) e delle (12),

$$\begin{cases} \lim\limits_{p=p_0} \Phi_1(x, y, z) = \varphi_1(\alpha_0, \beta_0) + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots \}\, d\sigma = 0, \\ \lim\limits_{p=p_0} \Psi_1(x, y, z) = \psi_1(\alpha_0, \beta_0) + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Abbiamo dunque, in virtù del primo dei risultati al § 1,

$$(\text{in tutto } S)\ \Phi_1(x, y, z) = \Psi_1(x, y, z) = X_1(x, y, z) = 0;$$

e per conseguenza le corrispondenti espressioni (9):

$$P_1(x, y, z)_0 \quad , \quad Q_1(x, y, z)_0 \quad , \quad R_1(x, y, z)_0,$$

qualunque sia il punto $p_0 \equiv (x_0, y_0, z_0) \equiv (\alpha_0, \beta_0)$ di σ, saranno nulle in tutti i punti (x, y, z) di S. Avremo quindi:

$$\lim_{p=p_0} P_1(x, y, z)_0 = \lim_{p=p_0} Q_1(x, y, z)_0 = \lim_{p=p_0} R_1(x, y, z)_0 = 0;$$

e, in virtù dell'ultimo risultato al § precedente,

$$\lim_{p'=p_0} P_1(x, y, z)_0 = \lim_{p'=p_0} Q_1(x, y, z)_0 = \lim_{p'=p_0} R_1(x, y, z)_0 = 0.$$

[1] Vedi loc. cit., § 2, n. 10; § 6, n. 16.

Queste espressioni rappresentano, a meno del segno, le funzioni $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$, corrispondenti agli integrali (13) delle equazioni (1), considerati come funzioni dei punti (x, y, z) del campo indefinito S'; per cui risulterà, in forza del secondo risultato al § 1,

$$\text{(in tutto S')} \qquad \Phi_1(x, y, z) = \Psi_1(x, y, z) = X_1(x, y, z) = 0 .$$

D'altra parte si ha dalle (8):

$$0 = \lim_{p'=p_0} \Phi_1(x, y, z) = -\varphi_1(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots\} d\sigma,$$

. . . . . ,

. . . . . ;

sicchè, tenendo conto delle (12), risulterà, come si voleva dimostrare,

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = \psi_1(\alpha, \beta) = \chi_1(\alpha, \beta) = 0 .$$

5. Dimostrata così l'esistenza delle funzioni $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$, che soddisfanno alle equazioni funzionali (11), si considerino le funzioni dei punti $p \equiv (x, y, z)$ del campo S:

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma\, \varphi(\alpha, \beta) + Y'_\sigma\, \psi(\alpha, \beta) + Z'_\sigma\, \chi(\alpha, \beta)\} d\sigma ,$$

. . . . . ,

. . . . . .

Esse soddisfanno alle equazioni (1) e ci dànno, in forza delle (8) e delle (11),

$$\lim_{p=p_0} u(x, y, z) = \varphi(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0)\, \varphi(\alpha, \beta) + \cdots\} d\sigma = u(\alpha_0, \beta_0),$$

$$\lim_{p=p_0} v(x, y, z) = v(\alpha_0, \beta_0) \quad , \quad \lim_{p=p_0} w(x, y, z) = w(\alpha_0, \beta_0) .$$

Adunque *le funzioni* $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ *dei punti di* S, *per* $k > -\frac{2}{3}$, *soddisfanno alle equazioni* (1) *e nei punti di* σ *prendono i valori arbitrariamente dati* $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$.

Matematica. — *Ricerche sulle funzioni derivate.* Nota di Beppo Levi, presentata dal Socio C. Segre.

Il sig. Lebesgue ha indicato a più riprese come la nozione dell'integrale generalizzato introdotta da lui, rendendo possibile l'integrazione di funzioni derivate che non lo sarebbero colla definizione del Riemann rende altresì possibile la risoluzione del problema delle funzioni primitive con generalità molto maggiore che precedentemente.

Il Lebesgue ha dato precisamente i due enunciati seguenti:

a) *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'integrale della derivata (limitata o non) di una funzione derivabile esista, è che la funzione sia a variazione limitata. In tal caso la funzione è un integrale indefinito della sua derivata* (1).

b) *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista l'integrale di uno dei numeri derivati d'una funzione (supposto finito) è che la funzione sia a variazione limitata. In tal caso l'integrale indefinito di quel numero derivato è la funzione primitiva* (2).

I due enunciati sono appena differenti in ciò che nel secondo non si suppone la derivabilità della funzione primitiva, ma si aggiunge una condizione nelle parole « supposto finito » che può esser dubbio se chieda o non la *limitazione* del numero derivato considerato. La costante differenza che il Lebesgue fa tra le parole « limitato » e « finito » (3) stabilirebbe fra i due enunciati la massima affinità: cionondimeno nella dimostrazione della seconda proposizione l'ipotesi della limitazione del numero derivato è essenziale.

Ma quanto massimamente importa qui di rilevare è che entrambe le dimostrazioni, quantunque fondate su principî diversi, sono in più punti manchevoli.

In questa prima Nota io mi propongo di portare a tali proposizioni una analisi più accurata, nell'indirizzo medesimo del Lebesgue: in Note successive, collo stesso titolo, darò, spero, qualche nuovo contributo allo studio delle proprietà delle funzioni derivate.

1. *I numeri derivati — superiori o inferiori, a destra o a sinistra —*

(1) Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire,* Annali di Mat. (3), 7, pag. 265, n. 30.

(2) Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* etc., Paris, Gauthier-Villars, 1904, pp. 122-3. Cfr. pure Ann. di Mat., loc. cit., pp. 272-274.

(3) Per cui una funzione può esser finita per ogni valore della variabile, ma non limitata in quando, per convenienti valori della variabile assuma valori grandi a piacere.

di una funzione continua $f(x)$ costituiscono una funzione di 2ª classe del Baire; quindi una funzione misurabile (¹).

Sia infatti $h_1 h_2 h_3 \ldots$ una successione di numeri positivi decrescenti tale che $\lim_{i=\infty} h_i = 0$.

Si chiami u_1 la funzione che, per ogni valore di x e uguale al massimo di $r[f(x), x, x+h]$ (²) per $h \geq h_1$, e per il valore fissato di x; u_2 la funzione che, per ogni valore di x, è uguale al massimo di $r[f(x), x, x+h]$ per $h_1 \geq h \geq h_2$; ...; u_i la funzione che, per ogni x, è uguale al massimo di $r[f(x), x, x+h]$ per $h_{i-1} \geq h \geq h_i$. Ogni funzione u_i è continua: sia infatti $u_i(x_1) = r[f(x_1), x_1, x_1+h']$, $u_i(x_2) = r[f(x_2), x_2, x_2+h'']$ (h' e h'' compresi fra h_{i-1} e h_i) e sia, per es. $u_i(x_1) \geq u_i(x_2)$: sarà $r[f(x_2), x_2+h'] \leq r[f(x_2), x_2, x_2+h''] = u_i(x_2)$; quindi $0 \leq u_i(x_1) - u_i(x_2) \leq u_i(x_1) - r[f(x_2), x_2, x_2+h']$. Ma $r[f(x), x, x+h']$ (per h' costante) è funzione continua di x; quindi esiste un ϱ' tale che, tosto che $|x_1 - x_2| \leq \varrho'$, l'ultimo membro è piccolo a piacere (minore di un ε assegnato); cosicchè, per ogni x tale che

$$u_i(x) \leq u_i(x_1), \; |x_1 - x| \leq \varrho', \text{ si ha } |u_i(x_1) - u_i(x)| < \varepsilon.$$

Del pari si mostrerà che esiste un ϱ'' tale che per ogni x per cui

$$u_i(x) \geq u_i(x_1), \; |x_1 - x| \leq \varrho'', \text{ si ha } |u_i(x_1) - u_i(x)| > \varepsilon.$$

Basterà allora che $|x_1 - x|$ sia minore del minimo fra ϱ' e ϱ'' perchè sia in ogni caso $|u_i(x_1) - u_i(x)| < \varepsilon$: onde la continuità di $u_i(x)$.

La funzione $\bar{u}(x)$ costituita dai numeri derivati superiori a destra di $f(x)$ assume, per ogni x, il valor limite per $h_i = 0$ (cioè per $i = \infty$) del limite superiore delle $u_j(x)$ per $j \geq i$. Essa può quindi definirsi come segue (³):

Si chiami $v_i^{(h)}(x)$ la funzione che, per ogni x, è uguale al massimo valore delle $u_h u_{h+1} \ldots u_{h+i-1}$; la funzione $v_i^{(h)}(x)$ è crescente (o almeno non decrescente) con i: si ponga $w^{(h)}(x) = \lim_{i=\infty} v_i^{(h)}(x)$; la funzione $w^{(h)}(x)$ è decrescente col tendere di h ad ∞, ed il suo limite è $\bar{u}(x)$; ora si vede

(¹) Cfr. Lebesgue, *Leçons*, pag. 121. Ann. di Mat., pag. 273. Le due dimostrazioni sono entrambe erronee, poichè in sostanza si ammette in entrambe (nella seconda in modo esplicito) che la funzione costituita dai numeri derivati si possa definire come la funzione dei limiti superiori od inferiori di $r[f(x), x, x \pm h]$ ove ad h si fa assumere una successione discreta di valori tendenti a 0, gli stessi per ogni x.

(²) Ove $r[f(x), x, x+h] = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

(³) Il procedimento qui indicato non differisce sostanzialmente da quello esposto dal Lebesgue nelle prime linee della pag. 121 delle *Leçons*. Nella forma precisa adottata dal Lebesgue il procedimento però non è esatto.

facilmente che le $v_i^{(h)}$ sono continue, come le u_i, le $w^{(h)}(x)$ sono dunque funzioni di 1ª classe del Baire [1] e quindi $\overline{u}(x)$ è funzione di 2ª classe.

Analogamente si ragiona per le altre funzioni di numeri derivati.

2. Ciò posto, si può dimostrare che, *se la funzione $\overline{u}(x)$ dei numeri derivati superiori a destra* (e lo stesso sarebbe per ogni altra funzione di numeri derivati) *della funzione $f(x)$ è limitata* [2] (nel qual caso, a causa della sua misurabilità, è certo integrabile [3]) *in un intervallo $a \ldots b$, l'integrale di essa esteso a questo intervallo è uguale all'incremento della $f(x)$ in esso.*

Sia infatti, per ogni x in $a \ldots b$, $L \geq \overline{u}(x) \geq l$; si può sempre supporre che L e l siano entrambi positivi, poichè nella contraria ipotesi, basterà considerare, in luogo della $f(x)$, $f(x) + mx$ la cui derivata superiore a destra è $\overline{u}(x) + m$ ed è quindi costantemente positiva ove si scelga m sufficientemente grande. Si divida l'intervallo $L \ldots l$ in intervalli parziali di ampiezza $\leq \varepsilon$ mediante i numeri $l_i (l_1 = l, 0 < l_{n+1} - l_n \leq \varepsilon)$ e si chiami e_n l'aggregato degli x per cui $l_{n+1} > \overline{u}(x) \geq l_n$. Esso potrà rinchiudersi in un aggregato numerabile A_n di segmenti, uno generico dei quali indicheremo con A_{np}, e si potrà fare in modo che la misura totale di A_n differisca dalla misura di e_n per meno di un η_n arbitrariamente assegnato: cosicchè dette $m(e_n)$ e $m(A_n)$ le misure di e_n e di A_n,

$$0 < m(A_n) - m(e_n) < \eta_n .$$

Disporremo in seguito del numero η_n convenientemente.

Ad ogni punto x di $a \ldots b$ risultano così affissi due numeri n e p definiti l'uno dall'aggregato e_n, l'altro dal segmento A_{np} cui il punto appartiene. A partire da a si ricopra allora l'intervallo $a \ldots b$ mediante una serie di segmenti [4] $x \ldots x + h$ tali che il primo estremo x di ciascuno di essi coincida col secondo estremo del segmento precedente, ovvero — qualora tal punto x non sia raggiunto mediante un numero finito di segmenti precedenti — sia il limite a destra dei secondi estremi dei segmenti precedenti; tali inoltre che, detti n e p i numeri affissi ad x, il segmento $x \ldots x + h$ sia interamente contenuto in A_{np} e si abbia

$$l_n - \varepsilon \leq r[f(x), x, x + h] \leq l_n + \varepsilon .$$

[1] Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, Thèse, Annali di Matematica 1904. Cfr. pure Lebesgue, *Leçons*, pag. 111.

[2] Vale a dire non superi mai, in valore assoluto, un limite assegnato.

[3] Non sempre una funzione derivata è integrabile nel senso del Lebesgue (Cfr. Lebesgue, Annali di Mat. (3) pag. 269-270); però ogni funzione misurabile limitata è integrabile (Cfr. Lebesgue, *Leçons*, pag. 115). Si noti ancora che la condizione che $\overline{u}(x)$ sia limitata ha nel seguito ufficio essenziale per sè, e non solo come condizione d'integrabilità. Di tale ufficio non pare avvedersi il Lebesgue nella sua dimostrazione analoga alla presente, poichè tal condizione egli sopprime nell'enunciato delle pp. 122-123.

[4] Cfr. per questo procedimento, Lebesgue, *Leçons*, pag. 163.

Si chiami B_n l'aggregato di tali segmenti corrispondenti all'indice n, $m(B_n)$ la sua misura. B_n sarà contenuto in A_n; quindi $m(B_n) \leq m(A_n)$. Inoltre, se sempre x, $x+h$ sono gli estremi di un segmento della serie appartenente all'indice n,

$$(l_n - \varepsilon)\, h \leq f(x+h) - f(x) \leq (l_n + \varepsilon)\, h$$

onde

$$\sum l_n h - \varepsilon(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \sum l_n h + \varepsilon(b-a)$$

le sommatorie essendo estese a tutti i segmenti della serie. Queste sommatorie rappresentano quindi una serie che può essere multipla, anche ∞-pla; ma poichè si son supposti tutti gli l_n positivi, tal serie consta di soli termini positivi, ed è quindi ordinabile, in modo che si potranno raccogliere a gruppi i termini corrispondenti allo stesso indice n. La relazione precedente prende allora la forma

$$(1) \quad \sum_n l_n m(B_n) - \varepsilon(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \sum_n l_n m(B_n) + \varepsilon(b-a).$$

D'altra parte si ha

$$0 \leq m(A_n) - m(B_n) \leq \sum_n [m(A_n) - m(B_n)] = \sum_n m(A_n) - \sum_n m(B_n)$$

$$\sum_n m(B_n) = b - a = \sum_n m(e_n)$$

onde

$$m(A_n) - m(B_n) \leq \sum_n m(A_n) - \sum_n m(e_n) < \sum_n \eta_n$$

e infine

$$0 \leq \sum_n l_n\, m(A_n) - \sum_n l_n\, m(B_n) = \sum_n l_n [m(A_n) - m(B_n)] < \sum_n l_n \cdot \sum_n \eta_n .$$

Parimenti, collo stesso calcolo, si ha

$$0 \leq \sum_n l_n\, m(A_n) - \sum_n l_n\, m(e_n) < \sum_n l_n \sum_n \eta_n ;$$

onde infine ancora

$$\left| \sum_n l_n\, m(e_n) - \sum_n l_n\, m(B_n) \right| = \left| \left\{ \sum l_n\, m(A_n) - \sum l_n\, m(B_n) \right\} - \right.$$

$$\left. - \left\{ \sum l_n\, m(A_n) - \sum l_n\, m(e_n) \right\} \right| < \sum_n l_n \sum_n \eta_n \leq \frac{1}{2}(L+l)\, \frac{L-l}{\varepsilon} \sum_n \eta_n .$$

La scelta degli η_n resta ancora arbitraria: noi la supporremo fatta in modo che

$$\sum_n \eta_n \leq \varepsilon^2 \frac{2}{L^2 - l^2} .$$

Sarà allora

$$\left|\sum_n l_n\, m(e_n) - \sum_n l_n\, m(\mathrm{B}_n)\right| \leq \varepsilon$$

e quindi, per la (1),

$$\left|\sum_n l_n\, m(e_n) - [f(b) - f(a)]\right| \leq \left|\sum_n l_n\, m(\mathrm{B}_n) - [f(b) - f(a)]\right| + \varepsilon$$

$$\leq \varepsilon(b - a + 1).$$

Si faccia ora tendere ε a 0, e di conseguenza crescere n indefinitamente; si avrà, al limite,

$$\int_a^b \overline{u}(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

3. Il ragionamento si può ripetere per le altre funzioni di numeri derivati. D'altronde se $\underline{u}(x)$ si chiama la funzione dei numeri derivati inferiori a destra di $f(x)$, $-\underline{u}(x)$ è la funzione dei numeri derivati superiori a destra di $-f(x)$, cosicchè, applicando senz'altro alla $-f(x)$ la precedente proposizione,

$$\int_a^b -\underline{u}(x)\, dx = -f(b) + f(a)$$

ossia

$$\int_a^b \underline{u}(x)\, dx = \int_a^b \overline{u}(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

onde

$$\int_a^b [\overline{u}(x) - \underline{u}(x)]\, dx = 0.$$

Siccome la funzione $\overline{u}(x) - \underline{u}(x)$ non è mai negativa, segue tosto che essa è ovunque nulla, tolto al più un aggregato di punti di misura nulla [1].

Applicando ancora il teorema alla funzione $-f(-x)$ che ha per numeri derivati a destra i numeri derivati a sinistra di $f(x)$ si riconosce infine che ha misura nulla l'aggregato dei punti in cui sono diversi i numeri derivati a destra e a sinistra [2] di $f(x)$, onde si conclude che:

La funzione continua $f(x)$ a numeri derivati limitati nell'intervallo $a \ldots b$ ha derivata in ogni punto dell'intervallo, fatta al più eccezione per un aggregato di misura nulla [3].

4. Si può però affermare di più, e con grande semplicità di mezzi, che *l'aggregato dei punti in cui, esistendo derivata così a destra come a sinistra le due derivate sono però diverse, è numerabile.* Si consideri infatti

[1] Cfr. Lebesgue, *Leçons*, pag. 123. L'osservazione che $\overline{u}(x) - \underline{u}(x) \geq 0$ è d'altronde superflua per questa conclusione come mostrò il Vitali, *Sulle funzioni ad integrale nullo* (Rend. del Circ. mat. di Palermo, XX-1905).

[2] Qui occorre precisamente ricorrere alla proposizione del Vitali, ora citata.

[3] Cfr. Lebesgue, *Leçons*, pp. 123-125, dove però la dimostrazione è assai più laboriosa.

la funzione $\varphi(x\,;m) = f(x) + mx$; ogni punto in cui esistono ma son diverse le derivate a destra e a sinistra di $f(x)$ gode della stessa proprietà rispetto a $\varphi(x\,;m)$. Orbene i punti in cui queste due derivate di $\varphi(x\,;m)$ sono di segno contrario sono per $\varphi(x\,;m)$ punti di massimo o di minimo proprio: questi punti formano quindi un aggregato numerabile [1]. Si considerino allora le funzioni $\varphi(x\,;m_1)$, $\varphi(x\,;m_2)$, ... per una serie di valori di m tali che $|m_i - m_{i+1}| \leq \varepsilon$; in ogni punto in cui le due derivate (a destra e a sinistra) differiscono per più di ε, una almeno di queste funzioni avrà le sue derivate di segno contrario; questi punti formano adunque un aggregato numerabile. Attribuendo allora a ε una successione di valori $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ ... tale che $\lim\limits_{i=\infty} \varepsilon_i = 0$, si ottiene infine la proposizione enunciata.

5. Conseguenza immediata della proposizione del n. 2 è che *l'integrale indefinito d'una funzione limitata misurabile ha in ogni punto, ad eccezione di quelli di un aggregato di misura nulla, derivata limitata ed uguale alla funzione integrando* [2].

Sia infatti $\varphi(x)$ la funzione che si integra, e sia, per ogni x in un intervallo $a \ldots b$ $\mathrm{M} \geq \varphi(x) \geq \mathrm{N}$; si ponga

$$f(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx \quad (a \leq x \leq b).$$

Si ha

$$r[f(x)\,,x\,,x+h] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi(x)\,dx$$

onde

$$\mathrm{M} \leq r[f(x)\,,x\,,x+h] \leq \mathrm{N}\,.$$

I numeri derivati di $f(x)$ sono dunque limitati; sia $u(x)$ una qualunque funzione dei numeri derivati di $f(x)$: pel teorema del n. 2 si ha quindi

$$f(x) = \int_a^x u(x)\,dx \quad (a \leq x \leq b)\,.$$

Segue che

$$\int_a^x [\varphi(x) - u(x)]\,dx = 0$$

onde, pel citato teorema del Vitali, le due funzioni $\varphi(x)$ ed $u(x)$ possono differire fra loro solo pei valori di x appartenenti a un aggregato di misura nulla.

[1] Schoenflies, *Bericht über Mengenlehre* (Jahresbericht d. D. Math.-Vereinigung 8-1900, pp. 157-158.

[2] In una Nota seguente dimostreremo che in questa proposizione è superflua la condizione che la funzione integrando sia limitata: si può anzi supporre che questa funzione possa anche assumere valori infiniti, purchè sia integrabile. Il Lebesgue, *Leçons*, pag. 124) afferma già questa proposizione in questa sua forma generalissima; ma la dimostrazione ch'egli ne dà non pare attendibile; quando infatti si ammette che la funzione integrando sia illimitata, il ragionamento della pag. 124 citata ammette implicitamente che una certa serie si possa derivare termine a termine del che manca la prova.

Matematica. — *Théorie et construction de tables permettant de trouver rapidement les facteurs premiers d'un nombre.* Nota di Ernest Lebon, presentata dal Socio V. Volterra.

En m'appuyant sur des propriétés non encore signalées de certaines progressions arithmétiques, je suis arrivé à construire des tables donnant *très rapidement* la solution du double problème suivant:

Un nombre étant donné, reconnaître s'il est premier ou composé, et, dans le second cas, trouver ses facteurs premiers.

Le procédé que j'emploie est applicable à de grands nombres.

Mon Mémoire sur ce sujet a été signalé à l'Académie des Sciences de Paris, dans la séance du 3 juillet 1905 [1].

1. Soient B le produit $\alpha\beta\ldots\lambda$ de nombres premiers consécutifs $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, à partir de 2; P le produit $(\alpha - 1)(\beta - 1)\ldots(\lambda - 1)$; I l'un quelconque des P nombres premiers à B et inférieurs à B; K un nombre successivement égal aux entiers positifs, à partir de 0.

On reconnaît aisément que: *Chacun des systèmes des* P *progressions arithmétiques de terme général* $BK + I$ *renferme tous les nombres premiers autres que ceux qui forment* B.

On peut dire que B est la *base* du système considéré et que I est l'*indicateur* d'un terme de ce système.

Deux indicateurs sont dits *complémentaires* lorsque leur somme est égale à la base.

2. Soient N, D et M des nombres d'un système de progressions de base B. Pour éviter l'ambigüité dans les explications, j'écrirai ainsi: $BK' + I'$ la forme du diviseur D.

Il est évident que *le nombre* N *est ou non divisible par le diviseur* D *selon que* K *et* M *sont ou non tels que l'équation*

$$(a) \qquad BK + I = MD$$

soit satisfaite, B, I *et* D *étant connus.*

3. Soient k et m les valeurs *minima* de K et M satisfaisant à l'équation (a) et n un nombre successivement égal aux entiers positifs, à partir de 0. L'égalité

$$K = k + nD$$

[1] Comptes Rendus, Tome CXLI, n. 1, Paris, 1905, in 4°, pag. 78.

donne la valeur de K à laquelle correspondent tous les nombres N divisibles par le diviseur D.

De cette égalité, on tire la formule

$$(1) \qquad n = \frac{K - k}{D},$$

où K est le quotient entier obtenu en divisant N par B; le reste de cette division est la valeur de I.

On voit que: *Selon que la valeur trouvée pour n, en appliquant la formule* (1), *est entière ou fractionnaire, le nombre* N *est ou non multiple du diviseur* D.

Donc *la Table des nombres k établie pour un système de base* B *permet de reconnaître si* N *est premier, en divisant* K *par les nombres premiers inférieurs à* $\sqrt{N}$, *à partir de* λ, *et, si* N *n'est pas premier, de trouver ses facteurs premiers.*

On conçoit que cette méthode est d'autant plus expéditive que la base B est plus grande.

Avant d'appliquer la formule (1), il ne faut pas oublier que, si l'on considère un nombre N′, on doit d'abord, pour avoir N, enlever de N′ les facteurs premiers de la base B.

4. J'appellerai *caractéristiques* les nombres k.

5. Pour trouver méthodiquement et rapidement les caractéristiques k qui correspondent aux P progressions arithmétiques d'un système de base B, on peut se servir de la formule suivante, obtenue après avoir remplacé, dans l'équation (a), K et M par k et m, D par sa forme:

$$(2) \qquad k = \frac{I'm - I}{B} + K'm.$$

La formule (2) donne la caractéristique k quand la valeur de m est telle que le binôme $I'm - I$ soit divisible par B.

6. Les trois théorèmes suivants, faciles à démontrer, permettent de réduire notablement les opérations pour le calcul des caractéristiques k.

I. *Au produit* $I'm$ *des deux indicateurs* I′ *et* m *correspondent un indicateur* I *et une caractéristique* k; *cette caractéristique* k *convient aux deux diviseurs* I′ *et* m *du nombre* $I'm$ *de la progression arithmétique de base* B *et d'indicateur* I *donné par ce produit.*

II. *Les* P *progressions arithmétiques d'un système de base* B *étant rangées dans l'ordre croissant des indicateurs* I *de leurs termes, la somme des deux caractéristiques* k *et celle des deux valeurs de* m, *relatives à*

un même diviseur D *et à deux progressions équidistantes des extrêmes, sont respectivement égales à* D — 1 *et à* B.

III. *Si les valeurs de* I, *de* k_1, *de* I′ *et de* m *sont telles que l'égalité*

$$Bk_1 + I = I'm$$

existe, et si l'on considère l'équation

$$Bk_{B-1} + (B - I) = (B - I')\,m,$$

où les deux indicateurs B — I *et* B — I′ *sont complémentaires des deux indicateurs* I *et* I′ *de l'égalité précédente, la caractéristique inconnue* k_{B-1} *est donnée par la formule*

$$k_{B-1} = m - 1 - k_1.$$

7. D'après les théorèmes II et III, il suffit, pour calculer le binôme $I'm - I$, d'associer à la première moitié des P valeurs de I′ la première moitié des P valeurs de m, rangées dans l'ordre croissant.

Le reste obtenu en divisant $I'm$ par B est l'indicateur I relatif à une progression du système de base B.

Quand K′ est nul, le premier terme de la formule (2) donne, dans chacune des P progressions du système de base B, les P caractéristiques k correspondant aux P valeurs de I′.

D'après le théorème I, comme les caractéristiques k correspondant à l'indicateur I sont les mêmes quand D égale soit I′, soit m, il suffit de commencer les produits $I'm$ à partir de la valeur de m égale à la valeur considérée de I′, c'est-à-dire au carré de I′. On sait que l'on applique le premier terme de la formule (2) seulement aux valeurs de m qui égalent les $\frac{P}{2}$ premiers indicateurs. D'ailleurs, aux produits de 1 par les indicateurs correspondent des caractéristiques k évidemment égales à 0. Par suite, parmi les P^2 caractéristiques k relatives aux P diviseurs qui égalent les indicateurs, il y a au plus $\frac{P(P-2)}{8}$ caractéristiques k dont la détermination exige une multiplication et une division.

8. La Table de caractéristiques k relatives à la base 30030, avec les diviseurs premiers de 17 à 30029 permet de résoudre le problème en question entre 1 et 30030^2 ou 901800900, c'est-à-dire pour des nombres beaucoup plus grands que le nombre 8999999 auquel s'arrêtent les Tables imprimées de facteurs premiers des nombres. Elle a de plus l'avantage de donner souvent plus d'un des facteurs premiers du nombre considéré, sans obliger à faire des divisions.

Soit N un nombre de la forme 30030K + I. Pour faire les essais, on s'arrêtera au diviseur premier D_n immédiatement inférieur à $\sqrt{N}$.

Si l'on ne trouve aucune différence $K - k$ divisible par les diviseurs premiers de 17 à D_n, N est premier.

Si l'on arrive à une différence $K - k$ divisible par le diviseur premier D, inférieur à D_n, N admet ce diviseur premier D. On divise N par D, le quotient obtenu par D, etc. Soit N_1 le dernier quotient ainsi obtenu: on opère avec N_1 comme on vient d'opérer avec N, en commençant par le diviseur premier qui suit D et on trouve que N_1 égale le produit de caractéristiques ou que N_1 est premier.

On reconnaît si une différence $K - k$ est divisible par le diviseur D correspondant le plus souvent sans effecteur la division par D de cette différence.

Pour reconnaître *instantanément* si une différence $K - k$ est divisible par le diviseur D correspondant, il suffit d'avoir, en même temps que la Table des caractéristiques relatives à la base 30030 jusqu'au diviseur 30029, une Table des restes R obtenus en divisant par les diviseurs D les nombres entiers consécutifs de 17 à 30029: en effet, une différence $K - k$ est divisible par le diviseur D correspondant, lorsque les valeurs de R et de k qui correspondent à ce diviseur sont égales.

La nouvelle Table occuperait une surface au moins 10 fois plus petite que celle qui serait occupée par les Tables qui existent et celles que l'on construirait jusqu'à 901 800 900, en adoptant l'ancienne disposition.

Fisica. — *Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore* [1]. Nota del dott. R. Magini, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

1. Nelle precedenti Note su questo stesso argomento ho esaminato le formole principali da usarsi per la correzione della capacità dipendentemente dalla perturbazione provocata dall'orlo nella distribuzione elettrica di un condensatore. In questa mi propongo di sviluppare un artificio, già indicato nel principio del presente lavoro, che potrà permettere di isolare e di mettere in maggiore evidenza l'influenza dell'orlo, specialmente nel caso in cui venga usato l'anello di guardia, che riduce quell'influenza così notevolmente da farla quasi scomparire di fronte alla capacità del condensatore e da impedire una verifica diretta e rigorosa. D'altra parte, mi sono anche proposto di darne una conferma sperimentale, e di fare un esame sommario delle formole studiate sin qui per tre soli valori della distanza, per vedere se esse sono delle semplici astrazioni o seppure trovano una qualche rispondenza sperimentale.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Pisa.

2. A tal fine ho usato due condensatori, uno circolare, l'altro ellittico, con o senza anelli di guardia, e d'area pressochè equivalente.

Il metodo seguito per le misure è puramente elettrostatico, limitandosi esso a determinare successivamente, mediante un elettrometro di Thomson-Mascart, la forza elettromotrice di quattro accumulatori ed i potenziali rispettivamente assunti da ciascun condensatore con e senza anello, quando si stabiliva la comunicazione tra la batteria ed un condensatore e poi tra questo e l'elettrometro.

Per evitare la dispersione è stato preferito tener conto della deviazione impulsiva dell'ago anzichè della definitiva, che si manteneva molto sensibilmente metà della prima, purchè venisse ridotto d'assai il sistema di smorzamento.

I condensatori furono ritagliati da una lastra di zinco tornita su ambe le faccie, e di cm. 0,5 di spessore; quello circolare fu ritagliato al tornio, quello ellittico con seghe da traforo, meglio che fu possibile. Gli anelli di guardia avevano lo stesso spessore ed una larghezza di cm. 9,2 per il circolare, e di cm. 8,5 per quello ellittico. Lo spazio d'aria (taglio) fra ciascun condensatore e ciascun anello fu, a montatura eseguita, sensibilmente di cm. 0,1.

La parte centrale del condensatore (collettore) fu fissata ad una robusta asta di vetro mediante una ghiera ingessata; l'asta di vetro era poi tenuta superiormente da un sostegno e poteva essere alzata ed abbassata per mezzo di una grossa vite micrometrica di cm. 0,1 di passo e con la testa divisa in 200 parti.

L'anello era sostenuto da cordoncini di seta raccomandati a varie viti e veniva, volta per volta, assai facilmente posto ad egual distanza dal collettore; e mediante un catetometro si procurava che le faccie inferiori dell'anello e del collettore fossero nello stesso piano ed inoltre parallele perfettamente alla faccia superiore del grande piatto legato alla terra, nonchè alla distanza desiderata da quest'ultimo.

L'ago dell' elettrometro era portato ad un determinato potenziale mediante una batteria di 200 piccoli accumulatori Planté ben isolati; una coppia di quadranti era tenuta isolata e l'altra coppia in buona communicazione col suolo, col quale comunicava anche un polo della batteria suddetta. La distanza fra la scala e lo specchietto era di m. 1,15.

Le comunicazioni fra le varie parti furono fatte per mezzo di adatti e rapidi commutatori e di fili sottili di rame, fasciati ed isolati con ogni cura.

Stabilita la comunicazione fra i quattro accumulatori e la coppia di quadranti isolati, veniva letta la deviazione impulsiva dell'ago; poi, la coppia stessa era posta in comunicazione col suolo e, ritornato a zero l'ago, veniva stabilita quella tra gli accumulatori ed il condensatore (e l'anello, se ne era munito), ed immediatamente dopo, l'altra fra il condensatore e l'elettrometro, mentre l'anello veniva posto al suolo.

3. Nel § 8 della I^a Nota ho mostrato che se le formole delle striscie addizionali rappresentano con sufficiente precisione la influenza dell'orlo sulla capacità di un condensatore e che se esse sono effettivamente applicabili ad un contorno qualunque per il quale il raggio di curvatura in ogni punto sia abbastanza grande, presi due condensatori equivalenti in superficie e di cui l'uno l'abbia contorno circolare e l'altro ellittico, deve rimanere verificata, qualunque sia la distanza d, la relazione:

$$(1)\quad \frac{A}{2d}\left\{1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^3\cdots-\sqrt[4]{1-e^2}\right\}\lambda=k\left\{\frac{\Delta_e}{\Delta-\Delta_e}-\frac{\Delta_c}{\Delta-\Delta_c}\right\},$$

dove A è la grandezza dell'asse maggiore del contorno ellittico; e, l'eccentricità; k, la capacità dell'elettrometro e dei fili di congiunzione con ciascuno dei condensatori; Δ, Δ_e, Δ_c, sono le deviazioni direttamente osservate all'elettrometro quando è posto in comunicazione con la sorgente di carica, e con essa e con l'uno o l'altro dei due condensatori; λ, la larghezza della striscia addizionale di cui si vuole la verifica.

In altre parole, se le formole λ vanno bene, il valore di k ricavato dalla (1) deve essere costante con la distanza, purchè questa non sia troppo grande; esso poi ci darà, nel caso che sia costante solo in parte, per quali valori di d quelle formole sieno effettivamente applicabili.

4. Le dimensioni dei condensatori erano:

per il condensatore circolare:

raggio R = cm. 15,296 ; grossezza b = cm. 0,5 ;

per il condensatore ellittico:

semiassi: A = cm. 21,66 ; B = cm. 10,83 ; spess. b = cm. 0,5 .

I due condensatori non erano rigorosamente equivalenti; infatti:

$$\left.\begin{array}{l} R^2 = \text{cm}^2\ 233{,}9676 \\ ab = \text{cm}^2\ 234{,}5778 \end{array}\right\}\ \text{differenza cm}^2\ 0{,}6102,$$

per cui, chiamando c la differenza di capacità dovuta soltanto alla non perfetta equivalenza delle superficie, sarà subito per i vari valori di d,

$$c=\frac{0{,}6102}{4d}.$$

Di essa si dovrà tenere conto per il calcolo di k.

Sostituendo nella (1) i valori numerici, e notando che

$$A=2B\quad,\quad e^2=\frac{3}{4}\quad,\quad \sqrt[4]{1-e^2}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

si ha per il primo membro, approssimativamente:

$$\frac{5,415}{d} \times 0,097594683 = \frac{1,05451\,\lambda}{d}.$$

La somma dei termini della serie è stata arrestata al 4° termine, perchè il 5° è già eguale a $1,2297 \times 10^{-10}$.

Ora, l'espressione (1) risulta dal calcolo di $C_e - C_c$, dove C_e e C_c sono le capacità corrette dei due condensatori nell'ipotesi che le aree dei dischi sieno esattamente equivalenti; quindi, per allontanarsi il meno possibile dalla realtà, occorre aggiungere c al 1° membro della (1), ed occorrerebbe anche tener conto per il contorno di un'altra correzione derivante dal fatto che $2\pi R$ e $2\pi\sqrt{AB}$ non sono rigorosamente eguali, come invece suppone il calcolo della (1). Trascurando però quest'ultima come assai piccola, si ha la relazione:

$$\frac{0,6102}{4d} + \frac{1,05451}{d}\lambda = k\left\{\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e} - \frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}\right\}. \tag{2}$$

Riporto qui appresso nella tabella I-II le deviazioni Δ, Δ_e, Δ_c relative ai due condensatori e i valori dei rapporti $\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e}$ e $\frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}$.

Tabella I.
Condensatore ellittico

d	Δ	Δ_e	$\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e}$	Media
	180,3	171,3	19,033	
cm. 0,1	180,4	171,3	18,822	18,955
	180,1	171,1	19,011	
	176,2	159,5	9,550	
cm. 0,2	176,0	159,2	9,535	9,519
	175,9	159,1	9,470	
	179,0	123,0	2,196	
cm. 1	178,8	122,9	2,198	2,197
	178,8	122,8	2,193	
	178,5	122,7	2,199	

Tabella II.
Condensatore circolare

d	Δ	Δ_c	$\frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}$	Media
	174,8	166,0	18,864	
cm. 0,1	174,6	165,8	18,840	18,825
	174,0	165,2	18,772	
	149,7	135,4	9,468	
cm. 0,2	149,5	135,2	9,454	9,445
	149,3	134,7	9,440	
	170,8	116,8	2,163	
cm. 1	170,5	116,6	2,168	2,162
	170,4	116,4	2,155	
	170,3	116,4	2,162	

Applichiamo alla (2) le due formole:

$$\lambda = \frac{2d}{\pi}\log 2, \tag{3}$$

$$\lambda = \frac{2d}{\pi}\log\left(2 + \frac{b}{2d}\right) + \frac{b}{2\pi}\log\left(1 + \frac{4d}{b}\right), \tag{4}$$

già esaminate nelle Note precedenti.

Riporto nella seguente tabella i valori dei vari termini della (2) e quelli di k ottenuti valendosi della (3) o della (4):

TABELLA III

d cm.	c cm.	$\frac{1,05451\,\lambda}{d}$ dalla (3) cm.	$\frac{1,05451\,\lambda}{d}$ dalla (4) cm.	$\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e} - \frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}$	Capacità k dalla (3) cm.	Capacità k dalla (4) cm.
0,1	1,5255	0,4653	1,5029	0,130	*15,31*	*23,29*
0,2	0,7627	0.4653	1,1894	0,074	*16,59*	*26,38*
1	0,1525	0,4653	0,7287	0,035	*17,42*	*25,81*

I valori di k ricavati da una stessa formola sono abbastanza concordanti; mentre essi differiscono notevolmente per tutte le distanze, se ricavati da formole diverse. Ciò dipende naturalmente dal fatto che, come abbiamo già visto, la (3) e la (4) rappresentano assai diversamente l'entità dell'influenza dell'orlo.

5. Ma è proprio questa entità che il metodo in discorso permette di giudicare con esattezza, come quello che dà modo di osservare *direttamente* l'influenza dell'orlo isolatamente presa ed il comportamento delle formole teoriche, invece di rimettersi all'esame delle capacità corrette, per le quali si può dire che, nel confronto, la correzione dovuta all'orlo quasi scompaia di fronte ad esse, che di quella correzione sono sempre tanto più grandi. Di ciò è facile darne subito una dilucidazione ed una prova sperimentale.

Infatti i rapporti $\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e}$ e $\frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}$ non rappresentano altro, come è evidente, che i rapporti $\frac{C_e}{k}$ e $\frac{C_c}{k}$, dove C_e e C_c sono le capacità *vere* dei due condensatori. Prendendo allora, invece di esse, i valori delle capacità *corrette* ottenute dalle formole

$$\frac{S}{4\pi d} + \frac{L}{2\pi^2}\log_e 2\,, \tag{5}$$

$$\frac{S}{4\pi d} + \frac{L}{2\pi^2}\left\{\log_e\left(2 + \frac{b}{2d}\right) + \frac{b}{4d}\log\left(1 + \frac{4d}{b}\right)\right\}, \tag{6}$$

che derivano dalla (3) e dalla (4), e valendosi dei valori sperimentali delle tabelle I e II, si hanno per k i seguenti valori:

Tabella IV.

1) *dal condensatore ellittico*:

d cm.	Capacità teorica (corretta) dalla (5) cm.	dalla (6) cm.	$\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e}$	Capacità k dalla (5) cm.	dalla (6) cm.
0,1	588,366	598,837	18,955	31,041	31,593
0,2	295,144	303,074	9,519	31,006	31,839
1	60,566	64,666	2,197	27,568	29,434

Tabella V.

2) *dal condensatore circolare*:

0,1	586,606	595,819	18,825	31,161	31,650
0,2	294,146	301,105	9,445	29,577	30,277
1	60,178	63,776	2,162	27,834	29,498

Come si scorge subito, i valori di k ottenuti dall'uno o dall'altro condensatore, dall'una o dall'altra formola, sono sempre assai prossimi, ed eccettuate forse le distanze assai grandi, non sarebbe possibile con un metodo simile o con un altro metodo di confronto analogo a questo, giungere a risultati attendibili. Le notevoli differenze fra i dati della seconda e quelli della terza colonna di entrambe le tabelle si risolvono poi in variazioni irrisorie della capacità k, come di ogni altra presa per confronto.

Invece, una volta conosciuta con precisione e sperimentalmente, sia direttamente, sia indirettamente mediante qualche artificio, quella capacità k, la tabella III ci dice che sarà facile seguire l'andamento di ciascuna formola per i vari valori della distanza e farne quindi la scelta.

La stessa considerazione può ripetersi anche per lo spessore e per la verifica dei risultati delle Note precedenti.

D'altra parte, la conoscenza di k permetterà di ricavare direttamente dalla (2) il valore vero di λ, ossia di giudicare della influenza effettiva dell'orlo sulla capacità del condensatore.

Un metodo come questo è poi assolutamente vantaggioso per lo studio della formola (4), in quanto non si può fare per essa il confronto fra la capacità del condensatore e quella dello stesso quando è munito di anello di guardia, perchè bisogna forzatamente trascurare l'influenza dello spazio d'aria (taglio); altrimenti, usando per questa una qualunque delle formole esaminate, si giunge all'assurdo che la capacità del condensatore è più grande quando esso è circondato dall'anello che quando ne è privo.

Gli unici inconvenienti che presenta questo metodo sono: dal punto di vista teorico, la difficoltà di applicarlo, anche radicalmente modificato, alla verifica delle formole di Kirchhoff, e dal lato sperimentale, la costruzione del condensatore ellittico. Confido però che in un lavoro sistematico queste difficoltà potranno essere girate completamente.

Per converso le formole di Kirchhoff ammettono una verifica diretta e simultanea, come ho già detto nella Nota precedente.

6. Le precedenti considerazioni possono senz'altro essere estese al caso in cui il condensatore sia munito di anello di guardia; infatti in tal caso basta supporre che λ esprima l'influenza dell'orlo quando esso si trova in presenza dell'anello, perchè la (1) e la (2) sieno subito applicabili alla nuova disposizione e perchè si possa fare la verifica delle espressioni date per correggere l'influenza dovuta allo spazio d'aria esistente fra il disco e l'anello di guardia, e con vantaggio anche più notevole che nel caso precedente, essendo ora assai più piccoli i valori di λ.

Si potrebbero quindi, valendosi dei valori Δ', Δ_e', Δ_c' delle deviazioni date dall'elettrometro nel nuovo caso, rifare i calcoli di k e costruire delle tabelle perfettamente analoghe alle tabelle III, IV, V per le varie espressioni da esaminare.

Ecco intanto i valori di Δ', Δ_e', Δ_c', $\frac{\Delta_e'}{\Delta' - \Delta_e'}$, $\frac{\Delta_c'}{\Delta' - \Delta_c'}$, per i due condensatori con anelli di guardia.

Tabella VI.

Condensatori con anelli di guardia

d cm.	Condensatore ellittico				Condensatore circolare			
	Δ'	Δ_e'	$\frac{\Delta_e'}{\Delta' - \Delta_e'}$	Media	Δ'	Δ_c'	$\frac{\Delta_c'}{\Delta' - \Delta_c'}$	Media
0,1	173,2	164,5	18,908	18,888	180,1	171,0	18,791	18,773
	173,0	164,3	18,885		180,0	170,6	18,747	
	172,9	164,2	18,873		179,8	170,7	18,780	
0,2	179,4	162,2	9,430	9,456	168,4	152,2	9,395	9,369
	179,1	162,0	9,473		166,2	150,2	9,387	
	179,0	161,9	9,467		165,4	149,9	9,308	
1	169,8	111,4	1,907	1,904	178,0	116,3	1,884	1,874
	169,6	110,8	1,884		177,6	115,7	1,869	
	169,6	111,3	1,909		177,4	115,6	1,870	
	169,4	111,3	1,915		177,3	115,6	1,873	

7. Ora però, anzichè ripetere le tabelle di cui si è parlato più sopra e che condurrebbero a risultati del tutto simili a quelli avuti per l'orlo libero, sarà invece utile, valendosi dei dati precedenti, formarsi un'idea, sia pure incompleta, di tutte le formole studiate sin qui, per ciò che almeno riguarda la loro rispondenza sperimentale.

A tale scopo nella tabella VII sono stati riportati: nella 1ª colonna, i valori delle distanze; poi, successivamente, i valori di $\frac{S}{4\pi d}$; delle capacità teoriche corrette dei due condensatori senza anello (C) e degli stessi muniti di anello (C′); di $\frac{C}{k}$, eguale a $\frac{\Delta_e}{\Delta - \Delta_e}$ o $\frac{\Delta_c}{\Delta - \Delta_c}$ a seconda che si tratta dell'uno o dell'altro condensatore; di $\frac{C'}{k}$, eguale a $\frac{\Delta_e'}{\Delta' - \Delta_e'}$ o $\frac{\Delta_c'}{\Delta' - \Delta_c'}$, ed infine i valori *teorici* di $\frac{C}{C'}$ ricavati dai dati della 3ª e 4ª colonna e quelli *sperimentali* avuti dai rapporti $\frac{C}{k}$ e $\frac{C'}{k}$ dedotti dall'esperienza.

Superiormente ad ogni serie sono indicate le espressioni di λ e λ' usate per il calcolo di C e di C′.

Tabella VII

d cm.	$\frac{S}{4\pi d}$ cm.	C cm.	C′ cm.	$\frac{C}{k}$	$\frac{C'}{k}$	Valori di $\frac{C}{C'}$ teorici	Valori di $\frac{C}{C'}$ sperimentali
			Condensatore ellittico				
(1)			$\begin{cases} \lambda = \frac{2d}{\pi} \log\left(2 + \frac{b}{2d}\right) + \frac{b}{\pi} \log\left(1 + \frac{4d}{b}\right) \\ \lambda' = c \end{cases}$				
0,1	586,444	598,837	590,801	18,955	18,888	*1,0136*	*1,0035*
0,2	293,222	303,074	295,400	9,519	9,456	*1,0260*	*1,0067*
1	58,644	64,666	59,089	2,197	1,904	*1,0944*	*1,1539*
			Condensatore circolare				
(1)			$\begin{cases} \lambda = \frac{2d}{\pi} \log\left(2 + \frac{b}{2d}\right) + \frac{b}{\pi} \log\left(1 + \frac{4d}{b}\right) \\ \lambda' = c \end{cases}$				
0,1	584,919	595,819	588,743	18,825	18,773	*1,0120*	*1,0028*
0,2	292,459	301,105	294,371	9,445	9,369	*1,0229*	*1,0081*
1	58,491	63,776	58,873	2,162	1,874	*1,0833*	*1,1537*
(2)			$\begin{cases} \lambda = \frac{d}{\pi} \log \frac{8\pi R}{ed} \\ \lambda' = c \end{cases}$				
0,1	584,919	602,578	588,743	18,825	18,773	*1,0235*	*1,0028*
0,2	292,459	308,428	294,371	9,445	9,369	*1,0478*	*1,0081*
1	58,491	70,542	58,873	2,162	1,874	*1,1982*	*1,1537*
(3)			$\begin{cases} \lambda = \frac{d}{\pi} \left\{ \log \frac{4\pi(2d+b)R}{ed^2} + \frac{b}{2d} \log\left(1 + \frac{2d}{b}\right) \right\} \\ \lambda' = c - \frac{2d}{\pi} (\beta_0 \tan \beta_0 + \log \cos \beta_0) \end{cases}$				
0,1	584,919	607,677	588,162	18,825	18,773	*1,0332*	*1,0028*
0,2	292,459	312,195	294,219	9,445	9,369	*1,0611*	*1,0081*
1	58,491	72,068	58,872	2,162	1,874	*1,2241*	*1,1537*

8. Se da questo esame sommario e fatto a solo titolo dimostrativo è permesso, dopo quello che è stato esposto innanzi rispetto alla attendibilità delle interpretazioni dei rapporti fra capacità, di trarre una conclusione qualsiasi, essa non può esser che questa: che, cioè, le varie formole esaminate sono tutte applicabili alla correzione della capacità con un approssimazione molto relativa e con differenze più o meno lievi a seconda della distanza fra le armature. Però, è anche da notare che esse non si comportano egualmente: infatti, mentre la (1) deve essere sicuramente rispondente alla realtà per entrambi i condensatori, ossia per qualunque contorno, in un certo intervallo dei valori della distanza compreso fra cm. 0,2 e cm. 1, dal momento che i valori sperimentali di $\frac{C}{C'}$, dapprima minori di quelli ricavati dal calcolo, invertono il loro andamento con l'aumentare della distanza; l'insieme delle formole (2) e (3) dedotte da quelle di Kirchhoff, sembra invece in eccesso per i valori di $d \leq$ cm. 1. Può darsi che restino verificate per valori maggiori. Però, in tutto questo, un giuoco non indifferente deve forse venire esercitato anche dalla forma più o meno rigorosamente tagliente dell'orlo. Ed è ciò che sarà bene venga osservato da vicino.

Altri studi ed altre indagini più precise e sistematiche sono in corso in questo stesso Istituto, e ne saranno quanto prima comunicati i risultati.

Meteorologia. — *La pioggia a Roma.* Nota del dott. Filippo Eredia, presentata dal Socio E. Millosevich.

Nella vecchia torre al Collegio Romano le osservazioni meteorologiche cominciarono nel 1788 sotto la direzione dell'abate Giuseppe Calandrelli; esse furono continuate là sotto le direzioni dei PP. Stefano Dumouchel, Francesco Vico ed Angelo Secchi. Nel nuovo Osservatorio sopra la chiesa di Sant'Ignazio furono proseguite sotto le direzioni del P. Angelo Secchi, del P. Stanislao Ferrari, di Pietro Tacchini e di Elia Millosevich, attuale direttore dell'Osservatorio. Secondo l'autorevole parere di Angelo Secchi le serie delle osservazioni udometriche acquistano uniformità, continuità e sicurezza soltanto dal 1825. L'altitudine dell'udometro fino al 1855 incluso fu di m. 65, l'attuale apparecchio è, dal 1856, all'altezza di m. 56,7.

Sopra il palazzo del Campidoglio, trovansi l'omonimo R. Osservatorio Astronomico dove sin dal 1873 e successivamente sotto la direzione del Respighi e del Di Legge si eseguiscono regolarmente osservazioni meteorologiche. Il pluviometro si trova a m. 69,6 sul livello del mare.

I cerchi meridiani dei due Osservatorî distano 704 metri ed i due pluviometri si trovano quasi nelle stesse condizioni di esposizione.

Col presente studio, ci proponiamo di esaminare le osservazioni pluviometriche che sin dal 1825 si sono accumulate, e di assegnare i valori normali della pioggia [1]. E in questa prima Nota, ci occupiamo della distribuzione mensile ed annua.

Nella tabella qui sotto trascritta, consegniamo le medie mensili ed annue che spettano ai due R. Osservatorî considerando l'uguale periodo di 33 anni (1873-1905). Trovansi pure le differenze tra i valori medi dei due Osservatorî e dalle quali risulta che da Agosto ad Aprile, nell'Osservatorio del Collegio Romano, si è registrata una quantità di pioggia superiore a quella notata nell'Osservatorio del Campidoglio e da Maggio a Luglio minore.

La minore altitudine del pluviometro dell'Osservatorio del Collegio Romano, ha certamente contribuito ad aumentare quivi la registrazione pluviometrica poichè, come è noto, in basso si registra più precipitazione. La minore registrazione nei mesi estivi, potrà forse dipendere dal fatto che essendo, in detta stagione, gli strati inferiori dell'atmosfera più caldi, nel caso di non intense precipitazioni, le goccie di acqua si evaporano producendo semplicemente delle quantità di precipitazione quasi non misurabili. Però la piccolezza delle differenze ci dice come poca variabilità riscontrasi nelle due serie di osservazioni.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno
Osservat. Collegio Romano (1873-1905) .	85,1	69,5	75,8	82,8	59,1	43,8	20,1	24,3	77,8	140,7	117,8	103,3	900,1
Osservat. Campidoglio (1873-1905)	82,8	65,0	74,8	82,0	59,9	44,3	20,6	23,4	74,8	136,0	112.9	98,9	875,4
Osservat. Collegio Romano — Osservat. Campidoglio	+ 2,3	+ 4,5	+ 1,0	+ 0,8	— 0,8	— 0,5	— 0,5	+ 0,9	+ 3,0	+ 4,7	+ 4,9	+ 4,4	+ 24,7

Però per potere studiare la pioggia nel clima di Roma, non si può fare a meno dal considerare le osservazioni eseguite tanto nell'Osservatorio del Collegio Romano quanto nell'Osservatorio del Campidoglio. E per avere delle serie tra di loro paragonabili e nello stesso tempo racchiudenti l'intero periodo di 81 anni di osservazioni, nella tabella seguente, trovansi i valori medi

[1] Per l'Osservatorio del Collegio Romano, non avendo potuto, per alcune circostanze, esaminare le osservazioni originali, i dati dal 1825 al 1882 furono tolti dalla pregiata pubblicazione del prof. E. Millosevich: *Sulla distribuzione della pioggia in Italia*, dal 1883 al 1892 furono tolti dagli Annali del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e dal 1893 al 1905 furono direttamente calcolati sulle schede decadiche che l'Osservatorio Astronomico invia al predetto Ufficio Centrale. Per l'Osservatorio del Campidoglio, i dati dal 1873 al 1882 furono tolti dalla prelodata pubblicazione del Millosevich, e dal 1883 al 1892 dagli Annali di Meteorologia e dal 1893 al 1905 furono direttamente calcolati sulle schede decadiche che l'Osservatorio invia al predetto Ufficio Centrale.

mensili dell'Osservatorio del Collegio Romano per l'intero periodo (1825-1905) ed i valori medi mensili dell'Osservatorio del Campidoglio, pel medesimo periodo, ottenuti applicando alle prime le differenze poc'anzi notate; e trascurando, d'altra parte, la piccola correzione che si sarebbe dovuto applicare pel fatto che dal 1825 al 1855 il pluviometro del Collegio Romano trovavasi di poco più elevato, attesochè le differenze che intercedono fra i valori medii dei due Osservatorî sono molto minime.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno
Osservat. Collegio Romano (1825-1905) . .	79,4	62,3	68,2	65,6	56,7	40,1	18,0	27,6	71,7	114,5	113,3	90,0	807,4
Osservat. Campidoglio (1825-1905)	77,1	57,8	67,2	64,8	57,5	40,6	18,5	26,7	68,7	109,8	108,4	85,6	782,7

Per meglio paragonare le due serie di osservazioni, calcoliamo la *piovosità relativa* dei varii mesi; intendendo con tale espressione il rapporto tra le altezze di pioggia registrate nei varii mesi e l'altezza della pioggia registrata nell'anno. Tali valori, supponendo il totale annuo uguale a 1000, trovansi qui sotto riportati.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Anno
Osservat. Collegio Romano	98	77	85	81	70	50	22	34	89	142	140	112	1000
Osservat. Campidoglio	99	74	86	83	73	52	24	34	88	140	138	109	1000

Percorrendo tale tabella, appare come cada nelle due località quasi la stessa frazione della pioggia totale dell'anno. Però siccome altri hanno notato [1] nel calcolo della piovosità relativa, non si tiene conto della durata ineguale dei mesi. Tale difficoltà si può eliminare nel seguente modo: se la ripartizione della pioggia fosse uniforme in tutto l'anno, in un mese di 31 giorni ne cadrebbe 0,085 del totale annuo, in un mese di 30 giorni 0,082 e in un mese di 28 giorni 0,077. Ora sottraendo rispettivamente uno di questi numeri 85, 82, 77 da quelli che rappresentano la piovosità relativa del mese, avremo l'*eccesso pluviometrico relativo* del mese, cioè a dire la frazione di cui la pioggia di tale mese differisce da quella che corrisponderebbe ad una distribuzione uniforme durante l'anno. Applicando questo calcolo ai numeri scritti avanti, si ottengono i seguenti risultati.

[1] A. Angot, *Valeurs normales de la température, de la pression et de la pluie à Paris.* Annales du Bureau central Météorologique de France, année 1890, Paris 1892.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Osservat. Collegio Romano	+ 13	0	0	— 0,1	— 15	— 32	— 63	— 51	+ 0,7	+ 57	+ 58	+ 27
Osservat. Campidoglio	+ 14	— 0,3	— 0,1	+ 0,1	— 12	— 30	— 61	— 51	+ 0,6	+ 55	+ 56	+ 24
Media . . .	+ 14	— 0,1	0	0	— 13	— 31	— 62	— 51	+ 0,65	+ 56	+ 57	+ 25,5

La differenza tra i valori relativi ai due Osservatorî è molto piccola, cosicchè prendendo la media avremo la rappresentazione della legge della distribuzione annua della pioggia. E risulta che l'anno è diviso in due periodi: uno comprende i mesi da Settembre a Gennaio incluso, in ciascuno dei quali la quantità di pioggia registrata è più grande di quella che corrisponderebbe ad una ripartizione uniforme in tutto l'anno, l'altro periodo comprende i rimanenti mesi dei quali in uno (Aprile) si ha una pioggia uguale a quella che corrisponderebbe ad una ripartizione uniforme e nei rimanenti minore.

Diamo qui appresso la distribuzione per decennio trascrivendo la somma delle precipitazioni corrispondente a ciascun decennio del periodo considerato, per mese, per stagioni meteorologiche e per anno, e dove i massimi e i minimi sono notati in carattere corsivo.

Osservatorio Collegio Romano	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno
1825 — 1834	768,1	*393,9*	*395,2*	484,9	523,7	427,9	211,4	222,2	716,2	*605,0*	961,6	*656,2*	*1818,2*	*1403,8*	861,5	*2282,8*	*6366,3*
1835 — 1844	*585,6*	809,7	614,5	583,2	668,6	*248,4*	113,7	315,8	724,5	800,4	*877,4*	664,3	2059,6	1866,3	677,9	2402,3	7006,1
1845 — 1854	674,0	499,5	521,8	609,4	485,6	461,4	225,9	**406,5**	729,4	884,4	**1349,3**	858,4	2031,9	1616,8	**1093,8**	2963,1	7705,6
1855 — 1864	889,8	700,0	707,0	*508,6*	**725,7**	311,0	*91,8*	267,9	648,1	1382,9	1264,3	1000,3	2590,1	1941,3	*670,7*	3295,3	8497,4
1865 — 1874	814,8	501,0	842,3	610,9	*373,3*	373,5	196,1	249,6	*602,0*	1355,6	1069,2	860,2	2176,0	1826,5	819,2	3026,8	7848,5
1875 — 1884	747,9	505,3	697,7	**914,6**	586,0	522,8	99,5	237,5	**1039,5**	1259,9	937,7	941,1	2194,3	**2198,3**	859,8	3228,1	8480,5
1885 — 1894	**1212,1**	668,1	824,4	854,9	444,5	285,8	231,6	*213,8*	653,7	1183,1	**1145,7**	950,2	2830,4	2123,8	731,2	2982,5	8667,9
1895 — 1904	675,0	**835,2**	**850,5**	661,8	647,5	**523,7**	**255,0**	281,8	666,3	**1737,5**	**1316,6**	**1330,4**	**2840,6**	2159,8	1067,8	**3713,1**	**9781,3**

In fine della presente Nota, trovasi la quantità di pioggia notata in ciascun mese e in ciascuna stagione e nell'anno per ciascun anno del periodo anzidetto e per ciascun Osservatorio.

Utilizzando i valori relativi all'Osservatorio del Collegio Romano abbiamo esaminato in quale mese di ciascun anno del periodo è stata registrata la maggior quantità di precipitazione; e qui sotto trovasi indicato quante volte ciascun mese dell'anno ha registrato il più elevato valore pluviometrico.

Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
9	4	6	3	0	1	0	1	7	16	18	16

Percorrendo tali valori, risulta che Novembre, Dicembre, Ottobre, sono i mesi che hanno più frequentemente la massima pioggia mensile dell'anno, ossia che in detti mesi più frequentemente suole verificarsi la massima precipitazione.

Diamo ora la massima e la minima precipitazione di ciascun mese per l'intero periodo di 81 anni.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
Massima	205,4	173,1	171,5	183,7	148,1	139,0	113,1	104,9	225,5	328,6	372,5	273,6
Minima	10,2	0,0	0,0	0,1	0,7	0,3	0,0	0,0	0,7	8,2	12,6	0,1
M — m	195,2	173,1	171,5	183,6	147,4	138,7	113,1	104,9	224,8	320,4	359,9	273,5

Ed esaminando la differenza tra la massima e la minima, risulta che la maggiore variazione dell'altezza della pioggia si ha in Novembre, Ottobre, Dicembre, cioè nei mesi che sogliono possedere la massima precipitazione.

R. Osservatorio Astronomico del Collegio Romano.

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno
1825	39,9	0,8	8,9	15,8	9,2	24,0	9,5	3,8	22,8	32,1	39,3	142,7	183,4	33,9	37,3	94,2	348,8
26	59,6	36,1	67,1	56,7	97,5	51,6	21,1	9,6	73,2	97,8	346,0	19,0	114,7	221,3	82,3	517,0	935,3
27	110,8	72,7	29,6	25,1	60,2	81,9	24,7	21,7	88,8	90,2	60,3	19,1	202,6	114,9	128,3	239,3	685,1
28	41,4	68,4	66,7	36,5	37,9	39,6	0	0,2	18,8	96,2	54,4	13,1	122,9	141,1	39,8	169,4	473,2
29	161,6	5,5	48,1	45,1	50,0	80,2	6,9	23,9	123,8	92,4	104,3	164,1	331,2	143,2	111,0	320,5	905,9
30	131,7	43,5	4,5	0,1	46,4	8,4	10,2	77,4	69,9	40,0	61,1	187,0	362,2	51,0	96,0	171,0	680,2
31	91,9	14,9	25,8	135,2	91,6	18,2	55,8	29,1	104,7	61,0	68,8	42,2	149,0	252,6	103,1	234,5	739,2
32	88,7	56,8	91,3	44,0	33,7	118,2	5,7	30,7	4,1	8,2	98,1	36,6	182,1	169,0	154,6	110,4	616,1
33	12,3	59,8	53,2	121,0	26,2	3,6	43,6	14,7	190,3	60,9	57,3	20,2	92,3	200,4	61,9	308,5	663,1
1834	30,2	35,4	0	5,4	71,0	2,2	33,9	11,1	19,8	26,2	72,0	12,2	77,8	76,4	47,2	118,0	319,4
1835	12,2	18,4	58,0	29,6	77,2	91,0	14,8	93,4	67,2	37,7	52,6	36,3	66,9	164,8	199,2	157,5	588,4
36	10,2	147,8	47,9	87,6	97,0	13,7	6,7	27,9	86,1	70,1	75,9	64,5	222,5	232,5	48,3	232,1	735,4
37	68,8	38,8	116,2	83,7	81,5	12,7	27,2	12,3	70,2	34,0	81,0	38,9	146,5	281,4	52,2	185,2	665,3
38	114,4	126,0	64,9	80,8	51,4	20,3	21,0	28,5	40,8	103,8	74,9	81,5	321,9	197,1	69,8	219,5	808,3
39	62,1	10,5	127,9	47,3	39,2	10,3	23,2	66,7	111,9	110,9	80,8	98,4	171,0	214,4	100,1	303,6	789,1
40	17,2	66,0	51,1	83,5	59,4	0,2	2,7	0,1	40,7	40,2	88,7	67,1	150,3	194,0	3,0	169,6	516,9
41	109,8	105,2	29,5	73,2	19,8	40,6	3,1	13,7	56,6	113,4	64,6	84,5	299,5	122,5	57,4	234,6	714,0
42	111,9	17,5	27,8	66,2	116,1	13,5	9,6	70,6	113,2	178,6	76,3	17,7	147,1	210,1	93,7	368,1	819,0
43	48,6	181,6	58,1	20,2	35,0	15,5	3,1	0	39,5	45,7	107,5	0,1	230,3	113,3	18,6	192,7	554,9
1844	30,4	97,9	33,1	11,1	92,0	30,7	2,3	2,6	98,3	66,0	175,1	175,3	303,6	136,2	35,6	339,4	814,8
1845	104,8	59,5	47,7	96,1	51,1	36,8	3,7	36,6	94,4	58,3	296,1	93,8	258,1	194,9	77,1	448,8	978,9
46	36,6	8,2	43,2	36,0	54,6	1,4	0,1	94,8	164,4	224,7	84,3	217,2	262,0	133,8	96,3	473,4	965,5
47	90,0	80,5	65,3	68,9	20,9	46,2	91,7	61,4	5,9	39,3	63,0	165,4	335,9	155,1	199,3	108,2	798,5
48	55,0	66,2	105,0	59,2	60,9	8,1	24,7	0,1	50,7	113,0	74,6	20,3	141,5	225,1	32,9	238,3	637,8
49	32,3	0,9	17,8	129,4	31,1	69,6	34,4	22,7	38,6	33,8	37,8	63,2	96,4	178,3	126,7	110,2	511,6
50	112,7	31,7	16,5	60,1	57,6	139,0	11,4	23,4	65,9	145,0	37,4	39,1	183,5	134,2	175,8	248,3	741,8
51	15,6	18,7	64,9	29,1	57,2	28,5	12,7	48,5	166,3	40,9	317,9	4,9	39,2	151,2	85,7	525,1	801,2
52	97,8	37,2	38,1	36,7	33,4	1,4	31,3	69,2	65,1	89,0	34,7	20,2	155,2	108,2	101,9	188,8	554,1
53	68,5	173,1	108,6	67,7	27,2	114,2	2,3	44,2	40,7	89,2	87,7	139,0	380,6	203,5	160,7	217,6	962,4
1854	60,7	23,5	14,7	26,2	91,6	16,2	12,6	8,6	37,4	51,2	315,8	95,3	179,5	132,5	37,4	404,4	753,8
1855	93,3	73,1	133,5	49,7	44,3	83,5	0	8,2	82,6	110,3	102,9	58,2	229,6	227,5	90,7	295,8	843,6
56	118,0	56,7	45,7	74,0	114,5	13,3	10,2	12,0	70,0	56,8	59,7	173,7	348,4	234,2	35,5	186,5	804,6
57	125,5	15,6	71,5	87,5	45,8	7,9	7,0	43,6	50,7	216,8	89,2	19,5	160,6	204,8	58,5	356,7	780,6
58	40,5	99,7	71,1	27,0	37,5	55,9	9,0	67,6	52,0	154,3	156,7	110,8	251,0	135,6	132,5	363,0	882,1
59	13,5	47,0	45,0	16,8	126,2	39,5	13,9	53,5	31,0	116,5	81,6	133,3	193,8	188,0	106,9	229,1	717,8
60	168,6	91,3	54,1	156,0	82,9	14,1	19,2	1,1	31,8	26,9	151,4	173,0	432,9	293,0	34,4	210,1	970,4
61	89,1	93,5	54,9	49,7	30,9	41,3	32,1	2,0	93,0	106,0	63,4	10,5	198,1	135,5	75,4	267,4	676,4
62	82,5	76,6	57,0	32,9	43,6	28,3	0,1	64,6	135,6	109,1	222,1	95,5	254,6	132,6	93,0	467,8	948,0
63	117,4	0	75,5	9,0	116,5	0,8	0	15,1	19,6	338,5	167,7	83,1	200,5	201,0	15,8	525,8	943,2
1864	41,4	136,5	98,7	6,9	83,5	27,4	0,3	0,2	76,8	147,7	163,6	142,7	320,6	189,1	27,9	393,1	930,7
1865	99,0	59,2	135,6	2,2	4,2	39,2	12,9	4,2	17,5	134,9	146,6	34,3	192,5	142,0	56,3	299,0	689,8
66	44,7	19,8	154,6	73,8	40,3	22,3	0,3	7,5	35,1	84,4	38,9	24,0	88,5	248,7	30,1	158,4	525,7
67	152,6	21,5	73,5	20,7	9,0	18,8	12,6	104,9	46,2	183,1	22,1	71,5	245,6	105,2	136,3	251,4	738,5
68	127,0	6,3	36,6	57,5	63,1	92,5	79,8	33,5	133,5	121,7	126,4	37,1	170,4	157,2	205,8	381,6	915,0
69	13,3	22,1	153,9	57,4	1,3	21,8	12,1	28,8	65,5	81,3	83,1	182,3	217,7	212,6	62,7	229,9	722,9
70	58,2	97,1	23,7	62,0	24,5	67,2	37,0	10,6	14,6	71,8	122,2	227,1	382,4	110,2	114,8	208,6	816,0
71	112,2	37,1	111,1	41,8	32,9	48,6	0,2	1,0	18,3	40,3	196,9	21,7	171,0	185,8	49,8	255,5	662,1
72	92,5	86,6	115,3	76,1	59,9	48,4	3,2	30,9	91,4	238,4	105,2	102,4	281,5	251,3	82,5	435,0	1050,3
73	65,9	110,9	36,1	119,1	32,5	14,4	0	0,4	79,9	288,1	98,9	8,6	185,4	187,7	14,8	466,9	854,8
1874	49,4	40,4	19,9	100,3	105,6	0,3	38,0	27,8	100,0	111,6	128,9	151,2	241,0	225,8	66,1	340,5	873,4
1875	47,9	72,8	165,0	93,0	0,7	112,9	20,5	18,0	155,8	322,1	150,6	73,2	193,9	258,7	151,4	628,5	1232,5
76	87,3	85,6	52,9	82,7	69,4	49,7	22,1	47,2	27,9	[illegible]	73,5	127,9	300,8	205,0	119,0	121,4	746,2
77	59,5	23,5	94,9	76,5	20,5	73,8	11,5	12,0	34,0	[illegible]	67,5	155,3	238,3	191,9	97,3	192,6	720,1
78	42,8	9,1	57,1	43,9	0,8	19,2	20,0	5,6	113,3	198,8	372,5	137,6	189,5	101,8	44,8	684,6	1020,7
79	74,9	134,1	38,1	183,7	148,1	0,2	0,1	1,9	50,0	93,9	28,1	29,2	238,2	369,9	2,2	172,0	782,3
80	17,7	47,0	37,1	84,7	88,0	7,0	0	62,4	44,8	53,4	92,1	5,4	70,1	209,8	69,4	190,3	539,6
81	199,4	16,6	45,6	75,5	106,2	63,0	0	7,1	105,7	237,0	12,6	94,6	310,6	227,3	75,1	356,2	969,2
82	52,8	7,5	33,0	58,3	26,7	19,9	23,2	26,5	195,4	199,9	54,3	111,3	171,6	118,0	69,6	386,3	745,5
83	108,7	77,1	126,6	106,4	50,0	85,3	1,1	4,8	101,6	33,3	33,5	56,7	242,5	283,0	91,2	168,4	785,1
1884	56,9	32,0	47,4	109,9	75,6	86,8	1,0	52,0	202,0	72,8	53,0	149,9	238,8	232,9	139,8	327,8	939,3

	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno
1885	205,4	58,4	68,9	171,7	40,4	31,6	3,2	40,6	49,4	129,1	140,7	15,0	278,8	281,0	75,4	319,2	954,4
86	150,6	84,1	34,6	88,4	38,3	31,5	13,3	7,5	36,7	89,7	55,8	170,0	404,7	161,3	52,3	182,2	800,5
87	108,0	47,0	83,5	72,1	41,3	29,8	30,1	29,5	186,5	101,9	121,0	152,0	307,0	196,9	89,4	409,4	1002,7
88	64,0	154,5	95,1	64,5	57,1	3,5	18,5	42,1	50,2	110,8	80,0	47,1	265,6	216,7	64,1	241,0	787,4
89	113,7	104,8	106,6	159,8	22,6	30,8	10,5	2,9	51,9	309,6	122,7	101,3	319,8	289,0	44,2	484,2	1137,2
90	39,5	19,8	171,5	68,7	84,7	30,8	36,5	2,1	48,9	120,4	151,2	88,1	147,4	324,9	69,4	320,5	862,2
91	190,6	0	58,5	58,1	47,7	102,1	0	20,0	57,4	144,4	68,4	71,6	268,2	164,3	122,1	270,2	824,8
92	142,6	129,2	109,5	94,5	32,6	5,5	6,4	24,9	118,4	119,4	68,9	118,7	390,5	236,6	36,8	306,7	970,6
93	36,7	69,4	0,1	0,7	43,8	17,1	113,1	44,2	0,7	18,0	272,6	60,2	166,3	44,6	174,4	291,3	676,6
1894	155,0	0,9	96,1	76,4	36,0	3,1	0	0	54,6	39,8	63,4	126,2	282,4	208,5	3,1	157,8	671,5
1895	134,1	114,8	84,8	65,4	70,0	87,3	0	0,3	5,8	158,3	80,6	140,1	379,0	220,2	87,6	244,7	931,5
96	15,2	43,0	37,3	109,0	70,4	14,9	1,7	79,7	22,1	328,6	139,4	163,4	221,6	216,7	96,3	490,1	1024,7
97	126,2	43,0	52,6	53,7	36,5	3,2	54,9	39,0	49,1	124,0	90,2	180,5	349,7	142,8	97,1	263,3	852,9
98	25,1	68,0	160,1	67,6	65,0	16,2	1,3	18,4	33,8	89,2	246,0	73,8	166,9	292,7	35,9	369,0	864,5
99	51,5	19,3	35,3	58,3	50,3	79,0	66,5	26,9	146,4	207,0	52,3	110,9	181,7	143,9	172,4	405,7	903,7
00	115,7	96,8	122,2	91,9	110,0	56,0	44,9	81,0	82,7	257,0	328,5	83,6	296,1	324,1	181,9	668,2	1470,3
01	17,7	136,0	121,8	25,1	96,7	36,9	6,0	8,5	225,5	147,5	49,3	184,4	338,1	243,6	51,4	422,3	1055,4
02	41,2	163,2	52,3	62,9	90,8	21,9	4,0	2,5	9,2	238,0	122,0	43,1	247,5	206,0	35,1	362,5	851,1
03	85,2	40,1	79,2	65,9	38,8	133,9	12,5	0	18,1	82,8	159,6	273,9	399,2	183,9	146,4	260,5	990,0
04	63,1	111,0	104,9	62,0	19,0	74,4	63,2	26,1	73,0	105,1	48,7	86,7	260,8	185,9	163,7	226,8	837,2
1905	60,6	134,5	71,4	82,9	134,2	98,1	37,8	41,2	35,5	63,4	259,5	26,0	221,1	288,5	177,1	358,4	1045,1
TOTALE 1825-1905	6427,9	5047,2	5524,8	5311,2	4589,1	3252,6	1462,8	2236,3	5807,2	9272,2	9180,3	7287,1	18762,2	15425,1	6959,0	24252,4	65398,7

R. Osservatorio Astronomico del Campidoglio.

1873	62,3	106,2	24,8	107,9	33,2	14,5	0,1	0,5	72,5	266,8	94,2	8,7	177,2	175,9	15,1	433,5	801,7
74	43,3	45,7	31,7	101,8	107,6	0,6	32,4	15,1	104,8	99,0	141,0	149,1	243,1	241,1	48,1	344,8	877,1
75	53,3	72,0	161,6	90,6	1,6	107,7	19,1	17,3	123,9	302,2	144,6	71,2	196,5	253,8	144,1	570,7	1165,1
76	90,3	77,9	47,4	81,3	66,5	54,7	24,4	43,7	27,1	28,5	89,4	136,3	304,5	197,2	124,8	145,0	771,5
77	55,3	27,0	89,6	75,0	31,5	77,1	13,6	16,3	35,9	81,7	70,1	152,8	235,1	196,1	107,0	187,7	725,9
78	46,8	8,2	54,7	50,3	2,0	24,1	19,8	8,2	112,8	193,4	343,9	141,2	199,2	107,0	52,1	655,1	1013,4
79	77,8	120,4	53,5	204,1	152,6	0,9	0	1,6	46,1	97,0	54,2	22,6	220,8	410,2	2,5	197,3	830,8
80	22,6	45,2	42,5	85,8	92,2	9,6	0	59,5	43,5	60,1	92,7	8,2	76,0	220,5	69,1	196,3	561,9
81	183,4	22,7	50,8	65,8	102,2	67,4	0,2	11,8	102,1	240,4	10,0	94,1	300,2	218,5	79,4	352,5	950,9
1882	54,9	6,3	41,9	54,4	27,5	24,1	26,5	21,9	178,1	119,1	62,0	106,2	167,4	123,8	72,5	359,2	722,9
1883	116,9	77,2	134,3	102,5	51,1	99,5	2,5	9,7	110,6	35,3	35,8	56,5	250,6	287,9	111,7	181,7	831,9
84	54,5	31,6	57,0	118,5	76,1	89,1	2,0	45,6	212,3	77,3	53,9	135,3	221,4	251,6	136,7	343,5	953,2
85	185,5	57,8	66,3	155,4	36,6	31,4	6,1	47,2	46,5	130,2	137,2	18,4	261,7	258,3	84,7	313,9	918,6
86	155,6	83,0	29,9	92,5	34,9	29,8	11,2	12,4	46,1	102,5	44,5	169,6	413,2	157,3	53,4	193,1	817,0
87	111,4	43,8	88,4	73,9	43,1	28,5	37,9	28,5	179,6	95,6	143,3	148,8	304,0	205,4	94,9	418,5	1022,8
88	53,8	150,0	97,9	31,0	53,9	4,4	18,3	42,1	47,5	112,1	82,4	46,8	250,6	232,8	64,8	242,0	790,2
89	114,1	95,7	95,4	162,9	15,2	26,7	13,4	0,3	51,1	293,7	124,6	103,2	313,0	273,5	40,4	469,4	1096,3
90	41,5	23,5	182,5	75,6	86,2	32,0	30,8	3,4	55,1	113,5	158,6	90,3	155,3	344,3	66,2	327,2	893,0
91	174,7	0,1	56,3	53,3	42,5	91,3	1,1	12,2	56,1	136,7	55,4	59,0	233,8	152,1	104,6	248,2	738,7
1892	123,7	114,1	99,4	86,4	29,3	6,6	10,3	27,3	112,0	126,0	65,9	120,9	358,7	215,1	44,2	303,9	921,9
1893	34,1	63,0	0,5	2,4	44,3	18,0	112,9	34,3	4,1	20,8	252,5	62,6	164,7	47,2	165,2	277,4	654,5
94	120,4	1,5	89,4	76,2	40,3	4,6	0	0	43,1	40,4	63,0	105,2	227,1	205,9	4,6	151,5	589,1
95	131,6	99,6	73,9	59,1	61,1	85,4	0,1	1,7	0	147,0	75,0	120,7	351,9	194,1	87,2	222,0	855,2
96	13,3	36,5	37,4	104,1	83,4	13,7	5,0	71,1	15,2	333,2	134,6	133,6	183,4	224,9	90,4	483,0	981,1
97	129,0	40,7	48,9	49,4	37,8	5,7	58,3	37,4	46,3	134,3	80,0	166,5	335,2	136,1	101,4	260,6	834,3
98	63,4	22,1	158,3	68,8	57,9	9,6	4,6	19,8	30,1	98,4	225,1	75,7	161,2	285,0	34,0	353,6	833,8
99	49,2	17,1	36,5	52,0	58,6	82,3	60,8	27,9	143,3	175,2	46,9	102,0	168,3	147,1	171,0	365,4	851,8
00	110,2	93,7	118,0	86,6	115,9	48,5	50,3	74,3	80,0	205,8	254,9	81,6	285,5	321,3	173,1	540,7	1320,6
01	11,7	123,0	106,9	21,8	97,8	38,7	6,0	9,5	202,3	133,4	46,6	150,8	287,5	226,5	54,2	382,8	950,5
1902	41,4	152,2	44,4	65,1	88,6	32,0	7,4	0,3	8,8	239,9	108,9	45,6	239,2	198,1	39,7	357,6	834,6
1903	78,9	40,5	71,6	59,4	36,3	146,5	17,3	0	23,1	78,1	147,8	258,8	378,2	167,3	163,8	249,0	958,3
04	63,6	106,5	97,5	63,9	20,9	70,7	47,1	26,5	73,2	100,3	46,5	90,8	260,9	182,3	144,3	220,0	807,5
1905	60,7	126,9	66,6	79,1	147,5	84,9	39,4	43,7	30,7	64,8	241,1	27,6	215,2	293,2	168,0	336,6	1013,0

Mineralogia. — *Appunti di mineralogia sarda. Bournonite del Sarrabus* [1]. Nota di FEDERICO MILLOSEVICH, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Nella importante e numerosa collezione lasciata in dono dal prof. Domenico Lovisato al Museo di Mineralogia della R. Università di Sassari, sono molti e bei campioni provenienti dalle varie miniere del Sarrabus. In uno di essi destarono la mia attenzione alcuni cristalli poco appariscenti e mezzo nascosti fra una bella varietà di blenda di color colofonia, che costituisce il minerale più vistoso ed abbondante in detto campione; questi cristalli per il colore, per la forma e sopratutto per la caratteristica geminazione mi parvero a prima vista bournonite e mi affrettai a rendermene certo con la misura preliminare di qualche angolo. Il campione, secondo l'indicazione scritta dallo stesso prof. Lovisato, proviene dal filone di Canale Figu (livello n. 2). Canale Figu appartiene alla miniera Giovanni Bonu, seguendo verso Est il filone principale del Sarrabus e quindi si trova fra Giovanni Bonu e Nonte Narba.

Benchè si trovi spesso bournonite in giacimenti plumbo-argentiferi, tuttavia questo minerale non figura nell'elenco delle specie finora ritrovate al Sarrabus e non ne fanno menzione, nè gli scritti speciali di tanti valorosi mineralisti [2], nè la monografia descrittiva del Traverso [3].

In Sardegna fu fino ad ora rinvenuta bournonite, non in distinti cristalli, alla miniera dell'Argentiera nella Nurra e descritta recentemente dal Lovisato [4], il quale già da molti anni ne aveva constatata la presenza in parecchi campioni di questa miniera lasciati in dono al Museo di Sassari. Per quel che riguarda altre località italiane, ricorderò che Iervis [5] cita bournonite con galena a Gravere (Val di Susa), con tetraedrite a Ceresole Reale, con pirite e tetraedrite a Testa della Deserta e Sutore presso Noasca (Val di Locana), con calcopirite e galena ad Antey S. André (Val Tournanche), con pirite e calcopirite a Brosso, con galena all'Argentaria presso Pie-

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

(2) Ho consultato in proposito le pubblicazioni su minerali del Sarrabus di Bombicci, Von Rath, Lovisato, Miers, Traverso, Artini, Corsi, D'Achiardi G., Mattirolo, Tacconi, De Castro.

(3) Traverso G. B., *Sarrabus e suoi minerali*. Alba, 1898.

(4) Lovisato D., *La bournonite nella miniera dell'Argentiera della Nurra (Portotorres, Sardegna)*. Roma, Rend. Acc. Lincei (ser. 5), XI, 1902, 2° sem., pag. 357.

(5) Jervis G. I., *I tesori sotterranei dell'Italia*. Torino, I, 1873, pagg. 51, 73, 74, 105, 118 e II, 1874, pag. 350.

trasanta (Lucca). Ancora Iervis [1] e più recentemente La Valle [2] ricordano la bournonite fra i minerali dei giacimenti metalliferi dei Monti Peloritani a Fiumedinisi, a Francavilla di Sicilia e a Novara di Sicilia. Ma i soli cristalli di bournonite di località italiane finora conosciuti, sono quelli della ricordata miniera dell'Argentaria presso Pietrasanta, descritti da A. D'Achiardi [3] e che presentano la semplice combinazione }001{ }100{ }010} }101{ }011{.

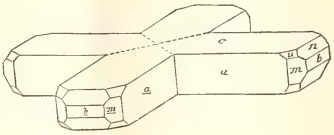
La bournonite di Canale Figu si presenta in cristalli di color nero ferro a lucentezza non troppo viva, di dimensioni variabili, ma generalmente piuttosto piccoli: i più lucenti e più adatti alle misure goniometriche sono quelli di abito spiccatamente tabulare ed hanno una lunghezza media di 3 mm. per una larghezza di 2 mm. ed uno spessore di circa 1 mm.

Le forme da me osservate sono, secondo l' orientazione comunemente adottata, le seguenti:

a }100{ $\infty \overline{P} \infty$.	*b* }010{ $\infty \breve{P} \infty$.	*c* }001{ *o* P.
m }110{ ∞ P.	*l* }320{ ∞ P $\frac{3}{2}$.	
n }011{ $\breve{P} \infty$.		
y }111{ P.	*u* }112{ $\frac{4}{2}$ P.	
ϱ }121{ 2 $\breve{P}$ 2.		

Le combinazioni osservate sono le seguenti:

1ª. }100{, }010}, }001{, }110{, }011{, }112{ (fig. 1) che è la più frequente e si presenta in cristalli di abito tabulare secondo la base, allungati



nella direzione dell'asse [*y*]; in questi, dopo la base, ha maggior sviluppo il pinacoide }100{.

2ª. }100{, }010{, }001{, }110{, }320}, }011{, }111{, }112{ di abito come la precedente con l'aggiunta di faccettine sempre molto piccole della piramide }111{ e del prisma }320{.

3ª. }100{, }010{, }001{, }110{, }011{, }111{, }112{, }121{: anch' essa abbastanza frequente: con abito prismatico e con grande sviluppo oltrechè delle facce di }001{ e }100{ anche di quelle della zona [100] e specialmente

(1) Loc. cit., III, 1881, pagg. 204, 313, 315.

(2) La Valle G., *I giacimenti metalliferi di Sicilia in Provincia di Messina.* Messina, I, 1899, pag. 14 e II, 1904, pagg. 44 e 58.

(3) D'Achiardi A., *Mineralogia della Toscana.* Pisa, II, 1873, pag. 336.

del brachidoma }011{. In essa sono osservabili anche piccole faccettine della piramide }121{.

4ª. }100{, }010{, }001{, }110{, }320{, }011{, }111{, }112{, }121{: come la 3ª, ma con l'aggiunta anche di }320{ ed è la più ricca di facce fra quelle osservate (fig. 2).

I cristalli sono tutti geminati secondo la comune legge: piano di geminazione una faccia del prisma }110{. Sono generalmente dei gruppi di 4 individui, che formano uno dei noti aggruppamenti cruciformi; ciò che vi ha di notevole, e che differisce questi aggruppamenti da altri consimili della bournonite di altre località, è il notevole sviluppo secondo l'asse [y] che

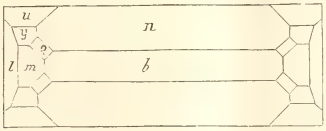


Fig. 2.

presenta ciascun individuo, in modo che le braccia della croce sporgono di molto e sono anche in qualche caso abbastanza regolarmente sviluppate: cosicchè il gruppo si accosta alla forma modello rappresentata nella fig. 1.

Frequente è un'associazione di più cristalli, che si può descrivere in tal modo: ad un individuo più grande si uniscono in posizione di gemello da un lato e dall'altro due più piccoli e in ciascuno degli angoli rientranti fra l'individuo maggiore e i due minori si dispone un altro individuo in posizione parallela al primo. Gruppi più complicati come il vero e proprio *Rädelerz* ungherese non si osservano; e neanche ho potuto constatare l'esistenza di lamelle di geminazione intercalate fra gli individui principali.

Per quanto riguarda l'aspetto fisico delle facce delle singole forme, si osserva che le facce del pinacoide }010{ sono piane, lucenti, perfette e che tali pure sono le facce di }011{ e di }112{ costantemente presenti e ben sviluppate: talora soltanto si osservano su }011{ e anche sulle facce contigue di }112{ delle striature dovute alla loro combinazione alternante. Le facce di }110{ hanno una lievissima striatura verticale; una simile striatura verticale è invece molto accentuata sul pinacoide }100{.

Molto interessante è l'osservazione dell'aspetto fisico delle facce di base, quale si rivela al microscopio anche con debole ingrandimento, e quale ho tentato di rappresentare, in modo alquanto schematico, nella fig. 3. Si notano in queste facce dei rilievi di contorno triangolare, formati da piccole piramidi triangolari troncate superiormente da un piano parallelo a quello basale; i

lati della base di queste piramidi sono paralleli agli spigoli di combinazione di (001) rispettivamente con (011), con (112) e con ($\bar{1}$12) e disposti in modo, che questi due ultimi lati sieno rivolti verso l'interno, e quindi paralleli alle linee di demarcazione fra gli individui geminati. Le facce di queste piccole piramidi molto probabilmente corrispondono rispettivamente alla (011) e a due facce di una protopiramide, forse la stessa }112{. Nella base degli individui gemelli si riscontrano analoghi rilievi con i lati paralleli ai medesimi spigoli di combinazione e quindi disposti rispetto ai primi in posizione di gemello.

La linea che limita gli individui geminati è una spezzata formata di tratti di varia lunghezza, ma sempre paralleli a un lato o ad un altro di

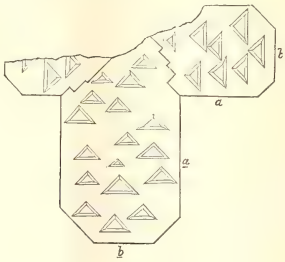


Fig. 3.

questi rilievi triangolari. La presenza di tali rilievi, collegata col fatto della marcata striatura verticale del pinacoide }100{, potrebbe far ritenere che la struttura dei singoli cristalli risulti costituita di lamelle verticali parallele a (010), che vanno decrescendo di estensione dall' esterno all' interno dei gruppi di cristalli associati, corrispondentemente al piano di giustapposizione dei geminati. Per di più la disposizione di tali rilievi non lascia alcun dubbio sulla costituzione dei semplici geminati a croce, che risulterebbero sempre formati di 4 individui a giustapposizione. E ciò concorda con i risultati delle osservazioni di Miers (1) e di Peck (2).

Da quanto ho detto riguardo l'aspetto fisico delle facce, risulta che le più adatte alle misure goniometriche sono quelle di }010{, di }011{, di }110{ e di }112{; le altre, o sono troppo piccole, o presentano irregolarità e striature. Da alcune misure esatte, eseguite sopra queste facce più perfette, mi

(1) Min. Soc. London, 1885, VI, 68.
(2) Zeitsch. f. Kryst. XXXII, 298.

risultarono costantemente dei valori un po' diversi da quelli teorici secondo le costanti di Miller, adattate dai principali trattati: infatti gli angoli (110):(010) e (011):(010) sono, secondo Miller, rispettivamente di 46° 50′ e di 48° 6′ 45″, mentre io da valori abbastanza prossimi fra di loro e sempre un po' superiori a questi ho trovato una media di 46° 57′ per (110):(010) e di 48° 12′ per (011):(010). Ciò mi ha indotto a calcolare il rapporto parametrico seguente:

$$a : b : c = 0{,}93415 : 1 : 0{,}89410$$

Quello di Miller è:

$$a : b : c = 0{,}93797 : 1 : 0{,}89686$$

Nel seguente quadro riporto il risultato delle misure e dei calcoli secondo le costanti da me ottenute e secondo quelle di Miller, e da esso si scorge che, se l'accordo fra osservazione e calcolo non è sempre assolutamente ottimo anche secondo le mie costanti, esso è tuttavia migliore di quello che si avrebbe adottando il rapporto parametrico di Miller.

Angoli	N.	Misurati		Calcolati (Millosevich)	Calcolati (Miller)
		Limiti	Medie		
(010) : (110)	8	46°53′ — 47° 4′	46°57′	—	46°50′
(010) : (011)	7	48 7 — 48 16	48 12	—	48 6 45″
(110) : (112)	4	56 47 — 56 53	56 49	56°47′	56 45
(011) : (112)	2	29 9 — 29 17	29 13	29 12	29 11 30
(112) : ($\bar{1}$12)	1	—	47 10	47 12	47 8
(110) : (011)	3	62 56 — 63 7	63 1	62 56	62 49
(110) : (111)	2	37°18′ — 37 34	37 26	37 21 30″	37 20
(010) : (111)	1	—	57 0	57 8 30	57 3
(110) : (320)	2	11 0 — 11 20	11 10	11 7	11 9
(010) : (121)	1	—	37 58	37 44 30	37 39
(110) : (121)	1	—	31 40	31 53	31 50

Il confronto vale sopratutto per i primi sei angoli di questa tabella, quelli cioè ottenuti su facce adatte a buone misure.

La bournonite nel campione di Canale Figu si trova sopra una matrice di *quarzo* compatto e in minuti cristallini: essa è intimamente legata con *blenda* in cristalli color colofonia e in lamine brunastre; la accompagnano anche *argentite*, *argento nativo*, *pirite* e forse anche *tetraedrite*.

Geologia. — *Alcune osservazioni geologiche sul Vulcano Laziale e specialmente sul Monte Cavo.* Nota di Pompeo Moderni, presentata dal Socio T. Taramelli.

Fra i vulcani spenti dell'Italia centrale, il Vulcano Laziale è certamente quello al quale un maggior numero di studiosi rivolsero la loro attenzione e le loro osservazioni, scegliendolo a meta di scientifiche e piacevoli escursioni: la vicinanza sua a Roma e la facilità di accedervi da questa città per vie diverse; l'esistenza di molti e grossi centri abitati disseminati su tutta l'area dell'antico vulcano, i quali permettono di far stazione su qualunque settore di esso, e perciò di percorrerne con facilità ogni sua più recondita parte; l'aria salubre ed ossigenata dei Colli Laziali, ricoperti da ville, da splendidi vigneti e da folti boschi di castagni, sono tutti fattori che esercitarono il loro fascino su scienziati e *touristes*, e danno la ragione della numerosa schiera di coloro che si occuparono e scrissero del Vulcano Laziale.

Per quanto un campo sia stato ben mietuto, pur tuttavia qualche spiga resta sempre da coglierví; lo studio di un vulcano spento, che ha avuto diversi periodi di attività, è così complesso, che, frugando bene, si trova sempre qualche cosa non veduta o dimenticata dagli altri.

Come è noto, il Vulcano Laziale ha avuto tre periodi differenti indicati, il 1° dalla cinta craterica esterna dell'Artemisio, il 2° dalla cinta craterica interna del Monte Faete ed il 3° dai crateri eccentrici di Albano, Nemi e Valle Ariccia. Ognuno di questi edifici principali è accompagnato da un certo numero di edifici minori o coni avventizi, formatisi il più delle volte fra una conflagrazione e l'altra dell'edificio principale, ovvero rappresentano la continuazione, in proporzioni ridotte, dell'attività di quello.

Lo studio particolareggiato di tutte le boche eruttive, comprendente la loro ricostruzione, la cronologia delle loro eruzioni, il riconoscimento delle colate di lava ed altri materiali caratteristici appartenenti rispettivamente ad ognuna d'esse, è quello che offre ancora il campo sul quale vi è più possibilità di trovare delle spighe da raccogliere.

È vero che vi è chi crede che a questo studio non si debba dare soverchia importanza, ma è un'opinione questa che non ha serio fondamento, poichè nello studio complesso di un vulcano spento, quello delle bocche eruttive è per lo appunto il più importante di tutti: infatti, se lo studio analitico dei materiali eruttati fa conoscere le loro varietà; se lo studio stratigrafico con l'ammasso dei prodotti, dà un'idea della durata del vulcanismo in una data regione; con le intercluse erosioni, indica appossimativamente

il tempo più o meno lungo trascorso tra un'eruzione e l'altra; con la diversità dei prodotti sovrapposti, avverte della possibilità di più fasi distinte dell'attività del vulcano; soltanto lo studio attento ed accurato delle bocche eruttive permette di riconoscere la provenienza di tutti i materiali eruttati, ed integrando tutte le altre osservazioni, offre una base per la ricostruzione a grandi linee della storia di un vulcano.

***

Dopo un'ultima conflagrazione, sventratosi ad Ovest il primitivo cono del Vulcano Laziale, del quale, come si è detto, resta la catena dell'Artemisio a segnarne la parte orientale, ed i colli di Rocca Priora quella settentrionale, ebbe termine il primo periodo dell'edificio principale.

Quasi nel mezzo del primitivo grandioso cratere, indicato dalla Valle della Molara, sorse gradatamente un secondo cono, di dimensioni assai più modeste, a segnare un secondo periodo nella storia di questo vulcano, così come in tempi storici si è visto sorgere ed ingrandire il cono del Vesuvio nel mezzo dello squarciato cratere del Somma. Anche il secondo periodo ebbe termine con lo slabbramento della parte occidentale di cinta craterica del secondo edificio vulcanico, del quale la catena del Monte Faete, la cui punta più elevata raggiunge la quota di m. 956 sul livello del mare, rappresenta ancora la parte orientale del recinto craterico.

Prima che il condotto eruttivo si spostasse verso Sud-Ovest originando i crateri di Nemi, di Albano e di Valle Ariccia, i quali segnarono le manifestazioni del terzo periodo, entro lo slabbrato cratere del secondo periodo, indicato dall'altipiano circolare che porta il nome di *Campi d'Annibale*, cominciò a formarsi un terzo cono, indicato oggi dalla collinetta chiamata Colle del Vescovo, avente una cinquantina di metri d'altezza, il quale rimase però quasi allo stato embrionale, perchè tutta l'attività eruttiva del vulcano si concentrò in altri due punti poco distanti: questi due punti sono il Monte Jano, conosciuto più comunemente nella regione con il nome di Monte Pila, ed il Monte Cavo, i quali da semplici fumarole situate su l'orlo craterico, come probabilmente dovevano essere in principio, vennero gradatamente attivandosi supplantando la bocca principale. Per quanto a questi due edifici convenga il nome di bocche avventizie, pur tuttavia rappresentano un'appendice e un'appendice importante del secondo periodo, poichè con il Colle del Vescovo estintasi la bocca principale, per i due coni del Monte Jano e di Monte Cavo, continuarono ancora per qualche tempo le manifestazioni eruttive del secondo periodo.

I due coni, dei quali il Monte Jano raggiunge la quota di 938 metri sul mare ed il Monte Cavo quella di 949 metri, sono contemporanei, all'incirca della stessa grandezza e costituiti da materiali identici; si svilupparono rispettivamente alle due estremità della catena di Monte Faete che alta e

dirupata s' innalza su i Campi d'Annibale, mostrando le testate degli strati fortemente inclinate all'esterno, e rappresenta ancora caratteristicamente una quarta parte, circa, dell' intera cinta craterica.

Nel Monte Jano tutti riconobbero un cono avventizio dell'edificio vulcanico del secondo periodo: è costituito da banchi di lapilli e scorie di color rosso e bruno, da ogni parte fortemente rialzati [1] verso la sommità su la quale si riconosce ancora il piccolo cratere, malgrado il folto bosco che riveste tutto il colle. Un mantello di lava scoriacea giallastra, detta *Sperone*, ricopre quasi interamente i fianchi del cono: di questa bocca eruttiva si hanno descrizioni particolareggiate della sua forma, del posto che gli spetta nell'ordine cronologico delle eruzioni laziali, nonchè dei materiali eruttati.

Fra quelli che più recentemente scrissero del Vulcano Laziale, sono da citare il Sabatini ed il Verri: il primo considera il Monte Cavo come la continuazione del Monte Faete e come quello crede che rappresenti una parte (quella Sud-Ovest) della cinta craterica del secondo periodo [2]. Il Verri invece lo ritiene un cono avventizio e così lo descrive:

« Il Monte Cavo con prodotti eguali a quelli del Monte Jano, posto sulla linea dei crateri terminali del cono antico e del cono centrale, sorgente pur esso sulla piattaforma rimasta dopo il diroccamento del cratere che vomitò le lave ricche di leuciti ed augiti, incastrato tra i ruderi del recinto di quel cratere nel punto dove il cono centrale deve essersi squarciato per versare i peperini nel settore Ovest, segna *altro cono eruttivo* » [3].

Il Monte Cavo è infatti un cono vulcanico e dalla forma così caratteristica che lo si giudica tale anche a distanza, senza bisogno di recarsi sul posto ad esaminarne la struttura e i materiali che lo compongono. Anzitutto il profilo del Monte Cavo si distacca dalla linea generale del cono principale del secondo periodo, sicchè avvicinandosi ad esso l'osservatore si conferma sempre più nel convincimento che il Monte Cavo sia un cono sviluppatosi su l'orlo dello slabbrato cono interno. Giunto poi sul posto, dovunque l'osservatore volge lo squardo, trova elementi che provano essere il Monte Cavo una bocca eruttiva distinta e posteriore al cono interno, sviluppatasi durante il secondo periodo del Vulcano Laziale.

La prova che si offre più evidente è quella del forte e caratteristico rialzamento degli strati da tutte le parti verso la sommità del Monte Cavo:

[1] La parola *rialzati* presa alla lettera non è esatta, perchè infatti nelle formazioni vulcaniche non si tratta di strati *rialzati o sollevati* dalla loro primitiva giacitura in un'altra; però la medesima è generalmente usata indicando assai efficacemente un fatto, la descrizione del quale richiederebbe altrimenti un lungo giro di parole.

[2] Sabatini V., *I Vulcani dell'Italia centrale e i loro prodotti*. Parte I. *Vulcano Laziale*. Memorie descrittive della Carta Geologica d'Italia, Vol. X, Roma, 1900.

[3] Verri A., *Note per la storia del Vulcano Laziale (gruppo dei crateri)*. Bollettino della Società Geologica Italiana, Vol. XII, Roma, 1893.

tale rialzamento si vede specialmente bene su la strada che dalla piazza Regina Margherita di Rocca di Papa conduce al viale della Madonna del Tufo. Oltre a ciò nel fondo di alcune grotte esistenti lungo questa strada di circonvallazione e non molto distanti dalla piazza, al disotto degli strati di lapilli appartenenti alle eruzioni del Monte Cavo, si scoprono lave e scorie del cono principale, macroscopicamente alquanto diverse e quel che più monta diversamente inclinate dalle prime.

Su la mulattiera che dal viale della Madonna del Tufo sale ai Campi d'Annibale, rasentando il villino De Rossi, l'erosione ha messo in luce delle lave estremamente leucitiche, anzi che si possono chiamare un ammasso di leuciti tenute assieme da poco magma lavico, del tutto eguali a quelle delle colate di cui si vedono le testate nell'interno del Monte Faete. Queste lave molto alterate, dallo aspetto antico, così diverse dalle lave esistenti su i fianchi del Monte Cavo, povere di leuciti in cristalli macroscopici e che sembrano assai meno antiche, sono un'altra prova che si è di fronte a prodotti di due fasi diverse, nello stesso tempo che il Monte Cavo, per i suoi materiali che si sovrappongono a quelli del Monte Faete, dimostra di essere di questo più recente.

Su la strada che dai Campi d'Annibale, seguendo più o meno l'antica strada romana, sale alla sommità del Monte Cavo, si vedono le colate di lava e gli strati di lapilli fortemente rialzati verso quella sommità e non verso un punto imaginario al disopra della parte centrale dei Campi d'Annibale; osservazione identica si può fare lungo il viale che conduce alla Madonna del Tufo. Dove però l'osservatore può constatare un fatto che fa sparire ogni dubbio su la genesi del Monte Cavo, è nell'interno stesso del cratere del secondo periodo: su la mulattiera che da Rocca di Papa, attraversati i Campi d'Annibale, passando nella sella che separa, non accidentalmente, il Monte Faete dal Monte Cavo, scende a Nemi, al disotto del Monte Cavo stesso vi sono strati di lapillo fortemente rialzati verso la cima del monte. Se nell'interno del cratere questo monte invece di mostrare le testate degli strati inclinate verso l'esterno, come si osservano appunto nell'attiguo Monte Faete, mostra invece i medesimi inclinati all'interno, mentre da tutte le altre parti si vedono sempre egualmente rialzati verso la sommità del monte, è segno evidente che al Monte Faete trattasi di un frammento di cinta craterica ed al Monte Cavo invece di un cono ben distinto e riconoscibile. Anzi dalle osservazioni che si possono fare nell'accennata località e meno chiaramente in qualche altra, sembrerebbe che al posto del Monte Cavo dovesse sorgere un cono di maggior altezza, il quale come avviene sovente, demolito in qualche più forte conflagrazione, siasi poi riformato di dimensioni minori, quali oggi noi le vediamo.

Percorrendo il delizioso viale che da Rocca di Papa conduce alla Madonna del Tufo, più volte nominato, in prossimità del paese si osservano

degli strati di lapillo la cui convessità è rivolta in senso opposto a quella di altri strati che si possono vedere poco prima di giungere alla chiesa, come se fossero le due parti opposte di uno stesso cono. Nella parte più bassa della mulattiera che dai Campi d'Annibale conduce su la vetta del Monte Cavo, si vedono degli strati rialzati verso Ovest: queste due osservazioni unite insieme, le quali ci mostrerebbero tre parti diverse della superficie dello stesso cono, farebbero supporre che a Nord dell'attuale cono di Monte Cavo, ne esistesse antecedentemente uno più piccolo, il quale per uno spostamento verso Sud del canale eruttivo, sarebbe rimasto in parte distrutto ed in parte incluso nel posteriore e maggiore cono del Monte Cavo.

Potrebbe anche darsi che questi due ultimi fatti fossero indipendenti l'uno dall'altro e che le due parti opposte di cono, che sembrano vedersi lungo il viale della Madonna del Tufo, siano veramente le rovine di un piccolo conetto il quale segnerebbe una prima fase del Monte Cavo. L'altro fatto invece che si osserva su la parte più bassa della mulattiera che dai Campi d'Annibale ascende a Monte Cavo, potrebbe anche essere un altro dato riferentesi al cono maggiore più sopra accennato, che avrebbe segnato una seconda fase di questa bocca eruttiva, la quale nella terza fase poi, rappresentata dall'attuale Monte Cavo, sarebbesi spenta.

Non insisto molto su la interpretazione da me data agli avanzi di questa bocca eruttiva, poichè la medesima essendo per la massima parte coperta da folto bosco, non da per tutto si possono fare le osservazioni che sarebbero necessarie; però della medesima si può affermare che fra le bocche secondarie è una delle più grandi ed interessanti, facilmente riconoscibile non solo, ma dal suo buono stato di conservazione, è permesso anche farsi la convinzione che deve avere avuto varie fasi, le quali ne hanno replicatamente modificato le dimensioni.

La spianata che corona la sommità del Monte Cavo rappresenta certamente il piccolo cratere di questo cono, ma la superficie essendo stata qui troppe volte modificata dalle mani dell'uomo, spiega facilmente il perchè del cratere non rimanga più alcuna traccia.

Tutte le bocche avventizie situate fra il recinto esterno ed il cono centrale furono dal Sabatini [1] classificate come manifestazioni eccentriche appartenenti al secondo periodo; anche il Verri [2] attribuisce i coni avventizi della Val Molara al secondo periodo. Fra quelli però che si trovano dalla parte opposta, cioè a Sud e Sud-Est del cono centrale, i due conetti gemelli situati poco lontano l'uno dall'altro, rispettivamente a Nord ed Est della Fontana Tempesta, si devono logicamente comprendere fra i coni avventizi del terzo periodo.

[1] Sabatini V., op. cit.
[2] Verri A., op. cit.

Queste due piccole bocche eruttive si trovano, è vero, ai piedi del cono centrale ma vi è da osservare ch'esse si trovano anche presso l'orlo craterico di Nemi non solo, ma da quella situata ad Est di Fontana Tempesta è uscita un'abbondante colata di lava che si è precipitata nella conca lacustre, come dimostra la sua direzione e la sua inclinazione, e vedesi per oltre un chilometro, dai piedi del conetto fino a Nemi; mentre all'altro piccolo edificio vulcanico, situato a Nord di Fontana Tempesta, appartiene forse la lava che, a Sud di esso, si vede sul fianco del recinto craterico di Nemi. Se dunque le lave di queste due bocche avventizie, e più specialmente di quella situata ad Est di Fontana Tempesta, si sono rovesciate nella conca craterica di Nemi, è segno evidente che questa preesisteva, ed i due conetti sviluppatisi sul di lei orlo devono considerarsi come bocche avventizie del cratere di Nemi anzichè del cono centrale e perciò da comprendersi fra le manifestazioni vulniche del terzo periodo e non del secondo.

Chiuderò questa breve Nota con alcune osservazioni su i Peperini, le quali se non potranno vantare il pregio della novità, varranno almeno a confermare sempre più quelle fatte da altri geologi: su la strada rotabile che da Rocca di Papa scende ad Ariccia, poco dopo aver oltrepassato il santuario della Madonna del Tufo, s'incontrano banchi di Peperino fortemente rialzati verso i Campi d'Annibale, banchi che furono rimarcati anche dal Verri [1]. Nel bosco, fra il lago di Albano ed il tratto di strada rotabile che passa davanti al suaccennato Santuario, svolgendosi sul fianco Sud-Ovest del cono centrale, la superficie è essenzialmente costituita da Peperino i di cui strati sono pure fortemente rialzati verso i Campi d'Annibale: questo Peperino, al pari di quello di Albano e Nemi, contiene incastrati nella sua pasta tufacea grossi blocchi di calcare bianco di cui se ne trovano pure molti isolati sparsi per il bosco. Agli Squarciarelli, alla base Nord-Ovest del cono centrale, intercalati ad altri materiali vulcanici vi sono banchi di Peperino rialzati pure verso i Campi d'Annibale, come rialzato da questa parte è il Peperino che nel Vallone Arcioni raggiunge, secondo il Verri, la quota di 600 metri sul mare.

Il Di Tucci ha trovato dei Peperini in Val Molara al piede del piccolo cono avventizio di Monte Pennolo, nel vallone Barbarossa (versante Sud del cono centrale) ad 850 metri di elevazione e su la vetta stessa del Monte Cavo; altro Peperino affiora ai Campi d'Annibale e lungo la mulattiera che, scendendo per il versante Nord del cono centrale, conduce a Rocca Priora. Questi Peperini che si trovano su tutti i versanti del cono centrale devono, evidentemente, essersi formati con i materiali proiettati dalle eruzioni del cono stesso e da quelle delle sue bocche avventizie; perciò non devono confondersi con il Peperino dovuto alle eruzioni dei crateri di Albano e Nemi,

[1] Verri A., op. cit.

Peperino i cui strati rialzati rispettivamente verso quelle bocche eruttive, chiaramente ne indicano la provenienza: l'inclinazione varia dei Peperini vedesi in molte località fra le quali citerò la parte inferiore della già nominata strada che da Rocca di Papa scende ad Ariccia, dove i medesimi che poco più in alto erano rialzati fortemente verso i Campi d'Annibale, si vedono ora più ora meno accentuatamente rialzati verso la conca craterica di Albano o verso quella di Nemi.

Inoltre il Verri cita l'esistenza del Peperino nelle conche crateriche di Pratoporci e di Pantano Secco, alle falde settentrionali del primitivo grande cono esterno del sistema laziale; il Meli [1] a sua volta ha trovato il Peperino alla Fonte del Pilozzo sotto Monte Porzio ed ai piedi della collina del Tuscolo presso Frascati, località anche queste sul versante settentrionale del grande cono esterno; altro Peperino ha trovato il Meli presso Civita-Lavinia e nella Valle di S. Gennaro fra questo paese e Velletri, sul fianco meridionale del grande cono esterno; altro Peperino il Verri ed il Meli, per tacere di altri, citano in diversi punti alle falde occidentali dello stesso grande cono esterno.

Però se per i Peperini che si trovano su questo ultimo versante citato del cono esterno, è difficile distinguere quelli formatisi con i materiali dovuti alle eruzioni di questa grande bocca da quelli del terzo periodo, cioè formatisi con i materiali eruttati dai crateri di Albano e Nemi, apertisi più tardi da questa parte su l'orlo craterico della medesima, per i Peperini che si trovano su i versanti settentrionale e meridionale del cono esterno tale dubbio non è possibile, e perciò si devono ritenere formati con i materiali proiettati dal grande cratere contenuto in esso cono.

Vi è chi ha espresso l'opinione che il Peperino notato dal Meli alla Fonte del Pilozzo sotto Monte Porzio, possa essere un prodotto locale di quel conetto avventizio: ammesso pure che l'osservazione sia esatta, di fronte al fatto dell'esistenza del Peperino a Frascati, a Civita-Lavinia e nella Valle di S. Gennaro, il quale dimostra che in ogni parte del cono esterno, come in ogni parte di quello interno o centrale si trova del Peperino, si è obbligati a ben altre conclusioni. Il Meli osserva inoltre, molto opportunamente, che strati di Peperino devono giacere ancora inavvertiti in molti altri luoghi, perchè ricoperti dal terreno vegetale, o dai detriti moderni trasportati dalle acque, non appariscono od affiorano soltanto in qualche punto, come hanno recentemente dimostrato le trincee tagliate nel terreno per la ferrovia dei Castelli Romani.

Questi fatti conducono necessariamente a concludere che nel Vulcano Laziale il Peperino non è prodotto speciale del suo terzo periodo, cioè dei

[1] Meli R., *Sopra i resti fossili di un grande avvoltoio (Gyps) racchiuso nei Peperini laziali.* Boll. della Soc. geolog. ital., vol. XVIII, fasc. 3°, Roma, 1889.

crateri di Albano e Nemi, ma che Peperino si è formato in tutti e tre i periodi di esso vulcano, come lo attestano gli strati di questa roccia che si rinvengono tanto nell'ossatura del cono esterno quanto in quella del cono centrale od interno. I Peperini dei due primi periodi sono meno visibili, meno conosciuti e meno studiati, 1° perchè da quanto si vede sembra ch' essi non siano così potenti come quelli del terzo periodo; 2° perchè sono rimasti seppelliti sotto le deiezioni di eruzioni succedutesi durante i tre periodi del vulcano.

Dal resto anche il Vulcano di Montefiascone, il quale è uno dei quattro che costituiscono il gruppo dei Vulsini [1] presenta la specialità di aver emesso in tutte le sue fasi dei materiali, con i quali si formò un Peperino, anzi questa è una delle caratteristiche che lo distingue degli altri tre vulcani del gruppo; sicchè la formazione del Peperino durante i diversi periodi di un vulcano non sarebbe un fatto verificatosi soltanto al Vulcano Laziale, ma come vedesi, ve ne sono già due esempi fra i vulcani stessi dell'Italia centrale. Anche i Peperini di Montefiascone e del Cimino contengono degl'inclusi, che sono però diversi da quelli del Vulcano Laziale; così, tanto a Montefiascone ed al Cimino come al Laziale, vi è del Peperino più fortemente cementato e di quello che lo è in grado minore. Queste accidentalità, che si spiegano assai facilmente, non hanno importanza alcuna per quanto riguarda la genesi della roccia, che è identica a quella degli altri tufi vulcanici, ma la dividono in diverse specie più o meno atte ad essere impiegate nelle costruzioni.

Chimica. — *Sulle forme superiori di combinazione dell'argento.* Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

F. de Helguero. *Per la risoluzione delle curve dimorfiche.* Pres. dal Socio Volterra.

V. C

[1] Moderni P., *Contribuzione allo studio geologico dei Vulcani Vulsini.* Boll. del R. Comitato Geologico, annate 1903 e 1904, Roma, 1904.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1906). Fasc. 8°. 1° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905). Fasc. 9°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VI. Fasc. 1°-3°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Fasc. 1°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 aprile 1906.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Arzelà. Condizioni di esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali . . Pag. 417
Di Stefano. Sull'esistenza dell'Eocene nella penisola Salentina . . . . . » 423
Angeli e *Marchetti.* Sopra gli azossicomposti (*) . . . . . » 426
Lauricella. Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi (pres. dal Socio *Dini*) . . . . . » »
Levi. Ricerche sulle funzioni derivate (pres. dal Socio *Segre*) . . . . . » 433
Lebon. Théorie et construction de tables permettant de trouver rapidement les facteurs premiers d'un nombre (pres. dal Socio *Volterra*) . . . . . » 439
Magini. Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore (pres. dal Corrisp. *Battelli*). . . . . » 442
Eredia. La pioggia a Roma (pres. dal Socio *Millosevich*) . . . . . » 450
F. Millosevich. Appunti di mineralogia sarda. Bournonite del Sarrabus (pres. dal Socio *Strüver*) . . . . . » 457
Moderni. Alcune osservazioni geologiche sul Vulcano Laziale e specialmente sul Monte Cavo (pres. dal Socio *Taramelli*) . . . . . » 462
Barbieri. Sulle forme superiori di combinazione dell'argento (pres. dal Socio *Ciamician*) (*) » 469

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

De Helguero. Per la risoluzione delle curve dimorfiche (pres. dal Socio *Volterra*) . . . » »

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. *Roma 6 maggio 1906.* **N. 9.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 maggio 1906.

Volume XV.° — Fascicolo 9°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. – *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. – *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. – *c*) Con un ringraziamento all'autore. – *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 maggio 1906.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza.* Nota del Corrispondente A. Battelli.

Occupandomi della resistenza elettrica dei solenoidi per correnti alternate ho mostrato [1], in una mia antecedente Nota, che i risultati teorici, trovati su tale argomento dal Wien, praticamente valgono soltanto per correnti di bassa frequenza, per le quali del resto il valore della resistenza differisce assai poco da quello che spetta alle correnti continue.

In quella Nota io ho anche discusso i risultati teorici a cui era pervenuto posteriormente il Sommerfeld occupandosi dello stesso problema; essi si riferiscono a solenoidi ideali, che, per esempio, potrebbero costruirsi avvolgendo ad elica un nastro metallico sopra un cilindro, in modo che sia ridotto a zero lo spazio isolante compreso fra due spire consecutive. In pratica invece i solenoidi sono sempre costruiti con filo a sezione circolare, anzichè con nastro a sezione rettangolare; e ciò fa sì, che ai medesimi non possono affatto applicarsi i risultati teorici del Sommerfeld, nè per basse, nè per alte frequenze.

Veramente il Sommerfeld, confrontando la resistenza R dei suoi solenoidi ideali, supposti costruiti con nastro a sezione quadrata, con le corrispondenti resistenze R′, che l'esperienza assegna a quei solenoidi quando la loro sezione, a parità di area, venga trasformata in un cerchio, era venuto alla conclusione che fra R ed R′ c'è bensì una notevolissima discordanza — pari circa al 50 % di R′ — ma che il rapporto $\frac{R'}{R}$ è una costante γ, che ha lo stesso valore

[1] Rendiconti R. Acc. Lincei, seduta del 17 dicembre 1905, e del 4 febbraio 1906.

($\gamma = 0{,}6$) sia per le alte, che per le basse frequenze. In realtà però la costanza del rapporto $\frac{R'}{R}$, nei casi esaminati dal Sommerfeld, deve probabilmente attribuirsi più ad una casuale coincidenza, che ad una vera legge fisica. È infatti veramente improbabile che il rapporto $\frac{R'}{R}$, il quale per correnti continue ha il valore 1, debba poi acquistare, in maniera quasi discontinua, il valore 0,6 appena la corrente diviene alternata e debba conservare costantemente quel valore sia per le basse, che per le alte frequenze.

Parrebbe perfino, secondo le conclusioni del Sommerfeld, che per le alte frequenze la resistenza di un filo avvolto ad elica debba essere indipendente dal *passo* dell'elica, il che è addirittura contradetto dalle esperienze.

Se poi si volessero accettare i risultati del Sommerfeld, generalizzandoli con l'ammettere che al fattore γ debba attribuirsi un valore compreso fra 1 ed $^1/_2$ e variabile da caso a caso, è chiaro che essi lascerebbero nelle formule una indeterminazione, per effetto della quale il valore calcolato per la resistenza può subire oscillazioni che arrivano al 50 % del valore reale; senza dubbio, nella maggior parte dei casi, si otterrebbe un'approssimazione maggiore, assumendo senz'altro per valore della resistenza quello che, per correnti di quella data frequenza, si calcola colle formule che si riferiscono ai fili rettilinei. Infatti, in pratica il rapporto fra la resistenza di un filo avvolto a solenoide e la resistenza dello stesso filo disteso in linea retta si comincia sensibilmente a scostare dall'unità, solo per frequenze assai elevate; acciocchè tale rapporto possa acquistare il valore 2, si richiedono, nei casi sperimentali da me osservati [1], frequenze superiori a 100 mila alternanze per secondo.

Io ho tentato per altra via la risoluzione teorica di questo importante problema, occupandomi unicamente del caso di frequenze molto elevate, perchè per le correnti di bassa frequenza servono assai bene i risultati del Wien. Io ho fondato la mia trattazione sopra un'osservazione di carattere assai generale, la quale estende notevolmente la portata teorica delle leggi ben note, che, per i conduttori rettilinei, esprimono il localizzarsi delle correnti di alta frequenza alla superficie.

È noto che in un conduttore di forma qualsiasi le tre componenti u, v, w della densità della corrente, se questa è variabile col tempo t, soddisfanno alle equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta_2 u = \dfrac{4\pi\mu}{\sigma} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \Delta_2 v = \dfrac{4\pi\mu}{\sigma} \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ \Delta_2 w = \dfrac{4\pi\mu}{\sigma} \dfrac{\partial w}{\partial t}, \end{cases}$$

[1] Mem. R. Acc. delle Scienze di Torino, 51, pag. 314.

dove

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

e le costanti μ e σ rappresentano rispettivamente la permeabilità magnetica e la resistenza specifica del conduttore.

Queste equazioni sono state integrate in due casi particolari: quello in cui il conduttore sia costituito da una piastra metallica e quello in cui il conduttore sia costituito da un cilindro pieno o cavo; nell'un caso e nell'altro, se la frequenza delle correnti è sufficientemente alta, si trova che [1], indicando con

$$w_0 = \mathrm{A} \cos \omega t$$

la densità della corrente alla superficie del conduttore e rappresentando

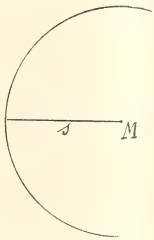


Fig 1.

quindi con ω il numero di alternanze che fa la corrente in 2π secondi, in un punto M (fig. 1) interno al conduttore e posto alla distanza s dalla superficie, la densità della corrente è

$$w = \mathrm{A} e^{-\alpha s} \cos(\omega t - \alpha s), \tag{2}$$

dove α è una costante e precisamente

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi\mu\omega}{\sigma}}. \tag{3}$$

Come si vede l'ampiezza

$$\mathrm{A} e^{-\alpha s}$$

della densità della corrente decresce, con legge esponenziale, col crescere di s

[1] J. J. Thomson, *Recent Reseaches in Electricity and Magnetism*, § 257 e segg. Nel servirmi delle formole, riferite dal Thomson, io ammetto che sia $m = 0$, cioè che le dimensioni del conduttore siano trascurabili di fronte alla lunghezza d'onda delle correnti.

e ciò fa sì che, per frequenze molto alte, per le quali α ha un valore molto grande, la corrente può quasi del tutto considerarsi localizzata in un sottilissimo strato superficiale del conduttore; oltre a ciò la fase della corrente diminuisce col crescere di s, nella stessa misura con cui va crescendo, in valore assoluto, l'esponente che comparisce nella precedente espressione dell'ampiezza

Si osservi che, per conduttori cilindrici a sezione circolare, la distribuzione della corrente è simmetrica intorno all'asse del filo; perciò, assumendo questo come asse delle z, si ha $u = v = o$ e w diverso da zero e dipendente solo dalla distanza ϱ del punto generico dell'asse medesimo. Si ha quindi

$$\Delta_2 W = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \varrho},$$

e sostituendo nelle (1) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \varrho} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Ora, indicando con a il raggio della sezione del filo, si ha

$$\varrho = a - s,$$

quindi

$$\frac{\partial w}{\partial \varrho} = -\frac{\partial w}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2},$$

e sostituendo nella precedente equazione,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{4}$$

D'altra parte è facile verificare che l'espressione (2) soddisfa alla equazione

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{4\pi\mu}{\sigma}\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{5}$$

Si è dunque condotti ad ammettere, che per frequenze molto elevate, nell'equazione (4) il termine

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial s}$$

è trascurabile di fronte ai rimanenti, ossia che il conduttore si comporta come se il raggio di curvatura ϱ della sezione del filo fosse infinitamente grande.

Considero adesso il caso generale di un conduttore di forma qualsiasi. Io suppongo che siano noti i coseni di direzione α, β, γ della corrente; allora, indicando con φ la grandezza della densità della corrente nel punto di coordinate x, y, z, si ha:

$$u = \varphi\alpha \qquad v = \varphi\beta \qquad w = \varphi\gamma\,,$$

ed una qualunque delle equazioni (1) può servire alla determinazione effettiva di φ. Per maggior simmetria di trattazione è più vantaggioso servirsi di una loro particolare combinazione lineare. Si osservi a tal uopo che

$$\Delta_2 u = \alpha\Delta_2\varphi + 2V(\alpha\,,\varphi) + \varphi\Delta_2\alpha\,,$$

dove Δ_2 ha il significato anzidetto e V è il simbolo del parametro differenziale misto, cioè

$$V(\alpha\,,\varphi) = \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,.$$

La prima delle (1) si può dunque mettere sotto la forma:

$$\left\{\Delta_2\varphi - 4\pi\mu\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}\alpha + 2\,V(\alpha\,,\varphi) + \varphi\Delta_2\alpha = 0\;;$$

moltiplicando per α e sommando con le altre due equazioni analoghe, che riguardano le componenti v e w, si ha

$$(6)\qquad \Delta_2\varphi - 4\pi\mu\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2\left\{\alpha V(\alpha\,,\varphi) + \beta V(\beta\,,\varphi) + \gamma V(\gamma\,,\varphi)\right\} + \\ + \varphi\left\{\alpha\Delta_2\alpha + \beta\Delta_2\beta + \gamma\Delta_2\gamma\right\} = 0\,.$$

Porrò per brevità

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\alpha V(\alpha\,,\varphi) + \beta V(\beta\,,\varphi) + \gamma V(\gamma\,,\varphi) = \mathrm{E} \\ &\alpha\Delta_2\alpha + \beta\Delta_2\beta + \gamma\Delta_2\gamma = -\mathrm{D}\,, \end{aligned}$$

e riguardo alla E osservo subito che, ordinando i suoi termini secondo le derivate di φ, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{E} = &\left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \beta\frac{\partial\beta}{\partial x} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \\ &+ \left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \beta\frac{\partial\beta}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \\ &+ \left(\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \beta\frac{\partial\beta}{\partial z} + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,. \end{aligned}$$

Ora dall' identità

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

si ottiene derivando rapporto ad x

$$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

e similmente, derivando rapporto ad y ed a z, si ottiene

$$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

$$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial z} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Si ha dunque identicamente

$$E = 0.$$

Quanto all'altra espressione, rappresentata con $-D$, essa si può anzitutto semplificare facendovi comparire le derivate prime di α, β e γ, invece delle derivate seconde. Infatti, derivando rapporto ad x la (8), si ottiene

$$\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} = -\left\{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right)^2\right\};$$

analogamente dalle (9) e (10) si ha

$$\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} = -\left\{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right)^2\right\}$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} = -\left\{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Da queste tre relazioni, sommando membro a membro, si ricava

$$D = \Delta_1 \alpha + \Delta_1 \beta + \Delta_1 \gamma, \tag{11}$$

dove

$$\Delta_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2.$$

Attribuendo dunque a D o il significato espresso dalla (11) o quello equivalente espresso dalla (7), si ha

$$\Delta_2 \varphi = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + D . \varphi . \tag{12}$$

Nel caso che la corrente abbia direzione costante, α, β, γ sono costanti e quindi $D = 0$; allora φ soddisfa alle stesse equazioni, a cui soddisfa una qualunque delle sue componenti.

Ma se la direzione della corrente non è costante, D in generale riesce diversa da zero e l'equazione (12) a cui soddisfa la grandezza φ della den-

sità della corrente risulta in generale diversa da quelle a cui soddisfanno le componenti u, v, w della densità medesima.

L'importanza più o meno grande che nei casi più comuni può assumere il termine $D \cdot \varphi$ rispetto ai rimanenti che entrano nell'equazione (12), è subordinata alla natura delle espressioni effettive di α, β e γ in funzione di x, y, z.

Limitando le mie considerazioni al caso più interessante per il problema che io mi sono proposto, supporrò che, almeno entro un campo sufficientemente ristretto intorno ad un punto generico qualsiasi del conduttore, le linee di corrente possano approssimatamente considerarsi come archi di cerchi aventi tutti un medesimo asse. Assumendo quest'asse per asse delle z ed orientando convenientemente gli altri due assi coordinati, le coordinate x, y, z del punto generico di una particolare linea di corrente il cui raggio sia r, si possono esprimere con formole del tipo:

$$x = r \cos \lambda$$
$$y = r \operatorname{sen} \lambda$$
$$z = \text{costante}.$$

Ora la tangente nel punto generico di quest'arco segna la direzione della corrente; si ha dunque derivando rispetto a λ,

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2}} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

e analogamente

$$\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \gamma = 0.$$

Se ne deduce facilmente che è

$$D = \Delta_1 \alpha + \Delta_1 \beta + \Delta_1 \gamma = \frac{1}{r^2}.$$

L'equazione (7) diventa dunque:

$$\Delta_2 \varphi = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \varphi.$$

Nella generalità dei casi le linee di corrente hanno una curvatura trascurabile e quindi questa equazione si può scrivere semplicemente così:

$$\Delta_2 \varphi = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{8}$$

Per venire adesso alla generalizzazione sopra accennata, si consideri la

famiglia di superficie, su ciascuna delle quali la densità della corrente abbia un valore costante φ.

Sia

$$z = z(x, y)$$

una di queste superficie. Suppongo che l'origine delle coordinate appartenga alla superficie e che gli assi delle x e y siano orientati come le tangenti alle linee principali di curvatura.

Colle notazioni di Monge

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

indicando con f una funzione qualsiasi delle coordinate x, y, z di un punto generico, si cerchino anzitutto le espressioni delle due derivate totali $\frac{df}{dx}$ e $\frac{df}{dy}$ intendendo che tali derivate siano calcolate col vincolare il punto a muoversi sulla superficie $z = z(x, y)$; si ha evidentemente

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z};$$

e derivando una seconda volta:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + t \frac{\partial f}{\partial z},$$

dove mancano i termini in p e q, perchè queste formule si intendono riferite all'origine, nella quale, per il modo con cui sono stati orientati gli assi, è $p = q = 0$.

In queste due ultime formule si ponga φ al posto di f e si ricordi che sulla superficie $z = z(x, y)$ è $\varphi =$ costante, e quindi $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0$; ne segue senz'altro che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -r \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -t \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

onde

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - (r + t) \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

ossia, indicando con s la distanza normale della superficie $z = z(x, y)$ e

ricordando che

$$r + t = \frac{1}{\varrho},$$

dove $\frac{1}{\varrho}$ è la curvatura media della superficie medesima, si ha

$$\Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial s};$$

e sostituendo in (8) si ottiene finalmente

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{9}$$

Come si vede, questa formula coincide con quella (4), che vale pei conduttori cilindrici a sezione circolare, e si può ritenere come una generalizzazione di quest'ultima, ottenuta con l'attribuire ad $\frac{1}{\varrho}$ il significato di curvatura media della superficie, sulla quale è costante la grandezza φ della densità della corrente.

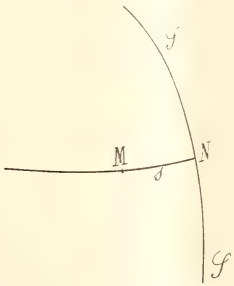


Fig. 2.

Come nella (4) il termine $\frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial s}$, per correnti di alta frequenza, è trascurabile di fronte agli altri due, così si è indotti a ritenere che anche nella (9) il termine

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

è trascurabile di fronte ai rimanenti e con grande approsimazione si può sostituire alla (9) l'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \frac{4\pi\mu}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Conseguentemente, indicando con φ_0 il valore della grandezza della densità della corrente sopra una delle superficie, sulle quali è $\varphi =$ costante e considerando un arco $MN = s$ (fig. 2) di una delle traiettorie ortogonali

alla famiglia delle superficie medesime, contato a partire dalla superficie fissa S, per la quale $\varphi = \varphi_0$, si ha:

$$\varphi = {}_0\,\varphi e^{-\alpha s} \cos(\omega t - \alpha s) \tag{10}$$

dove, al solito

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\sigma}}\,. \tag{11}$$

Dunque *per correnti di alta frequenza nel passaggio da una superficie all'altra della famiglia di superficie, sulle quali* R = *costante, la densità della corrente varia con le stesse leggi che si riferiscono ai conduttori cilindrici ed alle lastre piane.* Questa appunto è la generalizzazione, a cui è stato accennato da principio.

Essa è applicabile a tutti i casi in cui le linee di corrente siano cerchi di diametro molto grande aventi un medesimo asse, siano essi formati con spire di ugual diametro o di diametro differente, con spire di passo costante o di passo variabile, con filo di sezione circolare o di sezione differente ecc.

Mostrerò in un'altra Nota le conseguenze che se ne possono trarre relativamente alla resistenza dei solenoidi ordinari.

Chimica. — *Sopra gli azossicomposti.* Nota del Corrispondente A. Angeli e di G. Marchetti.

Le ricerche eseguite in questi ultimi anni da uno di noi hanno dimostrato che l'idrossilammina e nitrobenzolo e reciprocamente il nitrato di etile ed anilina, in presenza di sodio metallico, reagiscono fra di loro per dare origine a due prodotti isomeri (sotto forma di sali sodici) la cui struttura è senza dubbio da rappresentarsi per mezzo delle formole:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N(OH) \\ \\ C_6H_5 . N = \underset{\underset{O}{\|}}{N}(OH) \end{array}$$

L'una differisce dall'altra per la diversa posizione cui è unito l'atomo di ossigeno nell'idrato di diazobenzolo da cui si possono immaginare derivate:

$$C_6H_5 . N = N(OH)\ .$$

Siccome taluni ammettono che tali composti contengano l'anello:

$$\begin{array}{c} -N - N- \\ \diagdown\ O\ \diagup \end{array}$$

si vede subito che la costituzione di queste sostanze è intimamente collegata a quella degli azossicomposti aromatici nei quali pure, in modo arbitrario e senza nessuna base sperimentale, viene supposta la presenza dello stesso aggruppamento ciclico.

Per dare maggiore generalità alla reazione da noi scoperta ed anche per portare un nuovo contributo che servisse a chiarire la costituzione dei composti in parola, noi abbiamo fatto reagire i nitrocomposti aromatici sopra le ammine. Era da prevedersi che anche in questo caso la reazione dovesse procedere in modo perfettamente analogo. Trattando infatti anilina e nitrobenzolo con sodio metallico, dopo brevissimo tempo, si ottiene un sale che all'aria si accende spontaneamente; una determinazione di sodio rende molto probabile che al prodotto spetti la struttura [1]:

$$\begin{array}{c} C_6H_5 . NOONa \\ | \\ C_6H_5 . NNa \end{array}$$

Per azione dell'acqua viene facilmente idrolizzato e fra i prodotti di decomposizione si riscontrano notevoli quantità di *azossibenzolo*. Nello stesso modo si compie la condensazione della α-naftilammina con la α-nitronaftalina; in questo caso si ottiene, con buon rendimento, la *α-azossinaftalina*. Stabilito che per mezzo della nuova reazione si formano azossicomposti aromatici, identici a quelli già noti:

$$R . NH_2 + NO_2 . R = R(N_2O)R + H_2O \ ,$$

noi abbiamo fatto reagire l'anilina sopra la α-nitronaftalina

$$C_6H_5 . NH_2 + NO_2 . C_{10}H_7$$

e reciprocamente il nitrobenzolo sopra la α-naftilammina

$$C_6H_5 . NO_2 + NH_2 . C_{10}H_7 \ .$$

In tal modo siamo arrivati a due prodotti che differiscono fra di loro in modo notevole e le cui formole saranno con grande probabilità da rappresentarsi per mezzo degli schemi:

$$\begin{array}{c} C_6H_5 . N = N . C_{10}H_7 \\ \| \\ O \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C_6H_5 . N = N . C_{10}H_7 \\ \| \\ O \end{array} \ ,$$

[1] L'azione del sodio metallico sopra il nitrobenzolo procede in modo straordinariamente lento. Secondo I. Schmidt si ottiene in tal modo il sale bisodico della fenilidrossilammina:

$$C_6H_5 . NONa_2 \ .$$

Il prodotto da noi ottenuto non riduce il liquido di Fehling.

trascurando per il momento isomerie, poco verosimili, dovute a differente configurazione delle molecole [1].

Il processo di condensazione delle ammine con i nitroderivati (in presenza di sodio) è quindi di indole generale e nel seguente specchietto riuniremo i casi più importanti a cui finora l'abbiamo esteso:

(1) $(HO) . NH_2 + NO_2 \cdot C_6H_5 = HO(N_2O)C_6H_5 + H_2O$

(2) $(HO) . NH_2 + NO_2 . OC_2H_5 = HO(N_2O)OH + C_2H_6O$

(3) $C_6H_5 . NH_2 + NO_2 . OC_2H_5 = C_6H_5(N_2O)OH + C_2H_6O$

(4) $C_6H_5 . NH_2 + NO_2 . C_6H_5 = C_6H_5(N_2O)C_6H_5 + H_2O$

Come si è già detto, la (1) e la (3) conducono a prodotti isomeri e non identici.

Comunichiamo con tutto riserbo questi risultati ancora preliminari, riserbandoci di far seguire in una prossima comunicazione la descrizione delle esperienze che si riferiscono alla presente Nota.

Chimica. — *Nuove ricerche intorno alle sostanze dette aromatiche a 6 atomi di carbonio.* Nota del Socio G. Körner.

Chimica. — *Intorno alla sesta nitrobibromobenzina.* Nota del Socio G. Körner e del dott. A. Contardi.

Botanica. — *Ricerche sulla produzione artificiale della melata sulle foglie dell'olivo.* Nota del Corrispondente G. Cuboni.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] Il processo di formazione degli azossicomposti scoperto da E. Bamberger (azione dei nitrosoderivati sopra le idrossilammine aromatiche) conduce sempre, come è noto, ad un prodotto simmetrico od a miscugli di prodotti simmetrici.

Matematica. — *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni.* Nota di MARINO PANNELLI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Nell'ultimo paragrafo della sua classica Memoria: *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischen Gebilde,* pubblicata nel volume VIII dei Mathematische Annalen, Noether esamina alcuni caratteri di una varietà a tre dimensioni, definita da un'equazione omogenea fra cinque variabili, deducendoli dalla considerazione del sistema delle superficie canoniche, tracciato sulla varietà stessa, supposta d'ordine n, dalle varietà aggiunte d'ordine $n-5$. Essi sono: il numero p, Raumgeschlecht, di queste varietà aggiunte linearmente indipendenti fra loro; il Flächengeschlecht $p^{(1)}$ e il Curvengeschlecht $p^{(2)}$ di una superficie canonica; il genere $p^{(3)}$ della curva d'intersezione di due di tali superficie; e il numero $p^{(4)}$ dei punti comuni a tre delle superficie medesime. Accanto a questi invarianti, che, in virtù del loro significato, si dicono *geometrici,* se ne possono considerare altri, che si denominano *numerici*, perchè definiti da espressioni numeriche formate con i caratteri di un sistema qualunque di superficie dato nella varietà, e con quelli del sistema aggiunto. Siffatti invarianti sostituiscono i precedenti, nei casi in cui questi non hanno più senso; coincidono con essi, quando la varietà data soddisfa a certe condizioni; infine sono nuovi caratteri invariantivi per le varietà, nelle quali queste condizioni non si trovano verificate. Lo studio degli invarianti numerici di una varietà costituisce l'oggetto della presente Nota.

Il procedimento col quale si riesce a trovare questi invarianti è naturalmente simile a quello che si segue per la ricerca degli invarianti analoghi sopra una superficie. Qui si è in particolar modo tenuta presente la Memoria di Enriques: *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche*, inserita nel volume XXXVII degli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino.

Riguardo alla varietà data, si suppone che essa possa trasformarsi in un'altra W di un iperspazio affatto priva di singolarità; e a quest'ultima si intendono sempre riferite le ulteriori considerazioni.

Sui sistemi lineari $|S|$ di superficie S, che si prenderanno in esame nella varietà W, si fanno ipotesi e convenzioni analoghe a quelle, che vengono ammesse nella citata Memoria di Enriques, per i sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie.

1. In questo primo numero si trovano esposte alcune proprietà, di cui si fa uso in seguito, sulla dimostrazione delle quali qui per brevità si sorvola.

I. « Il genere aritmetico P e l'invariante Ω di Castelnuovo-Enriques « di una superficie F, somma di r superficie F_r, sono rispettivamente dati « dalle formole:

$$(1) \qquad P = \Sigma P_i + \Sigma g(F_i F_j) + \Sigma(F_i F_j F_h) - \frac{(r-1)(r-2)}{2}$$

$$(2) \qquad \Omega = \Sigma\Omega_i + 8\left[\Sigma g(F_i F_j) + (F_i F_j F_h) - \frac{(r-1)(r-2)}{2}\right] - [2\Sigma(F_i F_j F_h) + \Sigma(F_i F_i F_j) + 9(r-1)]$$

« dove P_i ed Ω_i sono gli invarianti analoghi di una qualunque F_i di quelle « r superficie; $g(F_i F_j)$ rappresenta il genere della curva d'intersezione (va- « riabile) di due F_i e F_j delle superficie medesime; $(F_i F_i F_j)$, il grado del « sistema lineare di curve tracciato sopra F_j dal sistema lineare di super- « ficie cui appartiene F_i; ed $(F_i F_j F_h)$, il numero dei punti comuni (varia- « bili) di tre F_i, F_j, F_h delle superficie date. Infine le somme Σ debbono « essere estese a tutti gli enti simili a quelli messi in evidenza » (¹).

Dalle due formole precedenti segue immediatamente l'altra:

$$(3) \qquad 8P - \Omega = 8\Sigma P_i - \Sigma\Omega_i + 2\Sigma(F_i F_j F_h) + \Sigma(F_i F_i F_j) + 9(r-1).$$

II. « Le superficie Iacobiane S_j dei sistemi lineari ∞^3 contenuti in un « sistema lineare $|S|$ (∞^3 almeno) di superficie S, dato nella varietà W, « appartengono ad un medesimo sistema lineare ».

Questo sistema può contenere elementi fissi; ed effettivamente contiene una curva fissa, o un determinato numero di punti fissi, se il sistema $|S|$ è ∞^4, oppure ∞^5. Tali elementi si riguardano come virtualmente non esistenti, e così risulta un sistema lineare completo, che si chiama *sistema Iacobiano*, e si indica col simbolo $|S_j|$.

III. « Ogni superficie S_j del sistema $|S_j|$ taglia una superficie assegnata S « del sistema dato $|S|$ secondo una curva che appartiene al sistema Iacobiano « determinato sopra questa superficie dal sistema caratteristico della super- « ficie medesima ».

IV. « Dato nella varietà W un sistema lineare ∞^3 di superficie S, « virtualmente privo di elementi base, la Iacobiana del sistema $|S+T|$, « che si ottiene sommando ad $|S|$ una superficie T, si compone della Iaco- « biana del sistema $|S|$ e della superficie T contata quattro volte ».

Si dice *sistema aggiunto* ad un sistema dato $|S|$ e si indica con $|S_a|$, il sistema definito dalla relazione simbolica:

$$(4) \qquad |S_a| = |S_j - 3S|.$$

(¹) Per un caso particolare delle formole (1) e (2), veggasi il n. 4*a*) del § 1° della Memoria di Severi: *Su alcune questioni di postulazione*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVII.

Si indicherà con n il grado del sistema $|S|$, e con p il genere della curva d'intersezione (variabile) di due superficie del sistema medesimo; n_a e p_a avranno i significati analoghi rispetto al sistema aggiunto $|S_a|$; ossia si porrà:

$$(5) \qquad (SSS) = n \quad , \quad g(SS) = p \quad , \quad (S_a S_a S_a) = n_a \quad , \quad g(S_a S_a) = p_a .$$

In virtù del teorema IV e della data definizione di sistema aggiunto, si dimostra come nel caso delle superficie:

V. « Se $|S|$ ed $|S'|$ sono due sistemi lineari irriducibili, virtualmente privi « di elementi base, si ha:

$$(6) \qquad |S + S'|_a = |S + S'_a| = |S_a + S'| .$$

Dalla relazione (4) segue:

$$|(SS_a)| = |(SS_j) - 3(SS)|$$

e di qui, tenendo presente il teorema III e ricordando che una curva canonica di una superficie, presa insieme alle curve eccezionali e a tre curve di una qualunque rete irriducibile, costituisce una curva appartenente al sistema lineare completo determinato dalla Iacobiana della rete, si deduce:

VI. « Ogni superficie S_a del sistema $|S_a|$ taglia una superficie assegnata S « del sistema $|S|$, fuori delle curve eccezionali di questa superficie, secondo « una curva canonica della superficie medesima ».

Quindi detto Ω l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie S, si hanno le relazioni:

$$(7) \qquad g(SS_a) = \Omega \quad , \quad (SS_a S_a) = \Omega - 1$$

dalle quali segue:

$$(8) \qquad g(SS_a) = (SS_a S_a) + 1 .$$

Infine si osservi che si ha ancora:

$$(9) \qquad (SSS_a) = 2(p - 1) - n .$$

2. Si applichi la relazione (8) anzichè al sistema $|S|$, al sistema $|S + S_a|$; osservando che il sistema aggiunto a quest'ultimo, per la proprietà V del numero precedente è $|S_a + S_a| = |2S_a|$, si ottiene:

$$(10) \qquad g(S + S_a , 2S_a) = (S + S_a , 2S_a , 2S_a) + 1 .$$

Ora si ha:

$$g(S + S_a , 2S_a) = 2g(SS_a) + 2g(S_a S_a) + 3(SS_a S_a) + (S_a S_a S_a) - 3$$

ossia per le formole (5) e (7):

$$g(S + S_a , 2S_a) = 5\Omega + 2p_a + n_a - 6 .$$

Inoltre:

$$(S + S_a \,,\, 2S_a \,,\, 2S_a) = 4(SS_a S_a) + 4(S_a S_a S_a) = 4\Omega + 4n_a - 4 \,.$$

Sostituendo questi valori nell'eguaglianza (10), si trova:

I. « Fra il grado n_a e il genere p_a ha luogo la relazione:

$$3n_a - 2p_a = \Omega - 3 \,. \tag{11}$$

In virtù della prima delle formole (7), il genere della curva $(S + S_a \,,\, 2S_a)$ è dato dall'invariante di Castelnuovo-Enriques relativo alla superficie $S + S_a$. Quindi calcolando questo invariante per mezzo della formola (2), si ha altresì:

$$g(S + S_a \,,\, 2S_a) = \Omega + \Omega_a + 8g(SS_a) - (SSS_a) - (SS_a S_a) - 9$$

ossia per le (7) e la (9):

$$g(S + S_a \,,\, 2S_a) = \Omega_a + 8\Omega - 2p + n - 6 \,.$$

Con questa nuova espressione del $g(S + S_a \,,\, 2S_a)$ e conservando per $(S + S_a \,,\, 2S_a \,,\, 2S_a)$ il valore precedentemente calcolato, l'eguaglianza (10) somministra ancora:

II. « Fra i caratteri n_a ed Ω_a ha luogo la relazione:

$$4n_a - \Omega_a = 4\Omega - 2p + n - 3 \,. \tag{12}$$

Eliminando Ω fra la (11) e la (12) si ha infine:

III. « Fra i tre caratteri n_a, p_a ed Ω_a ha luogo la relazione:

$$\Omega_a + 8(n_a - p_a) = 2p - n - 9 \,. \tag{13}$$

3. In virtù del teorema V del n. 1, il genere aritmetico di una superficie $S + S'_a$ è eguale a quello di una superficie $S_a + S'$. Quindi per la formola (1), si ha intanto:

$$P + P'_a + g(SS'_a) = P' + P_a + g(S' S_a) \tag{14}$$

Inoltre dalla relazione (6) segue ancora:

$$(S_a S) + (S_a S'_a) = (S_a S_a) + (S_a S')$$
$$(S'_a S) + (S'_a S'_a) = (S'_a S_a) + (S'_a S')$$

donde, sommando, si ricava:

$$(SS_a) + (SS'_a) + (S'_a S'_a) = (S' S'_a) + (S' S_a) + (S_a S_a)$$

epperò:

$$g(SS_a) + g(SS'_a) + g(S'_a S'_a) + (SS_a S'_a) + (SS'_a S'_a)$$
$$= g(S' S'_a) + g(S' S_a) + g(S_a S_a) + (S' S'_a S_a) + (S' S_a S_a)$$

La stessa relazione (6) dà:

$$(SS_a S_a) + (S'_a S_a S_a) = (S_a S_a S_a) + (S' S_a S_a)$$
$$(SS_a S'_a) + (S'_a S_a S'_a) = (S_a S_a S'_a) + (S' S_a S'_a)$$
$$(SS'_a S'_a) + (S'_a S'_a S'_a) = (S_a S'_a S'_a) + (S' S'_a S'_a)$$

donde, sommando, si deduce:

$$(SS_a S'_a) + (SS'_a S'_a) + (SS_a S_a) + (S'_a S'_a S'_a) = (S' S'_a S_a) + (S' S_a S_a) + S' S'_a S'_a) + (S_a S_a S_a).$$

Sottraendo, questa eguaglianza dalla precedente, si ottiene:

$$g(SS_a) + g(SS'_a) + g(S'_a S'_a) - (SS_a S_a) - (S'_a S'_a S'_a)$$
$$= g(S' S'_a) + g(S' S_a) + g(S_a S_a) - (S' S'_a S'_a) - (S_a S_a S_a)$$

ossia, per le formole (5) e (7), e le analoghe relative ai sistemi $|S'|$ ed $|S'_a|$:

$$p'_a - n'_a + g(SS'_a) = p_a - n_a + g(S' S_a).$$

Infine, si sottragga questa eguaglianza dalla (14); dalla risultante segue immediatamente:

$$P_a - P + n_a - p_a = P'_a - P' + n'_a - p'_a.$$

Dunque:

I. « L'espressione

(15) $$\Delta = P_a - P + n_a - p_a + 3$$

« è un invariante della varietà ».

Sostituendo ad $n_a - p_a$ il suo valore dato dalla (13), si ha ancora:

II. « L'invariante Δ è anche espresso dalla formola:

(16) $$8\Delta = 8P_a - \Omega_a - 8P + 2p - n + 15.$$

4. In virtù della relazione (6), si ha:

$$g(S + S', S + S'_a) = g(S' + S, S' + S_a)$$

donde, calcolando questi due generi segue:

$$g(SS) + g(SS'_a) + g(S' S'_a) + (SSS') + (SSS'_a) + 2(SS' S'_a)$$
$$= g(S' S') + g(S' S_a) + g(SS_a) + (S' S' S) + (S' S' S_a) + 2(S' SS_a)$$

La stessa relazione (6) dà:

$$(SSS) + (SSS'_a) = (SSS_a) + (SSS')$$
$$(S' S' S) + (S' S' S'_a) = (S' S' S_a) + (S' S' S')$$
$$(SS' S) + (SS' S'_a) = (SS' S_a) + (SS' S')$$

donde facilmente si deduce:

$$(SSS') + (SSS'_a) + 2(SS'S'_a) + (S'S'S'_a) - (S'S'S')$$
$$= (S'S'S) + (S'S'S_a) + 2(S'SS_a) + (SSS_a) - (SSS).$$

Sottraendo questa eguaglianza dalla precedente, si ottiene:

$$g(SS) + g(SS'_a) + g(S'S'_a) - (S'S'S'_a) + (S'S'S')$$
$$= g(S'S') + g(S'S_a) + g(SS_a) - (SSS_a) + (SSS)$$

ossia, per le formole (5), (7) e (9), e le analoghe relative ai sistemi $|S'|$ ed $|S'_a|$:

$$\Omega' + p - 2p' + 2n' + g(SS'_a) = \Omega + p' - 2p + 2n + g(S'S_a).$$

Infine, si sottragga questa eguaglianza dalla (14); dalla risultante segue immediatamente:

$$P_a - P - \Omega + 3p - 2n = P'_a - P' - \Omega' + 3p' - 2n'$$

Dunque:

I. « L'espressione

(17) $$\Delta^{(1)} = P_a - P - \Omega + 3p - 2n - 3$$

« è un invariante della varietà ».

Dalle relazioni (16) e (17) segue subito:

$$8(\Delta^{(1)} - \Delta) = \Omega_a - 8\Omega + 22p - 15n - 39$$

e quindi posto:

(18) $$\Delta^{(2)} = \Omega_a - 8\Omega + 22p - 15n - 14$$

si ha intanto:

II. « L'espressione $\Delta^{(2)}$ è un invariante della varietà ».

Ed inoltre:

III. « Fra gli invarianti Δ, $\Delta^{(1)}$ e $\Delta^{(2)}$ ha luogo la relazione:

(19) $$8(\Delta^{(1)} - \Delta) = \Delta^{(2)} - 25.$$

5. In virtù del teorema V del n. 1, il grado del sistema $|S + S'_a|$ è eguale a quello del sistema $|S' + S_a|$; quindi, calcolando questi due gradi, si ha:

$$(SSS) + 3(SSS'_a) + 3(SS'_aS'_a) + (S'_aS'_aS'_a)$$
$$= (S'S'S') + 3(S'S'S_a) + 3(S'S_aS_a) + (S_aS_aS_a).$$

La relazione (6) dà ancora:

$$(SSS'_a) + (S'_aSS'_a) = (S_aSS'_a) + (S'SS'_a)$$
$$(SS'S_a) + (S'_aS'S_a) = (S_aS'S_a) + (S'S'S_a)$$
$$(S_aSS_a) + (S'SS_a) = (SSS_a) + (S'_aSS_a)$$
$$(S_aS'S'_a) + (S'S'S'_a) = (SS'S'_a) + (S'_aS'S'_a)$$

donde facilmente si deduce:

$$(SSS'_a) + (SS'_a S'_a) - (SS_a S_a) - (S' S' S'_a)$$
$$= (S' S' S_a) + (S' S_a S_a) - (S' S'_a S'_a) - (SSS_a) .$$

Sottraendo questa eguaglianza, dopo averne moltiplicati ambo i membri per 3, dalla precedente, si ottiene:

$$(SSS) + 3(SS_a S_a) + 3(S' S' S'_a) + (S'_a S'_a S'_a)$$
$$= (S' S' S') + 3(S' S'_a S'_a) + 3(SSS_a) + (S_a S_a S_a)$$

donde, per le formole (5), (7) e (9) e le analoghe relative ai sistemi $|S'|$ e $|S'_a|$, segue immediatamente:

$$n_a - 3\Omega + 6p - 4n = n'_a - 3\Omega' + 6p' - 4n' .$$

Dunque:

I. « L' espressione

(20) $$\Delta^{(3)} = n_a - 3\Omega + 6p - 4n - 3$$

« è un invariante della varietà ».

Dalle relazioni (15), (17) e (20) segue subito:

$$\Delta^{(1)} + \Delta^{(3)} - \Delta = p_a - 4\Omega + 9p - 6n - 9$$

e quindi posto:

(21) $$\Delta^{(4)} = p_a - 4\Omega + 9p - 6n - 5$$

si ha intanto:

II. « L' espressione $\Delta^{(4)}$ è un invariante della varietà ».

Ed inoltre:

III. « Fra gli invarianti Δ, $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(3)}$ e $\Delta^{(4)}$ ha luogo la relazione:

(22) $$\Delta^{(1)} + \Delta^{(3)} - \Delta^{(4)} = \Delta - 4 .$$

Infine, se dalle formole (18), (20) e (21) si ricavano i valori di Ω_a, n_a e p_a, e questi si sostituiscono nelle (11) e (12), si ottiene ancora:

IV. « Fra gli invarianti $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$ e $\Delta^{(4)}$ hanno luogo le due relazioni:

(23) $$\begin{cases} \Delta^{(2)} - 1 = 4\Delta^{(3)} \\ 2\Delta^{(4)} - 2 = 3\Delta^{(3)} \end{cases}$$

Facendo le medesime sostituzioni nella formola (13), si ricava un'altra relazione fra questi stessi invarianti $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, $\Delta^{(4)}$, che è quella stessa che si otterrebbe eliminando $\Delta^{(1)} - \Delta$ fra la (19) e la (22): essa però è una conseguenza delle due precedenti (23).

Sarà dimostrato in una prossima Nota, che Δ è un invariante assoluto, mentre $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$ e $\Delta^{(4)}$ sono invarianti relativi; ed inoltre che questi coincidono con gli invarianti $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(4)}$ e $p^{(3)}$ di Noether nel caso in cui la varietà non contenga elementi eccezionali.

Matematica. — *Sul Principio dei lavori virtuali in rapporto all'attrito.* Nota di E. Almansi, presentata dal Socio V. Volterra.

Meccanica. — *Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti.* Nota di Giuseppe Lauricella, presentata dal Socio U. Dini.

Matematica. — *Sopra una ricerca di limite.* Nota di Ettore Bortolotti, presentata dal Corrispondente E. Cesàro.

Matematica. — *Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insiemi lineari.* Nota di Ettore Bortolotti, presentata dal Corrispondente E. Cesàro.

Matematica. — *Ricerche sulle funzioni derivate.* Nota di Beppo Levi, presentata dal Socio C. Segre.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions cylindriques.* Nota di Niels Nielsen, presentata dal Socio U. Dini.

§ 1. *Développements des deux produits* $J^{\nu}(x)\,J^{\pm\nu}(ix)$. — Dans mon *Traité des fonctions cylindriques* [1] j'ai donné la formule générale

$$(1)\qquad J^{\nu}(\alpha x)\,J^{\varrho}(\beta x) = \alpha^{\nu}\,\beta^{\varrho}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^{s}\,A_s\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\varrho+2s},$$

où il faut admettre

$$(2)\qquad A_n = \frac{\alpha^{2n}\cdot F\left(-\nu-n\,,\,-n\,,\,1+\varrho\,,\,\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\right)}{n!\,\Gamma(\varrho+1)\,\Gamma(\nu+n+1)}\,;$$

il saute aux yeux que le cas particulier $\alpha=\beta=1$ présente un intérêt par-

[1] Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 20. Leipzig 1904.

ticulier, parce que la formule de Gauss nous permet de donner sous simple forme la série hypergéométrique qui figure au second membre de (2).

Or, il est très intéressant, ce me semble, que ces deux autres cas particuliers $\alpha = 1$, $\beta = i$, $\varrho = \pm \nu$ nous conduisent à des résultats analogues et aussi simples que le précédent.

En effet, étudions tout d'abord le cas $\varrho = \nu$, il s'agit de déterminer sous simple forme la série hypergéométrique

$$F(-\nu - n, -n, 1 + \nu, -1) = 1 + \\ + \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \cdot \frac{(\nu + n)(\nu + n - 1)\ldots(\nu + n - s + 1)}{(\nu + 1)(\nu + 2)\ldots(\nu + s)}.$$

Cela posé, remarquons que nous avons évidemment

$$F(-\nu - 2n - 1, -2n - 1, 1 + \nu, -1) = 0,$$

ce qui s'accorde bien avec la forme même de la série ordinaire qui représente la fonction cylindrique de première espèce, il ne nous reste qu'à la détermination de la somme susdite pour des valeurs *paires* de n.

A cet effet, écrivons sous cette forme plus simple la somme dont il s'agit

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} S_n(\nu) = 2 + 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{s} \cdot \frac{(\nu + 2n)(\nu + 2n - 1)\ldots(\nu + 2n - s + 1)}{(\nu + 1)(\nu + 2)\ldots(\nu + s)} + \\ + (-1)^n \binom{2n}{n} \cdot \frac{(\nu + 2n)(\nu + 2n - 1)\ldots(\nu + n + 1)}{(\nu + 1)(\nu + 2)\ldots(\nu + n)}, \end{aligned} \right.$$

nous aurons, après une simple réduction, cette équation aux différences finies

$$(4)\qquad S_n(\nu + 1) - S_n(\nu) = \frac{2n(2n - 1)}{(\nu + 1)(\nu + 2)} \cdot S_{n-1}(\nu).$$

Remarquons ensuite qu'un calcul direct donnera, en vertu de (3), pour de petites valeurs de r, une expression de la forme

$$(5)\qquad S_r(\nu) = (-1)^r \frac{(2)r!}{r!} \cdot \frac{1}{(\nu + 1)(\nu + 2)\ldots(\nu + r)},$$

puis supposons vraie pour $r = n - 1$ la formule (5), l'équation aux différences finies (4) aura comme solution générale une fonction de la forme

$$(6)\qquad f_n(\nu) = (-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{n!} \cdot \frac{1}{(\nu + 1)(\nu + 2)\ldots(\nu + n)} + C(\nu),$$

où $C(\nu)$ désigne une fonction arbitraire assujettie à satisfaire à la condition de périodicité $C(\nu + 1) = C(\nu)$.

Or, dans le cas particulier, où la fonction $f_n(\nu)$ est une fonction *rationnelle* de ν, $C(\nu)$ doit être indépendante de ν, de plus, remarquons l'identité $S_n(\infty) = 0$, tirée directement de (3), nous aurons dans le cas particulier

susdit $C(\nu) = 0$, ce qui montrera clairement que la formule (5) est vraie pour une valeur quelconque de r.

Cela posé, la formule générale (1) donnera finalement la série de puissances très intéressante

$$(7) \qquad J^{\nu}(x)\, J^{\nu}(ix) = i^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+4s}}{s!\, \Gamma(\nu+s+1)\, \Gamma(\nu+2s+1)},$$

qui est certainement nouvelle.

Dans le second cas $\varrho = -\nu$, il s'agit de trouver sous simple forme la somme

$$F(-\nu-n, -n, 1-\nu, -1).$$

A cet effet, prenons pour point de départ la formule de Gauss [1]

$$(\beta-1-(\gamma-\alpha)x) \cdot F(\alpha, \beta, \gamma+1, x) + (\gamma-\beta+1) \cdot F(\alpha, \beta-1, \gamma+1, x) = \\ = \gamma(1-x) \cdot F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

nous aurons immédiatement

$$F(-1-\nu-n, -n, -\nu, -1) = \\ = -\frac{n+1-\nu}{2\nu} \cdot F(-1-n-\nu, -n-1, 1-\nu, -1),$$

d'où après une simple réduction

$$F(-\nu-2n, -2n, 1-\nu, -1) = \frac{2^n \cdot (\nu+1)(\nu+3)\ldots(\nu+2n-1)}{\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\left(2-\frac{\nu}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{\nu}{2}\right)}$$

$$F(-\nu-2n-1, -2n-1, 1-\nu, -1) = -\frac{2^n \cdot \nu(\nu+2)\ldots(\nu+2n)}{\frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{3-\nu}{2} \cdots \frac{2n+1-\nu}{2}}$$

ce qui donnera en vertu des propriétés fondamentales et très connues de la fonction gamma :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} i^{\nu}\, J^{\nu}(x)\, J^{-\nu}(ix) = \cos\frac{\nu\pi}{2} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4s}}{(2s)!\, \Gamma\left(s+\frac{2+\nu}{2}\right) \Gamma\left(s+\frac{2-\nu}{2}\right)} - \\ - \sin\frac{\nu\pi}{2} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4s+2}}{(2s+1)!\, \Gamma\left(s+\frac{3+\nu}{2}\right) \Gamma\left(s+\frac{3-\nu}{2}\right)}, \end{aligned} \right.$$

[1] *Disquisitiones generales circa functiones a serie infinita* etc. § 8. Comment. Gotting. t. 2; 1813.

d'où en mettant $-ix$ au lieu de x, ces deux formules plus élégantes

$$(9)\quad \begin{cases} i^{\nu} J^{\nu}(x) J^{-\nu}(ix) + i^{-\nu} J^{\nu}(ix) J^{-\nu}(x) = \\ \qquad = 2 \cos \dfrac{\pi\nu}{2} \cdot \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} \dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{4s}}{(2s)!\, \Gamma\left(s + \dfrac{2+\nu}{2}\right) \Gamma\left(s + \dfrac{2-\nu}{2}\right)} \\ i^{\nu} J^{\nu}(x) J^{-\nu}(ix) - i^{-\nu} J^{\nu}(ix) J^{-\nu}(x) = \\ \qquad = 2 \sin \dfrac{\pi\nu}{2} \cdot \displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty} \dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{4s+2}}{(2s+1)!\, \Gamma\left(s + \dfrac{3+\nu}{2}\right) \Gamma\left(s + \dfrac{3-\nu}{2}\right)}; \end{cases}$$

les trois dernières formules sont certainement nouvelles aussi.

§ 2. *Applications: Equation différentielle, intégrales définies.* — Le développement trouvé de (8) pour la fonction

$$y = J^{\nu}(\sqrt{x})\, J^{\nu}(\sqrt{-x})$$

nous conduira naturellement à chercher pour y une équation différentielle de la forme

$$(10)\qquad y^{(4)} + \frac{a}{x} y^{(3)} + \frac{b}{x^2} y^{(2)} + \frac{c}{x^3} y^{(1)} + \left(\frac{\alpha}{x^2} + \frac{d}{x^4}\right) y = 0.$$

A cet effet, introduisons dans (10) la série susdite, puis mettons

$$\omega = \nu + 2s \quad , \quad s = \frac{\omega - \nu}{2} \quad , \quad s + \nu = \frac{\omega + \nu}{2},$$

il résulte, en cherchant le coefficient de la puissance $x^{\nu+2s-4}$, une condition de la forme

$$\omega(\omega-1)(\omega-2)(\omega-3) + a\omega(\omega-1)(\omega-2) + b\omega(\omega-1) + c\omega + d + \\ + 4\alpha\omega(\omega-1)(\omega^2-\nu^2) = 0$$

qui doit être satisfaite par une infinité de valeurs de ω, ce qui donnera immédiatement l'équation différentielle cherchée

$$(11)\qquad y^{(4)} + \frac{5}{x} y^{(3)} + \frac{4-\nu^2}{x^2} y^{(2)} - \frac{1}{4x^2} \cdot y = 0,$$

qui est extrêmement simple.

Cherchons maintenant l'intégrale complète de (11) en y introduisant la série

$$y = \sum_{s=0}^{s=\infty} c_s \cdot x^{k+2s},$$

nous aurons, après une légère transformation de la variable indépendante, la proposition suivante:

L'intégrale complète de l'équation différentielle

$$(12)\qquad Z^{(4)} + \frac{4}{x}\cdot Z^{(3)} + \frac{1-4\nu^2}{x^2}\cdot Z^{(2)} - \frac{1-4\nu^2}{x^3}\cdot Z^{(1)} - 4Z = 0$$

se présente sous la forme

$$(13)\quad Z = c_1 J^\nu(x)\, J^\nu(ix) + c_2 J^\nu(x)\, Y^\nu(ix) + c_3 J^\nu(ix)\, Y^\nu(x) + c_4 Y^\nu(x)\, Y^\nu(ix),$$

où Y désigne la fonction cylindrique de seconde espèce, tandis que les c sont des constantes par rapport à x.

Comme une autre application des formules du § 1 nous avons à déterminer quelques intégrales définies d'une simple forme.

A cet effet, appliquons tout d'abord l'intégrale *eulérienne* de seconde espèce

$$\int_0^\infty e^{-tx}\, t^{\nu-1}\, dt = \frac{\Gamma(\nu)}{x^\nu}\quad,\quad \Re(x) \geqq 0\quad,\quad \Re(\nu) > 0,$$

nous aurons immédiatement, en vertu de (7) et (8), ces deux formules intégrales

$$(14)\qquad \int_0^\infty J^\nu\left(\sqrt{2+x}\right) J^\nu\left(\sqrt{-2+x}\right) e^{-t}\, dt = J^\nu(ix)$$

$$(15)\qquad i^\nu \int_0^\infty J^\nu\left(\sqrt{2+x}\right) J^{-\nu}\left(\sqrt{-2+x}\right) e^{-t}\, dt = \Pi^\nu(ix) - i\, X^\nu(ix),$$

où Π et X désignent les fonctions de Poisson-Anger [1], savoir:

$$\Pi^\nu(x) = \cos\frac{\nu\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{\Gamma\left(s+\frac{2+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{2-\nu}{2}\right)}$$

$$X^\nu(x) = \sin\frac{\nu\pi}{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1}}{\Gamma\left(s+\frac{3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{3-\nu}{2}\right)};$$

dans (14) il faut supposer $\Re(\nu) > -1$, tandis que (15) est valable pour une valeur finie quelconque de ν.

Cela posé, appliquons la formule de Weierstrass [2]

$$(16)\qquad \frac{1}{\Gamma(\varrho)} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\mathfrak{C}} e^t\cdot t^{-\varrho}\, dt,$$

[1] Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, p. 47. Leipzig 1904.

[2] Voir mon: Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 147. Leipzig 1906.

où w désigne un chemin d'intégration qui renferme l'axe des nombres négatifs avec l'orgine en entourant dans le sens direct ce dernier point, nous aurons immédiatement ces inversions des formules (14) (15)

$$(17)\qquad J^{\nu}(\sqrt{x})\,J^{\nu}(\sqrt{-x}) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{w}\frac{e^{t}}{t}\cdot J^{\nu}\left(\frac{ix}{2t}\right)dt$$

$$(18)\qquad J^{\nu}(\sqrt{x})\,J^{-\nu}(\sqrt{-x}) = \frac{i^{-\nu}}{2\pi i}\cdot\int_{w}\frac{e^{t}}{t}\left(\Pi^{\nu}\left(\frac{ix}{2t}\right) - X^{\nu}\left(\frac{ix}{2t}\right)\right)dt,$$

formules qui sont valables pour des valeurs finies quelconques de x et ν.

§ 3. *Séries analogues à celles de C. Neumann.* — L'intégrale curviligne (17) que nous venons de développer est d'un grand intérêt.

En effet, considérons en premier lieu cette série *neumanienne* de première espèce [1]

$$(19)\qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!}\cdot J^{\nu+2s}(x),$$

valable pour une valeur finie quelconque de x, tandis que ν ne doit pas être égal à un négatif entier, les formules (16), (17) donnent immédiatement ce développement analogue

$$(20)\qquad \frac{\left(\frac{ix}{4}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!}\,J^{\nu+2s}(\sqrt{x})\,J^{\nu+2s}(\sqrt{-x}),$$

valable où l'est (19).

En second lieu introduisons la série *kapteynienne* [2] de première espèce

$$(21)\qquad \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \nu^{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma(\nu+s)}{s!\,(\nu+2s)^{\nu+1}}\cdot J^{\nu+2s}((\nu+2s)\,x),$$

où ν ne doit pas être égal à un négatif entier; dans le cas $\nu=0$, la formule (21) se réduit à l'identité $1=1$, tandis que la série générale (21) est certainement absolument convergente pourvu que $|x|<\omega$, où ω désigne la racine positive de cette équation transcendante

$$\frac{x}{2}\cdot e^{1+\frac{x^{2}}{4}} = 1 \quad , \quad \omega = 0{,}659\ldots$$

Cela posé, nous aurons évidemment, en vertu de (17), ce développement analogue

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\left(\frac{ix}{4}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} = \nu^{2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\Gamma\quad(\nu+s)}{s!\,(\nu+2s)^{\nu+1}}\cdot\\ \cdot\,J^{\nu+2s}\left(\sqrt{(\nu+2s)\,x}\right)\cdot J^{\nu+2s}\left(\sqrt{-(\nu+2s)\,x}\right)\end{aligned}\right.$$

(1) Zylinderfunktionen, p. 273.
(2) Ibid., p. 303.

qui est valable pour une valeur finie quelconque de x, pourvu que ν ne soit pas égal à un négatif entier.

Considérons maintenant la série de puissances

$$(23) \qquad f(x) = a_0 + a_1\left(\frac{x}{4}\right) + a_2\left(\frac{x}{4}\right)^2 + a_3\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \cdots$$

dont le rayon de convergence et égal à ϱ, puis mettons dans (21) (22) $\nu+1, \nu+2, \nu+3, \ldots$ au lieu de ν, une application de la méthode que j'ai expliquée dans mes recherches sur les séries *neumanniennes* [1] donnera ce théorème nouveau :

La série de puissances (23) *est développable en séries de fonctions cylindriques, comme suit:*

$$(24) \qquad f(x) = \left(\frac{4}{ix}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} i^{-s} \cdot \mathrm{A}_s \cdot \mathrm{J}^{\nu+s}\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{J}^{\nu+s}\left(\sqrt{-x}\right)$$

$$(25) \qquad f(x) = \left(\frac{4}{ix}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} i^{-s} \cdot \mathrm{B}_s \cdot \mathrm{J}^{\nu+s}\left(\sqrt{(\nu+s)x}\right) \mathrm{J}^{\nu+s}\left(\sqrt{-(\nu+s)x}\right),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(26) \qquad \mathrm{A}_n = (\nu+n) \cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \Gamma(\nu+n-2s+1)\,\Gamma(\nu+n-s) \cdot a_{n-2s}$$

$$(27) \qquad \mathrm{B}_n = \frac{1}{(\nu+n)^{\nu+1}} \cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (\nu+n-2s)^2}{s!\,(\nu+n)^{n-2s}} \cdot$$
$$\cdot\, \Gamma(\nu+n-2s+1)\,\Gamma(\nu+n-s) \cdot a_{n-2s}:$$

Les deux séries ainsi obtenues et la série de puissances donnée sont en même temps convergentes, oscillantes ou divergentes, et la convergence est toujours du même caractère: absolue ou non, uniforme ou non.

Remarquons encore que les deux séries (24) et (25) présentent la même analogie que j'ai développée, dans mon *Traité* [2] susdit, entre les séries *neumanniennes* et *kapteyniennes*.

On voit du reste que les deux coefficients A_n et B_n deviennent généralement plus compliqués que ceux obtenus en développant en séries *neumanniennes* ou *kapteyniennes* la même fonction $f(x)$. La raison de ce fait est à chercher dans le diviseur $\Gamma(\nu+1)$ qui figure aux premiers membres des deux développements fondamentaux (20) et (22).

[1] Loc. cit. p. 266.
[2] Zylinderfunktionen, p. 303.

Considérons maintenant ce développement bien connu [1]

$$(28)\quad J^{\nu}(\alpha x) = \alpha^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!\,\Gamma(\nu+1)} \cdot F(\nu+s\,,-s\,,\nu+1\,,\alpha^2)\,J^{\nu+2s}(x)$$

applicable pour des valeurs finies quelconques de x et α, la formule (17) donnera immédiatement la formule analogue:

$$(29)\quad J^{\nu}(\sqrt{\alpha x})\,J^{\nu}(\sqrt{-\alpha x}) = \alpha^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!\,\Gamma(\nu+1)} \cdot$$

$$\cdot\, F(\nu+s\,,-s\,,\nu+1\,,\alpha^2)\,J^{\nu+2s}(\sqrt{x})\,J^{\nu+2s}(\sqrt{-x})\,,$$

qui est valable où l'est (28).

Pour accentuer la flexibilité extrêmement grande des fonctions cylindriques nous avons à citer encore ces développements particuliers

$$(30)\quad 1 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s\, J^{\nu+2s}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s\,(J^s(x))^2 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s\, J^s(x)\,J^s(ix)\,,$$

où nous avons posé pour abréger $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_s = 2$ pour $s \geqq 1$. Les deux dernières de ces formules (30) sont des conséquences immédiates de la première, comme le montrent clairement la formule intégrale (17) et une formule analogue que j'ai développée dans une Note qui paraîtra dans le Journal de Crelle.

Fisica. — *Separazione quantititativa del radiotorio dai fanghi di Echaillon e Salins Moutier* [2] Nota di O. Angelucci, presentata dal Corrispondente A. Sella.

Fin dai primi studi di Blanc [3] *Sui costituenti radioattivi dei sedimenti di Echaillon e Salins Moutiers* veniva dimostrata chiaramente la stretta analogia che la nuova sostanza radioattiva ha col torio. Era dunque di grande interesse poterne avere a disposizione una certa quantità per completarne lo studio fisico, e per stabilire, ove fosse possibile, oltre al peso atomico, qualche tipo di combinazione che permettesse di classificare il nuovo elemento nel sistema di Mendelejeff.

Contemporaneamente a Blanc, Hahn [4] aveva intrapreso questo studio, e dalle misure eseguite da Sackur [5] e da altri, riuscì a stabilire la so-

(1) Loc. cit. p. 275.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico-Farmaceutico della R. Università di Roma.

(3) Phil. Mag., gennaio 1905; Comptes Rendus 1er. Congrès Radiologie, Liège, 1906; Rendic. Acc. Lincei, XIV, 2° sem. pag. 322; XV, 1° sem. pagg. 328, 349.

(4) Z. ph. Ch. 51, 717.

(5) Ber. 38, 1756.

miglianza delle proprietà radioattive di esso con quelle dei sali di torio, ed appunto per questo lo chiamò *radiotorio*.

Chimicamente crede che appartenga al gruppo dell'ammoniaca; ma a me sembra ancora prematuro un giudizio in proposito, perchè sebbene questo elemento precipiti quantitativamente con ammoniaca, precipita quantitativamente anche insieme al solfato ed al carbonato di calcio ed ha l'ossalato insolubile; quindi potrebbe con maggior probabilità appartenere al gruppo del carbonato ammonico. Ed è anche da osservare che il precipitato che si ottiene con l'ammoniaca, può darsi che sia costituito non dall'idrato, ma dal carbonato formantesi per azione dell'anidride carbonica dell'aria.

Il materiale di cui Hahn si servì per l'estrazione del radiotorio fu un campione di torianite del Ceylan acquistato da Sir William Ramsay, che venne lavorato nella fabbrica Tyrer e C° di Londra e dal dott. Denison. Da k. 250 di minerale si ebbero 18 gr. di carbonati insolubili, da cui fu separato il radio col metodo di Giesel. Le acque madri furono trattate con idrogeno solforato, e nel liquido filtrato fu precipitato il radiotorio con ammoniaca.

La quantità estremamente piccola di materiale che io avevo a disposizione (circa 200 gr. di fango) rendevano impossibile l'applicazione del metodo adoperato nella lavorazione della torianite; e nemmeno potevo servirmi della cristallizzazione frazionata della parte di fango solubile in acido cloridrico, perchè la grande quantità di ferro presente penetrava nei cristalli che si formavano ed anche perchè parte della sostanza attiva veniva trascinata da essi. Anche gli altri metodi studiati da Hahn non erano applicabili, non solo perchè non permettevano una separazione quantitativa dell'elemento attivo, ma anche perchè non era con essi possibile isolarlo dal ferro.

Era perciò necessario di trovare un metodo nuovo che permettesse di separare una quantità infinitamente piccola di sostanza da un complesso di sali di cui una parte avevano molte proprietà chimiche comuni.

Una concentrazione di attività abbastanza considerevole era già stata ottenuta da Blanc precipitando con ammoniaca la soluzione cloridrica del fango. Da questo precipitato non era però possibile isolare la parte attiva dagli altri idrati (costituiti per la massima parte da ferro e manganese) con cui era mescolata; inoltre nel liquido ne rimaneva ancora una quantità rilevante.

Dopo una numerosa serie di tentativi diretti specialmente alla separazione del radiotorio dagli elementi che precipitano con ammoniaca, mi accorsi che precipitando il calcio allo stato di solfato dalla soluzione cloridrica del fango, la parte attiva veniva quasi totalmente asportata.

Lavando però con acqua il precipitato raccolto su di un filtro per eliminare i sali di ferro la parte attiva si discioglieva, e nel precipitato non ne rimanevano che piccole traccie. Sicchè anche questo metodo che sembrava dare così buoni risultati, non era praticabile; ciò non ostante rendeva possibile una concentrazione abbastanza forte della sostanza attiva.

Per questo, prima di abbandonarlo, volli provare se, profittando della solubilità del cloruro ferrico nell'alcool e dell'insolubilità del solfato di calcio nello stesso solvente, fosse possibile ottenere un precipitato contenente soltanto solfato di calcio e radiotorio.

Alla soluzione cloridrica del fango aggiunsi metà del suo volume di alcool e alcuni cm^3 di acido solforico. Dopo poco tempo si incominciarono a formare dei cristallini di solfato di calcio, che il giorno vegnente raccolsi filtrandoli alla pompa e lavandoli ripetutamente con alcool a 90 per liberarli di tutto il cloruro ferrico di cui erano impegnati. In questo modo riuscii ad ottenere un solfato di calcio la cui soluzione dava apppena la reazione del ferro col solfocianato, e che, dalle misure fatte dal dott. Blanc, risultava contenere la totalità della sostanza attiva.

Con questo artifizio così semplice mi era perciò possibile di isolare quantitativamente la parte attiva degli altri elementi contenuti nel fango, e, ciò che più interessava, da quelli che precipitano con ammoniaca.

Il solfato di calcio attivo così ottenuto lo discioglievo in acqua acidulata con acido cloridrico e aggiungendo ammoniaca alla soluzione, ottenevo un precipitato contenente tutta la parte attiva.

Di questo metodo di separazione ho fatto il seguente controllo: ho trattati gr. 100 di fango ben polverizzati e secchi con due litri circa di acido cloridrico concentrato, facendo digerire a leggero calore in modo da non disciogliere la silice (60-70) per tre giorni. Sul principio si notava un copioso schiumeggiamento dovuto all'anidride carbonica messa in libertà, ed un abbondante sviluppo di cloro prodotto dalla presenza di ossidi superiori di manganese. Terminata la reazione, diluii con acqua la soluzione cloridrica concentrata e raccolsi su di un filtro la parte rimasta indisciolta, costituita per la massima parte di silice, lavandola accuratamente.

La parte indisciolta rappresentava il 15 % del fango.

Bollita con carbonato sodico si potè estrarre da questa qualche traccia di attività tipo radio.

Alla soluzione cloridrica convenientemente concentrata insieme alle acque di lavaggio, aggiunsi alcuni cm^3 di acido solforico e circa $^1/_2$ litro d'alcool, disturbando di quando in quando la cristallizzazione del solfato di calcio per ottenerlo in piccoli cristallini. Dopo un giorno raccolsi alla pompa il precipitato lavandolo diligentemente con alcool a 90, fino ad eliminare completamente il ferro.

Trattando questo solfato di calcio così purificato più volte con acqua acidulata con acido cloridrico, e precipitando le diverse soluzioni con ammoniaca, ottenni dei precipitati tenuissimi che contenevano appena traccie di ferro.

La sostanza attiva era quasi totalmente contenuta nei primi tre precipitati. Nel liquido insieme al solfato di calcio rimaneva disciolto il torio X

che si poteva estrarre insieme al carbonato di calce, precipitando con carbonato ammonico.

Questi risultati mi facevano sperare nella possibilità di estrarre dai sali di torio la sostanza attiva adoperando il metodo seguito per i fanghi. Dalle esperienze fatte in proposito, e non ancora condotte a termine, ho potuto però constatare che il solfato di calcio è solubile in una soluzione di cloruro o nitrato di torio con formazione di sali doppi che ora sto studiando e su cui spero di poter riferire tra non molto tempo. Anche il solfato di bario si comporta come quello di calcio: quello di stronzio avrà naturalmente la stesse proprietà.

Chimica. — *Sulle forme superiori di combinazione dell'argento* (1). Nota di G. A. Barbieri, presentata dal Socio G. Ciamician.

Berthélot (2), Sulc (3), Mulder (4) e Tanatar (5), cui dobbiamo le ricerche più accurate sulla composizione della sostanza che si deposita all'anodo in forma di cristalli neri, nell'elettrolisi delle soluzioni neutre di nitrato di argento, pure attribuendole formole diverse, concordano nell'ammettere che, appena formata, essa contenga più ossigeno del calcolato per Ag_2O_2 e che, soltanto in seguito, si trasformi, perdendo ossigeno, in Ag_2O_2 lentamente a temperatura ordinaria, più rapidamente a caldo o per ripetuti lavaggi con acqua. Questa riduzione spontanea che subisce il così detto perossido elettrolitico di argento, spiega perchè i primi (6) che ne determinarono la composizione, avendolo lavato ripetutamente con acqua per purificarlo, e seccato a lieve calore, ottennero dei risultati analitici in accordo colla formola Ag_2O_2.

Secondo Berthélot e Tanatar il primo prodotto dell'ossidazione anodica dell'argento sarebbe l'ossido estremamente instabile Ag_2O_3. Prescindendo ora dalle questioni se il composto anodico cristallizzi anidro e se il nitrato di argento che sempre lo accompagna faccia parte della sua molecola o sia, come ritiene Margrete Bose (7) intercluso quale sostanza estranea, è certo che l'ipotesi della formazione primaria di un ossido superiore a Ag_2O_2 è

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della L. Università di Ferrara.

(2) C. R., 90 653 (1880).

(3) Z. f. anorg. Ch., 12 89, 180 (1896), 24 305 (1900).

(4) Rec. trav. chim. Pays.-Bas., 15 1, 236 (1896), 16 57 (1897), 17 129 (1898), 18 91 (1899), 19 115 (1900), 22 385, 405 (1903).

(5) Z. f. anorg. Ch., 28 331 (1901).

(6) Fischer J. prakt. Ch., 33 237 (1844); Mahla. Ann. d. Ch., 82 295 (1852).

(7) Z. f. anorg. Ch., 44 237 (1905).

assai più verosimile di quella di Mulder che attribuisce al composto anodico la formola $3Ag_2O_2.AgNO_5$ ammettendo l'esistenza di un acido pernitrico HNO_5: ipotesi non confortata da nessun altro fatto. Di più Tanatar ha ottenuto per elettrolisi del fluoruro di argento un composto contenente argento, ossigeno e fluoro, in cui il contenuto in ossigeno è superiore al calcolato per Ag_2O_2. Non volendo ammettere l'esistenza di un ossido superiore a Ag_2O_2, bisognerebbe fare la supposizione che parte dell'ossigeno fosse combinato col fluoro: ciò che è assai poco probabile.

A mio parere anche la posizione che occupa l'argento nel sistema periodico fra il rame e l'oro, sta in accordo coll'esistenza di un ossido Ag_2O_3.

Finora vennero messi in rilievo soltanto i rapporti di somiglianza che il rame, l'argento e l'oro presentano nella loro forma inferiore di combinazione MX, mentre è noto che per tutti gli altri elementi le analogie si manifestano essenzialmente nelle forme limiti. Ricordiamo che secondo Mendeleieff (1) e Brauner (2) il rame, l'argento e l'oro, oltre che appartenere al primo gruppo, fanno parte del gruppo ottavo: essi devono quindi presentare nella loro forma limite quel passaggio graduale di proprietà che si riscontra per esempio nei loro eterologhi nickel, palladio e platino e in generale fra termini analoghi in tutti i gruppi. La forma limite dell'oro è AuX_3. Quanto al rame l'esistenza di un ossido Cu_2O_3 affermata da Krüger (3), da Crum (4), da Th. Osborn (5), esclusa da Mawrow (6) con esperienze invero poco convincenti, venne messa fuori di dubbio soltanto recentemente dal dott. Kuzma (7) con ricerche eseguite nel laboratorio del prof. Brauner.

Per l'argento che sta fra il rame e l'oro è prevedibile quindi una forma limite AgX_3 più stabile della CuX_3 e meno dell'AuX_3.

Da quanto precede risulta che lo studio delle forme superiori di combinazione dell'argento ha grande importanza, oltre che per sè stesso, per l'interessante problema di sistematica chimica ch'esso può aiutare a risolvere.

Ho inteso di portare un contributo a tale studio ricercando:

1° se l'ossido che si ottiene per elettrolisi sia un vero perossido, giacchè in tal caso non potrebbe servire per fissare il limite di combinazione dell'argento;

2° se l'argento possa dare composti al massimo in ambiente alcalino a somiglianza del rame e dell'oro.

(1) Lieb. Ann. Suppl., VIII (1872).
(2) Z. f. anorg. Ch., 32 18 (1902).
(3) Pogg. Ann., 62 445 (1844).
(4) Ann. d. Ch. 55 213 (1845).
(5) Am. Journ. [3], 32 333 (1886).
(6) Z. f. anorg. Ch., 33 233 (1900).
(7) Z. f. anorg. Ch., 32 9 (1902).

A. Piccini [1] nella sua classica Memoria: *I perossidi in relazione al sistema periodico degli elementi*, ha insegnato a distinguere gli ossidi che corrispondono all'acqua, dagli ossidi che corrispondono all'acqua ossigenata, cioè dai veri perossidi, mediante la proprietà caratteristica che hanno questi ultimi di ridurre in soluzione acida alcuni composti ricchi di ossigeno — MnO_2, PbO_2, $KMnO_4$ — riducendosi essi stessi.

Allo scopo di riconoscere se il cosidetto perossido d'argento che si ha per via elettrolitica, sia un vero perossido, ho pensato di farlo agire in soluzione acida sul permanganato di potassio, sul biossido di manganese e sul biossido di piombo. Il perossido di argento venne preparato secondo le indicazioni di Sulc [2] per elettrolisi di una soluzione di nitrato di argento. Esso si scioglie, com'è noto, assai facilmente in acido nitrico concentrato, dando un liquido di color nero seppia che viene istantaneamente decolorato dai riducenti e dall'acqua ossigenata.

Se il perossido di argento in soluzione nitrica provocasse la riduzione del permanganato a sale manganoso riducendosi per parte sua a nitrato di argento, si dovrebbe osservare, mescolando le due soluzioni intensamente colorate di perossido e di permanganato, una reciproca decolorazione.

In realtà la soluzione mista di perossido di argento e di permanganato potassico ha un colore bruno rossastro. Che in tale soluzione sia contenuto il permanganato inalterato si può dimostrare in modo molto semplice. Basta aggiungere a goccia a goccia alla soluzione mista una soluzione diluitissima di acqua ossigenata. Siccome questa riduce il perossido di argento prima del permanganato, si arriva a un punto in cui tutto il perossido è stato ridotto e il liquido mostra il colore violetto caratteristico del permanganato.

Si può eseguire un'esperienza analoga, impiegando invece dell'acqua ossigenata una soluzione di nitrato ceroso. Io ho osservato che i sali cerosi vengono ossidati a freddo istantaneamente a cerici dalla soluzione nitrica di perossido di argento, mentre è noto [3] che il permanganato a freddo li ossida con estrema lentezza. La soluzione nitrica di perossido di argento e di permanganato per aggiunta di un sale ceroso diventa violetta.

Anche il biossido di manganese e il biossido di piombo non agiscono come riducenti sulla soluzione nitrica di perossido di argento.

Se si accetta come esatta la regola di Piccini, non si può dunque considerare il composto che si forma all'anodo nell'elettrolisi del nitrato di argento come un vero perossido ma come un ossido superiore di argento, e si deve ritenere come erronea la supposizione di Mulder [4] che per tratta-

(1) Z. f. anorg. Ch., 12 169 (1896); L'Orosi, 19 37 (1896).
(2) Z. f. anorg. Ch., 24 309 (1900).
(3) Von Knorre, Z. angew. Ch., 1897, 685.
(4) Rec. trav. Ch. Pays-Bas, 17 129-176 (1898).

mento del cosidetto perossido di argento con acqua si formi dell'acqua ossigenata.

Nel suo comportamento coll'acqua ossigenata e coi sali cerosi, l'ossido superiore di argento presenta molta analogia col biossido di piombo. È noto infatti che i sali cerosi vengono ossidati a cerici per azione del PbO_2 e acido nitrico a freddo ([1]) e che il PbO_2 im ambiente acido viene istantaneamente ridotto dall'acqua ossigenata.. Inoltre Küster e Steinwehr ([2]) ritengono che l'ossido elettrolitico di argento si formi per un processo perfettamente analogo a quello secondo il quale negli accumulatori si forma il biossido di piombo, e recentemente Margrete Bose ([3]) ha riconosciuto che l'ossido elettrolitico di argento presenta conducibilità metallica come il biossido di piombo e il biossido di manganese.

I tentativi per ottenere dei composti di argento al massimo in soluzione alcalina non mi hanno ancora condotto ad un risultato definitivo: voglio tuttavia riferire alcune esperienze che mi sembrano presentare qualche interesse.

Elettrolizzando una soluzione satura a freddo di $KHCO_3$ con elettrodi di argento, ho osservato che l'anodo si copre dapprima di uno strato di ossido nero che a poco a poco passa in soluzione colorando il liquido anodico in rosso-bruno. L'esperienza venne eseguita in un piccolo bicchiere diviso in due scompartimenti da un cartone di amianto che fungeva da setto poroso. Gli elettrodi erano costituiti da due strette lamine di argento puro. La corrente era fornita da una pila Gülcher di cinquanta elementi. Togliendo la corrente, il liquido anodico abbandonato a sè, si scolorava a poco a poco. La decolorazione si produceva istantaneamente per aggiunta o di ammoniaca o di acqua ossigenata o di qualunque sostanza riduttrice.

Molto facilmente si può ottenere una soluzione avente gli stessi caratteri della precedente ossidando a caldo con persolfato di potassio una soluzione di carbonato di argento in bicarbonato potassico. Si prepara una soluzione satura a 80° di bicarbonato potassico e vi si fa cadere a goccia a goccia una soluzione molto diluita di nitrato di argento, finchè il precipitato di carbonato di argento non si scioglie più nell'eccesso di bicarbonato alcalino. Si aggiunge allora una soluzione concentrata di persolfato potassico e si scalda: il liquido assume un'intensa colorazione rosso-granato.

Se invece del bicarbonato potassico s'impiega il pirofosfato sodico, si ottiene una soluzione molto più stabile della precedente perchè si può conservare (al riparo della luce) per parecchie settimane. 25 gr. di pirofosfato sodico sciolti in 100 gr. di acqua possono mantenere in soluzione circa un decigrammo di nitrato di argento. Aggiungendo a questa soluzione alcalina

([1]) Von Knorre, Ber., 33 1924 (1900).
([2]) Zeitschr. f. Elektr., 4 451 (1898).
([3]) Z. f. anorg. Ch., 44 264 (1905).

di argento 100 cc. di una soluzione al 10 % di persolfato potassico si ha tosto una colorazione rossastra che a caldo aumenta rapidamente e in pochi minuti si cambia in un bel colore rosso-granato.

Tutte queste soluzioni rosse di argento vengono decolorate per aggiunta di ammoniaca, di acqua ossigenata, di sali d'idrazina e d'idrossilamina.

Che in esse l'argento sia contenuto in una forma di combinazione superiore alla MX, è dimostrato dal loro comportamento coi sali ferrosi e cobaltosi. Facendo agire sopra una soluzione alcalina di argento, ossidata con persolfato di potassio, una soluzione di solfato ferroso in bicarbonato o in pirofosfato alcalino, il liquido argentico viene istantaneamente decolorato, poi si separa argento metallico. Se invece del solfato ferroso si impiega solfato cobaltoso, le soluzioni argentiche da rosse diventano verdi perchè si forma del bicarbonato o del pirofosfato cobaltico. L'ossidazione del cobalto è certamente dovuta all'argento che passa da una forma polivalente alla forma comune monovalente, e non può venire attribuita al persolfato in eccesso presente nella soluzione argentica perchè ho constatato che il persolfato solo, a freddo e alla luce diffusa, non ossida i sali cobaltosi sciolti in bicarbonati o pirofosfati alcalini che molto lentamente.

È degno di nota questo altro fatto. Se si fa agire il persolfato sopra soluzioni di carbonato o di pirofosfato di argento in bicarbonati o pirofosfati alcalini, che siano torbide perchè contenenti in sospensione un po' di carbonato o di pirofosfato di argento, si ottengono ugualmente delle soluzioni rosse limpidissime. Dunque il sale di argento in causa dell'ossidazione diventa più solubile nel sale alcalino. Un fatto perfettamente analogo venne osservato da A. Job [1] per il cobalto. Il carbonato cobaltico è circa dieci volte più solubile del carbonato cobaltoso nei bicarbonati alcalini. Siccome nelle soluzioni dei sali di metalli pesanti in bicarbonati [2] e pirofosfati alcalini, verosimilmente i metalli entrano a far parte di anioni complessi, si può spiegare l'aumentata solubilità dei sali di argento dopo l'ossidazione, ammettendo che nella forma superiore l'argento abbia maggior tendenza a dare origine a complessi, ciò che del resto è previsto dalla teoria di Abegg e Bodländer sull'elettro-affinità [3] e si verifica per vari altri metalli, p. es. per il rame e per l'oro.

Quale forma di combinazione raggiunga l'argento nei liquidi rossi su descritti, per ora non è possibile dire. Forse potrà portare luce sull'argomento lo studio del composto nero insolubile che si ottiene trattando a freddo il nitrato di argento con persolfato potassico e sulla composizione del quale vennero emesse le opinioni più disparate [4].

(1) Ann. chim. phys. [7], 20 205 (1900).

(2) R. Luther e B. Krsnjavi, Z. f. anorg. Ch., 46 170 (1905).

(3) Z. f. anorg. Ch., 20 482 (1899).

(4) H. Marshall, Journ. chem. Soc., 59 771 (1891); R. Namias, L'Orosi, 23 218 (1900); N. Tarugi, Gazz. Ch., 32, II, 390 (1902).

Mineralogia. — *Appunti sulla scheelite di Traversella.* Nota di Ferruccio Zambonini, presentata dal Socio G. Strüver.

Chimica. — *Decomposizione elettrolitica di acidi organici bicarbossilici. Acido adipico* [1]. Nota del dott. B. Lino Vanzetti, presentata dal Socio G. Koerner.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Su alcuni minerali del granito di S. Fedelino (Lago di Como)* [1]. Nota di Emilio Repossi, presentata dal Socio G. Strüver.

Già da qualche anno sto occupandomi del rilievo geologico e petrografico delle valli Codera e dei Ratti, poste a nord del lago di Como e comprese tra la valle del Masino ad oriente e quella della Mera, sotto Chiavenna, ad occidente, e ciò col particolare scopo di delimitare e studiare compiutamente la massa granitica detta di Riva di Novate o di S. Fedelino.

Le mie osservazioni però, data l'estensione e la poca praticabilità della regione considerata, sono lungi dal potersi dir complete, e richiederanno ancora qualche tempo, prima che i risultati loro meritino di essere resi noti.

In considerazione di ciò, e perchè trattasi di argomento puramente mineralogico, e quindi non strettamente legato allo scopo finale del mio studio, credo opportuno dare fin d'ora notizia di alcuni minerali, forse non privi d'interesse, che rinvenni la scorsa estate in talune piccole litoclasi della massa granitica del monte Avedè in vicinanza di Novate, riservandomi, se sarà il caso, di tornare sull'argomento a lavoro compiuto.

Risalendo la valle Codera pel sentiero che segue il fianco destro della valle, superato il Dosso ed oltrepassate le alpi di Avedè, si attraversa un erto canalone, scendente dal monte Avedè, ingombro di massi granitici, che frequentemente si staccano dalle soprastanti pendici. In uno di questi massi, recentissimamente caduto, potei constatare la presenza, eccezionalmente rara nel granito di S. Fedelino, di alcune sottili spaccature parallele, le cui pianeggianti pareti erano totalmente ricoperte di minuti cristalli, degni di

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Museo Civico di Storia Naturale in Milano.

qualche attenzione per la varietà delle specie minerali rappresentate e pre la freschezza e nitidezza delle facce.

Le specie minerali, la cui esistenza fu constatata, sono: il *quarzo*, la *calcite*, la *titanite*, l'*epidoto*, la *prehnite*, la *muscovite*, la *clorite* e la *laumontite*.

Il *quarzo* predomina largamente sugli altri minerali. I suoi cristalli, limpidi ed incolori, impiantati direttamente sulle pareti delle litoclasi granitiche, sono allungati secondo l'asse verticale e presentano in questa direzione una dimensione massima di 6-7 millimetri con una media di 3-4 mm. L'abito cristallino è caratterizzato dalla presenza costante del prisma $\{2\bar{1}\bar{1}\}$; accompagnato sempre dai romboedri $\}100\{$, $\{22\bar{1}\}$, le cui facce sono ordinariamente assai limitate per lo sviluppo dei due romboedri acuti diretti $\{13\ \bar{2}\ \bar{2}\}$, $\{3\bar{1}\bar{1}\}$,

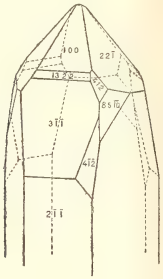


Fig. 1.

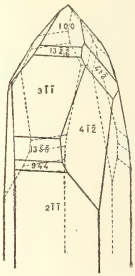


Fig. 2.

della bipiramide $\{41\bar{2}\{$ e dei due trapezoedri $\{4\bar{1}\bar{2}\}$, $\{8\ 5\ \bar{1}\bar{0}\}$. Queste ultime due forme, di solito molto sviluppate e frequentemente associate sul medesimo individuo (vedi fig. 1, che riproduce, ridotto quasi a modello, uno dei migliori cristalli), contribuiscono insieme coi romboedri acuti ad impartire ai cristalli una caratteristica forma acuminata, e costituiscono con la loro associazione la particolarità cristallograficamente più notevole del quarzo del S. Fedelino. E difatti la combinazione di due trapezoedri corrispondenti diretto ed inverso è nel quarzo, almeno per quanto so, un fatto molto raro. Le facce appartenenti a queste due forme sono sempre nettamente distinte anche pel loro aspetto: le facce del trapezoedro diretto $\{4\bar{1}\bar{2}\}$, che più frequentemente di quelle dell'inverso si trovano anche isolate (vedi fig. 2), sono infatti sempre perfettamente piane e lucenti, tanto da prestarsi in modo egregio alla misura goniometrica, mentre invece le facce del trapezoedro $\}8\ 5\ \bar{1}\bar{0}\{$, costantemente striate e rigate parallelamente allo spigolo $[8\ 5\ \bar{1}\bar{0}\ .\ 41\bar{2}]$, solo

in pochi casi forniscono un' immagine riconoscibile e determinabile in modo sicuro.

Pure striate sono sempre le facce della bipiramide trigonale e la disposizione di queste strie, parallele allo spigolo [41$\bar{2}$. 100], insieme all'osservazione delle figure di corrosione, ottenute mediante il solito attacco con acido fluoridrico, servì alla orientazione delle forme cristalline.

I romboedri acuti rappresentati da facce abbastanza ampie e sicuramente distinguibili, sono tutti diretti: oltre i due già ricordati, sono pure discretamente frequenti quelli di simbolo {13 $\bar{5}$ $\bar{5}$} e {9$\bar{4}\bar{4}$}: più rari {11 $\bar{4}$ $\bar{4}$} e {7$\bar{3}\bar{3}$}, il quale ultimo trovai una volta sola, ma con una faccia ampia e brillante.

Oltre i cristalli semplici, non son rari nel materiale raccolto anche i soliti geminati di compenetrazione completa, svelati, oltre che dalle figure di corrosione, dall'esistenza su di essi di facce di bipiramide e di trapezoedro sopra vertici consecutivi.

Le forme semplici osservate sono dunque le seguenti:

{2$\bar{1}\bar{1}$} , {100} , {22$\bar{1}$} , {13 $\bar{2}$ $\bar{2}$} , {3$\bar{1}\bar{1}$} , {11 $\bar{4}$ $\bar{4}$}
{13 $\bar{5}$ $\bar{5}$} , {7$\bar{3}\bar{3}$} , {9 $\bar{4}$ $\bar{4}$} , {41$\bar{2}$} , {4$\bar{1}\bar{2}$} , {8 5 $\bar{1}\bar{0}$} .

Nella tabella qui riportata i risultati della misura sono posti a confronto coi dati del calcolo, ai quali si giunge in base al valore (100) . (22$\bar{1}$) = 46°15′52″ dato dal Kuppfer ed accettato dall' Hintze [1]:

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	N.	Limiti	Medie	
2$\bar{1}\bar{1}$:100	15	38°. 4′ — 38°.18′	38°.13	38°.13°
100:$\bar{2}$1$\bar{2}$	14	103. 30 — 103. 45	103. 35	103. 34
100:22$\bar{1}$	19	46. 6 — 46. 26	46. 18	46. 16
13 $\bar{2}$ $\bar{2}$:100	6	12. 36 — 13. 14	12. 50	12. 56
3$\bar{1}\bar{1}$:100	11	26. 56 — 27. 22	27. 6	27. 5
11 $\bar{4}$ $\bar{4}$:100	2	29. 13 — 29. 14	29. 13 ½	29. 16
13 $\bar{5}$ $\bar{5}$:100	10	30. 28 — 31. 5	30. 45	30. 44 ½
7$\bar{3}\bar{3}$:100	1	— —	33. 41	33. 43
9$\bar{4}\bar{4}$:100	5	34. 33 — 35. 7	34. 51	34. 45
41$\bar{2}$:100	23	28. 45 — 29. 8	28. 54	28. 54
41$\bar{2}$:2$\bar{1}\bar{1}$	12	37. 43 — 37. 59	37. 57	37. 58
41$\bar{2}$:4$\bar{1}\bar{2}$	11	25. 43 — 26. 4	25. 53	25. 57
4$\bar{1}\bar{2}$:2$\bar{1}\bar{1}$	7	11. 48 — 12. 18	12. 5	12. 1
4$\bar{1}\bar{2}$:22$\bar{1}$	6	54. 30 — 55. 3	54. 47	54. 51
8 5 $\bar{1}\bar{0}$:41$\bar{2}$	4	25. 35 — 26. 11	25. 52	25. 57
8 5 $\bar{1}\bar{0}$:1$\bar{1}\bar{2}$	3	11 47 — 12. 11	12. 3	12. 1
8 5 $\bar{1}\bar{0}$:100	3	54. 40 — 55. 1	54. 50	34. 51

[1] C. Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, vol. I, pag. 1266.

La *calcite*, poco abbondante, si presenta in tavolette ed in lamelle a contorno esagonale e del diametro massimo di 6-7 mm., adagiate sui cristallini di quarzo. L'abito lamellare è dato dal prevalente sviluppo della base, la quale trovasi in combinazione con un romboedro, il cui simbolo non si potè determinare in causa della estrema imperfezione delle sue facce, che, come quelle della base, sono di solito profondamente corrose.

Le lamelle calcitiche sono incolore ed abbastanza limpide e trasparenti, tanto da dare a luce convergente delle bellissime immagini assiali.

Pure adagiati fra i cristalli di quarzo, e specialmente raggruppati nei punti ove al quarzo si accompagnano anche altri minerali, si notano non infrequentemente nelle litoclasi osservate minuti cristalli di *titanite*. Una viva lucentezza adamantina ed un bel colore azzurro-lavanda, invero poco frequente in questa specie minerale, li rende facilmente manifesti, non ostante che siano tanto piccoli da raggiungere di rado il mezzo millimetro nella loro massima dimensione.

Le forme osservate, il cui simbolo potè essere stabilito con un discreto numero di soddisfacenti misure, sono le seguenti:

$$\{100\}, \{001\}, \{102\}, \{021\}, \{111\}, \{11\bar{1}\}.$$

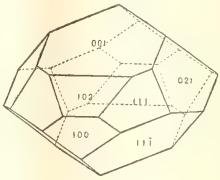


Fig. 3.

L'abito cristallino, di cui si può dare un'idea la fig. 3, è molto costante ed è caratterizzato dallo sviluppo prevalente della $\{11\bar{1}\}$, della $\{021\}$ e specie della base $\{001\}$. Le facce delle rimanenti forme, di rado molto sviluppate, si distinguono però per essere così piane e lucenti da dare ottime immagini alla osservazione goniometrica, nonostante la loro estrema piccolezza. Le facce di $\{11\bar{1}\}$ sono invece costantemente striate parallelamente allo spigolo $[111 . 11\bar{1}]$; le facce di $\{021\}$ di solito non sono brillanti e quelle di $\{001\}$ sono sempre ondulate e bruttissime, tanto che poche volte e le une e le altre dànno al goniometro immagini di cui si possa ragionevolmente tener conto.

La $\{102\}$ è non di rado sostituita da facce vicinali rispondenti ad un simbolo molto più complesso: per un gruppo di tali facce, che hanno dato misure in soddisfacente accordo tra loro, ho potuto stabilire il simbolo $\}5\ 0\ 11\{$.

Nella tabella che segue i risultati dell'osservazione sono posti a confronto coi dati del calcolo: l'orientazione scelta è quella di Des Cloizeaux [1] e le costanti adottate:

$$a : b : c = 0.75467 : 1 : 0.85429$$
$$\beta = 60^\circ.17'$$

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI				ANGOLI calcolati
	N.	Limiti		Medie	
100:001	4	59°.44′	— 60°.51′	60°.18′	60°.17′
100:102	6	39. 31	— 39. 47	39. 40	39. 17
100:5 0 12	7	40. 31	— 41. 8	40. 40	40. 41
001:102	6	20. 1	— 21. 3	20. 40	21. 00
001:5 0 12	4	19. 3	— 19. 49	19. 33	19. 36
100:111	11	34. 46	— 35. 25	35. 6	35. 3 ½
100:11$\bar{1}$	10	60. 30	— 61. 15	60. 52	60. 53
100:$\bar{1}$1$\bar{1}$	1	—	—	145. 10	144. 56 ½
001:111	3	37. 48	— 38. 39	38. 18	38. 16
001:$\bar{1}$11	6	70. 6	— 70. 49	70. 28	70. 23
100:021	1	—	—	73. 54	73. 55
111:$\bar{1}$11	8	83. 23	— 84. 18	83. 50	84. 3 ½
111:11$\bar{1}$	9	71. 8	— 71. 27	71. 25	71. 20
$\bar{1}$11:$\bar{1}$$\bar{1}$1	4	68. 59	— 69. 19	69. 8	69. 9
111:1$\bar{1}$1	3	44. 3	— 44. 15	44. 10	43. 49
$\bar{1}$11:$\bar{1}$1$\bar{1}$	4	110. 41	— 111. 34	111. 2	110. 51
111:102	4	24. 21	— 24. 46	24. 33	24. 29
111:5 0 12	4	25. 6	— 25. 22	25. 16	25. 7
111:021	4	41. 40	— 42. 4	41. 52	41. 34

In un piccolo cristallino con {102} abbastanza sviluppata ho potuto verificare che il piano degli assi ottici coincide col piano di simmetria e che appunto dalle facce di {102} emerge quasi normalmente la bisettrice acuta positiva.

L'*epidoto* si presenta in cristallini aghiformi riuniti in fasci e ciuffetti. Il colore è verde-bruno con forte pleocroismo dal verde-bruno al bruno. Questa specie minerale è scarsissimamente rappresentata.

Abbondante nelle litoclasi del granito di S. Fedelino è invece la *prehnite*, di color bianchiccio o giallognolo chiaro, quasi limpida, che co'suoi aggregati a ventaglio di tavolette rombiche forma frequentemente delle croste cristalline sopra gli altri minerali e specie sul quarzo. L'abito tabulare de'suoi indi-

[1] *Manuel de minéralogie*, Paris 1862, vol. I, pag. 145.

vidui cristallini è dato dal predominante sviluppo della {001}, alla quale si associano sempre la {100} ed il prisma {110}. L'aggruppamento quasi costante dei cristalli, che non arrivano al millimetro nella loro massima dimensione, e la poca perfezione delle facce, rendono difficile la misura goniometrica dei pochi angoli risultanti da una così semplice combinazione cristallina. Alcune misure hanno tuttavia fornito i risultati, che nello specchietto che segue sono posti a confronto coi dati del calcolo, ai quali si giunge con le costanti di Beutell [1], accettate anche dall' Hintze:

$$a : b : c = 0.8420 : 1 : 1.1272$$

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	N.	Limiti	Medie	
100:110	4	39°.19′ — 40°.32′	40°. 5′	40°. 6′
110:1$\bar{1}$0	6	79. 51 — 80. 45	80. 31	80. 12
100:001	2	89. 49 — 89. 55	89. 52	90. 00

La trasparenza delle lamelle prehnitiche permise qualche ricerca ottica, che, sebbene limitata dalla grande piccolezza degli individui cristallini,

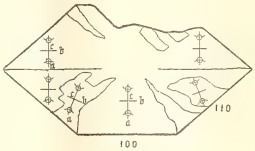


Fig. 4.

dimostrò nella prehnite del S. Fedelino una costante struttura anomala. Nella fig. 4 è riprodotta una delle migliori laminette studiate: non ho creduto opportuno rappresentare con una figura schematica la struttura dei cristallini di S. Fedelino, perchè, quantunque risponda in tutti ad un identico disegno generale, pur tuttavia varia molto in essi la forma delle plaghe in cui risultano divisi ed il valore dell'angolo che in queste plaghe il piano degli assi ottici fa con {100}.

Come si vede dalla figura, le tavolette di prehnite sono divise quasi completamente ed in modo abbastanza regolare in due metà, parallelamente ad (100). Il piano degli assi ottici è in esse pressochè coincidente, presentando una deviazione massima di 1° o 2°, ed è sensibilmente normale a {100};

[1] Vedi C. Hintze, op. cit., vol. II, pag. 470.

solo in rasi casi esso piano s'allontana di 4°-5° da questa direzione. In questi due individui principali sono poi inserite quasi costantemente quattro plaghe più o meno estese, di solito cuneiformi, non di rado suddivise in plaghe minori a contorno molto vario, ed aventi per base le facce di {110}. In queste plaghe, come mostra la figura, il piano degli assi ottici, lungi dal coincidere con (010), come avviene nelle prehniti normali, forma con questa direzione un angolo, variabile nei varî cristalli e nelle varie plaghe dello stesso cristallo da 14°-15° fin verso i 30°, nello stesso senso in settori opposti ed in senso contrario nei settori successivi.

Talvolta si nota anche un accenno alla struttura zonale, rivelata da una leggera differenza nel valore degli angoli d'estinzione.

Il valore dell'angolo degli assi ottici non si potè determinare per la piccolezza dei cristalli osservati, ma è sempre grande. La bisettrice acuta, normale a (001), è sempre positiva.

Della prehnite del granito di S. Fedelino fu determinato anche il peso specifico col metodo delle soluzioni pesanti (Thoulet) mediante la bilancia di Westphal, e si trovò uguale a 2.88, valore che corrisponde esattamente a quello dato in media dagli autori.

La *clorite*, pulverulenta ed assai somigliante a quella delle litoclasi del Gottardo, e minute e non abbondanti lamelle micacee, che mostrano i caratteri della *muscovite*, non si prestano ad osservazioni particolari.

Della *laumontite*, che si presenta in sottili prismetti di 1-2 mm. di lunghezza, di color bianco, impiantati sugli altri minerali, ho potuto invece prendere qualche misura goniometrica, che, sebbene molto imperfetta per la striatura ed il cattivo stato delle facce, mi permise di stabilire con sufficiente esattezza la presenza delle due forme

$$\{110\}, \{\bar{2}01\}.$$

I valori ottenuti nella misura sono qui posti a confronto coi dati del calcolo, dedotti in base alle costanti di Miller, accettate dall' Hintze [1]:

$$a : b : c = 1.1451 : 1 : 0.5906$$
$$\beta = 68°.46\tfrac{1}{4}'$$

SPIGOLI misurati	ANGOLI OSSERVATI			ANGOLI calcolati
	N.	Limiti	Medie	
$110:1\bar{1}0$	3	93°.36 — 93°.50′	93°.43′	93°.44′
$110:20\bar{1}$	2	65. 42 — 67. 6	66. 22	66. 30
$110:\bar{2}01$	5	112. 44 — 114. 1	113. 21	113. 30

[1] C. Hintze, op. cit., vol. II, pag. 1670.

L'estinzione, misurata su (110), ha dato un valore medio di 51° nell'angolo acuto di (110) . ($\bar{2}$01).

Volendo infine, a mo' di conclusione, fare dei confronti fra i minerali del granito di S. Fedelino e quelli che in condizioni analoghe si trovano in località già note, si può facilmente rilevare come i minerali da me studiati e per la natura loro e per l'associazione delle specie, fra le quali è notevole l'assenza dei felspati, somiglino piuttosto a quelli che tappezzano le litoclasi dei gneiss alpini, che a quelli delle druse pegmatitiche dei nostri graniti, notissimo tra i quali quello di Baveno.

Bacteriologia agraria. — *Sopra la forma italiana del Nitrosomonas europaea Win.* [1] Nota del dott. R. Perotti, presentata dal Corrispondente G. Cuboni.

Per i classici lavori di S. Winogradsky e degli altri che a lui seguirono, quali: Omelianski, Rullmann, Fraenkel, Gärtner, Boullanger, Massol, ecc., si venne ad accertare l'esistenza del genere *Nitrosomonas* Win. con forme più o meno diverse a seconda dei luoghi, per taluni aventi valore di specie, per altri di semplici varietà, che tuttavia possono riunirsi in due gruppi caratterizzati soprattutto dai due tipi principali di batteriacee: quello bacillare e quello cocciforme. Nei paesi dell'Europa occidentale si trovò dominare una forma a corti bacteri, nei paesi dell'Europa orientale e nella bassa Asia si trovò diffusa la forma a cocchi; e dalla descrizione e dalle figure che i vari autori dettero di esse, apparisce evidente, marcata, la diversità dei due tipi.

Quando nel decorso anno intrapresi lo studio della microflora nitrosante delle nostre regioni, potei segnalare la presenza, qui in Roma, di una varietà di *Nitrosomonas* la quale mi fornì occasione d'instituire un confronto con quelle già note e di stabilire conseguentemente come essa appartenesse al tipo cocciforme e presentasse alcuni punti di analogia con la forma, che per essere stata rinvenuta in Giava, fu denominata dal Winogradsky *asiatica* [2].

Un tale fatto evidentemente destava un certo interesse per il quale io intesi di procedere ad una più vasta ricognizione della microflora nitrosante dei vari terreni italiani allo scopo di poter fissare i rapporti di distribuzione della varietà isolata del terreno di Roma con quelle rinvenute altrove. Ed intrapresi l'esame dei numerosi campioni di terreno agrario, di varia pro-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Bacteriologia agraria annesso alla R. Stazione di Patologia vegetale, di Roma.

[2] Dott. R. Perotti, *Di una forma nitrosante isolata da un terreno di Roma*, Ann. Bot., vol. III, fasc. 2, pag. 43.

venienza, di natura differente, che potei ottenere per gentile e premuroso invio di molti direttori d'istituti scientifici e d'importanti aziende agrarie.

Riferisco in questa Nota gli ottenuti risultati con i quali posso venire a stabilire che in tutti i terreni d'Italia da me studiati è presente la varietà cocciforme del nitrosomonade, senza, peraltro, poter con sicurezza escludere, specialmente nelle terre dell'Italia settentrionale, la presenza della forma bacillare.

I campioni di terreno che sottoposi ad esame appartenevano a differenti località scelte in punti lontani e disparati della penisola e delle isole. Le varie provenienze di essi furono:

Avellino: località « Cappuccini ». Si esaminò il terreno naturale, umoso, con castagno, quercia e vegetazione erbacea spontanea ed il terreno vignato.

Caltagirone: podere « Mazzivecchi ».

Cerignola: località « Pavoni », appezzamento « Conca d'Oro » e località « Posticciola » appezzamento medesimo, proprietà dell'on. Pavoncelli.

Fabriano: podere del conte Cerbelli in località « Troila » e dell'on. Miliani in località « Cancelli ».

Messina: podere in contrada s. Placido, della scuola pratica di agricoltura.

Perugia: orto dell'istituto superiore agrario e campo sperimentale dal medesimo dipendente.

Porto Maurizio: territorio di Vallecrosia.

Rieti: Campo reatino.

Scafati: R. istituto sperimentale per la coltivazione dei tabacchi. Fu esaminato tanto il terreno coltivato a mais, quanto quello coltivato a tabacco.

Torino: campo sperimentale della R. stazione agraria nella frazione « Lingotto ».

Nella scelta di essi volli tenere in particolar modo presente la varia costituzione fisico-chimica dei terreni e procurai quindi che da questo punto di vista i campioni fossero per quanto possibile differenti. Fra i vari campioni sperimentati vi erano difatti rappresentate quasi tutte le principali composizioni possibili; dai terreni magri, sabbiosi sciolti, s'andava a quelli argillosi, compatti, umosi [1].

La preparazione e l'invio dei campioni furono eseguiti in modo che si avessero le necessarie garanzie. Secondo le istruzioni che vennero impartite alle persone destinate a raccoglierli, i prelevamenti si fecero dal soprasuolo e dalla mescolanza di più di essi appartenenti ad un medesimo appezzamento di terreno si ottenne un campione medio ch'era quello inviato al laboratorio.

[1] Per alcune notizie riguardanti la composizione fisico-chimica dei campioni di terreno, v. questi Rendiconti, vol. XV, 1° sem. 1906, fasc. 5, la mia Nota: *Distribuzione dell'Azotobacterio in Italia.*

Per eseguire il trasporto nel miglior modo possibile, s'impiegarono tubicini di vetro bene puliti e previamente sterilizzati a secco. Essi riempironsi sul luogo stesso con la terra prelevata chiudendoli subito con tappo di sughero a tenuta, così che non avesse potuto scemare o perdersi durante il viaggio il naturale contenuto in acqua del campione: indi si avvolsero con carta nera e si spedirono per mezzo postale.

Con ciascuno dei quindici campioni suddetti, man mano che pervenivano al laboratorio, eseguii il procedimento qui appresso descritto, che va dalle culture di presa ai passaggi selezionati proposti dall'Omelianski ed all'isolamento delle forme con la modificazione del metodo da me stesso proposta.

In Erlenmeyer di 250 cm.^{3} di contenuto, introdussi una certa quantità di scorie e gr. 0,5 di carbonato di magnesio in polvere, e, dopo sterilizzazione nella stufa ad aria, aggiunsi 50 cm.^{3} del liquido selezionante, sterile, d'Omelianski:

solfato ammonico	2,0
cloruro sodico	2,0
fosfato potassico	1,0
solfato di magnesio.	0,5
solfato ferroso	0,4
acqua distillata	1000,0

L'inoculazione di ciascun recipiente veniva fatta con grammi 0,5 del terreno da sottoporsi ad esame e le culture erano mantenute in termostato a 28° C.

Quando nei liquidi di cultura, trattati con il reattivo iodo-amidico del Tromsdorff, appariva molto forte la reazione dell'acido nitroso, ciò che in media s'otteneva dopo trascorsi circa 10-12 giorni dall'innesto, si procedeva ai passaggi selezionanti consigliati dall'Omelianski.

In provette, piuttosto larghe, preparate con scorie, carbonato di magnesio e soluzione di Omelianski nel modo di sopra detto e nelle già determinate proporzioni, si eseguiva l'innesto con una sola ansa di materiale infettante, dopo di che i tubicini si ponevano in termostato a 28° C. adagiati quasi orizzontalmente. Regolandomi anche qui con la reazione di Tromsdorff, coglieva il momento più opportuno per eseguire nella stessa maniera il successivo passaggio. I passaggi selezionanti che si susseguirono a distanze sempre più abbreviate di tempo, per la diminuzione del cosidetto periodo d'*incubazione*, dovuta all'aumentante virulenza del microrganismo, furono, per ciascun campione di terreno, tre.

La modificazione che introdussi nel metodo d'isolamento dei microrganismi della nitrificazione [1], eliminando la poco agevole preparazione del

[1] V. questi Rend., vol. XIV, 1° sem. 1905, fasc. 4°, pag. 228.

substrato solido all'acido silicico del Winogradsky, mi riuscì di grande aiuto nel presente studio, dove per la formazione delle colonie mi valsi esclusivamente dei blocchi di carbonato di magnesio, tagliati a parallelepipedi ed introdotti in provette, sterilizzati a secco, cui veniva aggiunta una certa quantità del liquido nutritivo a base di solfato ammoniaco, pur esso sterile.

La semina fu eseguita con una piccola quantità del materiale del terzo passaggio selezionante e portò, dopo 15-20 giorni di cultura in termostato a 28° C., alla formazione delle piccole cavità contenenti la sostanza giallo-sporca costituita in massima parte da materiale bacterico puro.

Con questo eseguii passaggi nella soluzione di Omelianski contenente frammenti di scorie e carbonato di magnesio, ottenendo costantemente dal liquido la reazione dell'acido nitroso. Come mezzo diagnostico per i microrganismi mi valsi anche dei risultati delle semine in brodo che riuscirono assolutamente negativi per qualsiasi sviluppo di forme.

Il risultato, dell'esame dei campioni di terreno sottoposti ai sopradescritti trattamenti, fu quello di ottenere costantemente all' isolamento di forme nitrosanti uguali a quella isolata dal terreno della stazione agraria sperimentale di Roma, segnalata anche nel terreno della villa Venosa di Albano e della quale già detti un'accurata descrizione. Piccole oscillazioni nelle dimensioni potei notare esaminando la forma predominante nelle culture brute. I microrganismi aventi le minori dimensioni si notarono specialmente nei campioni di terreno provenienti da Avellino e da Porto Maurizio. Tuttavia qualsiasi differenza tendeva a scomparire man mano che si procedeva nei passaggi selezionanti, nei quali tutti i microrganismi venivano a trovarsi nelle identiche condizioni culturali, come nei terreni naturali non potevano verificarsi. La conclusione quindi che io sono in grado di trarre dalle mie ricerche, è quella di stabilire che sulla penisola italiana, con una rimarchevole costanza, è largamente diffusa una forma di *Nitrosomonas* con uguali caratteri morfologici.

Se dessa sia l'unica ivi presente, con certezza non si può asserire.

Stando alle osservazioni del Winogradsky, risulterebbe che di una grande estensione di superficie sarebbe propria una determinata forma con caratteri costanti e che da uno stesso campione di terreno non fu mai possibile isolare più d'una varietà. Si accordano con questo modo di vedere anche i miei risultati, per i quali in nessun caso mi fu dato d'ottenere l'isolamento di due differenti varietà da uno stesso campione e neppure da due campioni differenti dei terreni esaminati della nostra penisola. Tuttavia l'aver constatato nelle culture brute del campione proveniente da Torino, oltre alle solite pseudomonadi, la presenza di numerose forme allungate, mi impone una certa riserva su la constatazione di questo fatto.

Se poi tra le caratteristiche morfologiche della forma da me isolata nei terreni italiani e quelle delle forme dell'*Europa occidentale* ed *asiatica* Win., corrano divergenze tali che autorizzino gli scienziati ad attribuire alle varie forme valore di specie differenti o solamente di varietà, è una questione che lascio impregiudicata, poichè sarebbe necessario che gli studiosi d'oltre Alpe, valendosi anche di questi miei modesti contributi, tornassero con altre ricerche sull'argomento. Per ora a me basta d'aver posto sufficientemente in luce, se non l'unica, almeno la più diffusa forma di microrganismo nitrosante dei terreni italiani.

Sistematicamente la forma si deve far rientrare nella specie *Pseudomonas europaea* del Migula o *Nitrosomonas europaea* del Winogradsky, e mi limito ad attribuire ad essa non altro valore che quello di una *varietà* che, come in una precedente pubblicazione feci notare [1], presenterebbe degli accenni di passaggio tra la varietà europea dell'ovest e quella asiatica. Ad ogni modo, per distinguerla propongo di denominarla *Var. italiana*, non nel senso ch'essa sia limitata alla nostra penisola, ma perchè essa ivi fu dapprima isolata e descritta.

La breve diagnosi ne sarebbe la seguente:

« *Piccoli cocchi di 0,6-0,8 μ di diametro, con accenni di passaggio a forma di bacteri: presentano uno stadio di monade, nel quale sono muniti di un ciglio di quasi uguale lunghezza con cui isolati od in piccoli gruppi si muovono lentamente ed a sbalzi. Non si sviluppano in mezzi contenenti sostanza organica; producono acido nitroso dai sali ammoniacali* ».

PRESENTAZIONE DI MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

G. Carrara. *Elettrochimica delle soluzioni non acquose.* Presentata dal Corrispondente R. Nasini.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Volterra, a nome anche del Corrispondente V. Reina, relatore, legge una Relazione colla quale si propone la inserzione nei volumi delle Memorie, del lavoro del dott. F. de Helguero, intitolato: *Per la risoluzione delle curve dimorfiche.*

Il Corrispondente Sella, relatore, a nome anche del Socio Blaserna, legge una Relazione sul lavoro del dott. G. Zambiasi, intitolata: *Verifica*

[1] V. op. cit., in Ann. Bot., vol. III. fasc. 2, pag. 56.

dei coristi normali dell'Ufficio centrale italiano per il corista uniforme, concludendo per la inserzione del lavoro stesso nei volumi delle Memorie.

Le conclusioni delle due Commissioni esaminatrici, messe partitamente ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci Veronese, Bassani, Pascal, Rajna, Klein, Sorauer, dal dott. Loew e dalla Commissione Reale svedese per la misura di un arco di meridiano allo Spitzberg.

Il Presidente Blaserna fa omaggio, a nome dell'autore senatore Marazio, della pubblicazione: *Il partito socialista italiano e il Governo*, (*13 febbraio 1801-4 marzo 1905*), e ne parla.

Il Socio Volterra offre il 3° volume del *Trattato di Meccanica razionale*, del prof. Caldarera.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; l'Accademia delle scienze di Nuova York; la R. Società zoologica di Amsterdam; la Società zoologica di Tokyo; la Società Reale di Vittoria; la Società geografica del Cairo; il Museo coloniale di Wellington; il Museo di storia naturale di Nuova York; il Museo di Cape Town; l'Università di Glasgow; gli Osservatorii di Vienna e di Cambridge Mass.

V. C

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIV. (1892-1906). Fasc. 9°. 1° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VI. Fasc. 1°-3°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Fasc. 1°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 maggio 1906.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Battelli. Resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza . . . . . Pag. 471
Angeli e *Marchetti*. Sopra gli azossicomposti . . . . . » 480
Körner. Nuove ricerche intorno alle sostanze dette aromatiche a 6 atomi di carbonio (*) » 482
Id. e *Contardi*. Intorno alla sesta nitrobibromobenzina (*) . . . . . » »
Cuboni. Ricerche sulla produzione artificiale della melata sulle foglie dell'olivo (*) . . . » »
Pannelli. Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni (pres. dal Corrisp. *Castelnuovo*) . . . . . » 483
Almansi. Sul principio dei lavori virtuali in rapporto all'attrito (pres. dal Socio *Volterra*) (*) » 490
Lauricella. Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti (pres. dal Socio *Dini*) (*) » »
Bortolotti. Sopra una ricerca di limite (pres. dal Corrisp. *Cesàro*) (*) . . . . . » »
Id. Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insiemi lineari (pres. *Id.*) (*) » »
Levi. Ricerche sulle funzioni derivate (pres. dal Socio *Segre*) (*) . . . . . » »
Nielsen. Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions cylindriques (pres. dal Socio *Dini*) » »
Angelucci. Separazione quantitativa del radiotorio dei fanghi di Echaillon e Salins Moutier (pres. dal Corrisp. *Sella*) . . . . . » 497
Barbieri. Sulle forme superiori di combinazione dell'argento (pres. dal Socio *Ciamician*) . » 500
Zambonini. Appunti sulla scheelite di Traversella (pres. dal Socio *Strüver*) (*) . . . . » 505
Vanzetti. Decomposizione elettrolitica di acidi organici bicarbossilici. Acido adipico (pres. dal Socio *Koerner*) (*) . . . . . » »
Repossi. Su alcuni minerali del granito di S. Fedelino (Lago di Como) (pres. dal Socio *Strüver*) . . . . . » »
Perotti. Sopra la forma italiana del Nitrosomonas europaea Win. (pres. dal Corrisp. *Cuboni*) . . . . . » 512

PRESENTAZIONI DI MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Carrara. Elettrochimica delle soluzioni non acquose (pres. dal Corrisp. *Nasini*) . . . . » 516

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Volterra e *Reina* (relatore). Relazione sulla Memoria del dott. *De Helguero* intitolata: « Per la risoluzione delle curve dimorfiche » . . . . . » »
Sella (relatore) e *Blaserna*. Relazione sulla Memoria del dott. *Zambiasi* intitolata: « Verifica dei coristi normali dell' Ufficio centrale italiano per il corista uniforme » . . . . » »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Cerruti (Segretario). Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci *Veronese, Bassani, Pascal, Rajna, Klein, Sorauer*, dal dott. *Loew* e dalla Commissione Reale svedese per la misura di un arco di meridiano allo Spitzberg. . » 517
Blaserna (Presidente). Fa omaggio di una pubblicazione del senatore *Marazio* e ne parla. » »
Volterra. Offre un volume del prof. *Caldarera*. . . . . » »

CORRISPONDENZA

Cerruti (Segretario). Dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti . . . » »

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

506 15

Pubblicazione bimensile. *Roma 20 maggio 1906.* **N. 10.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 *maggio* 1906.

Volume XV.° — Fascicolo 10°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* de la nuova serie formano una pubblicazione distin a per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al nese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto. è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 maggio 1906.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Nuovi studi sulle distorsioni dei solidi elastici.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. In due Note aventi per titolo: *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici* — *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi* (1), ho considerate le distorsioni di un cilindro cavo di rivoluzione dovute ad un taglio radiale e ad un taglio a faccie parallele, cioè le distorsioni d'ordine 6 e d'ordine 2 (2). Volendo considerare tutte le distorsioni possibili dovremo dunque esaminare quelle di ordini 1, 3, 4, 5.

Ma quelle di ordine 1 possono senz'altro ricondursi a quelle d'ordine 2 mediante un semplice cambiamento di assi coordinati e così pure quelle di ordini 4 e 5 sono riconducibili l'una all'altra con un analogo cambiamento di assi. Restano dunque da studiare le sole distorsioni di ordine 3 e di ordine 4. Osserviamo che il calcolo della deformazione del cilindro si è eseguito coll'eliminare tutte le azioni lungo le superficie laterali mantenendo solo le azioni sulle basi. Ora nelle formole che ho date (nella Nota (3) avente per titolo: *Un teorema sulla teoria della elasticità*) sulle distorsioni d'ordine 3, sono già eliminate le azioni laterali. Vi è perciò da approfondire solamente il caso delle distorsioni d'ordine 4.

(1) Seduta del 18 giugno 1905 e Comunicazioni del 1° ottobre 1905.

(2) *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi.* Seduta del 2 aprile 1905.

(3) Seduta del 5 febbraio 1905, Art. III, Esempio 2°.

Mostreremo in questa Nota che anche questo caso è riconducibile a quello della distorsione d'ordine 2 [1] e perciò potremo dire che *il problema della deformazione di un cilindro di rivoluzione cavo, che ha subìto la distorsione più generale, e che non è sollecitato lateralmente, ma solo alle basi, resta risoluto.*

Abbiamo poi veduto come, eliminando anche le sollecitazioni alle basi, si possa ottenere *in maniera approssimata* la forma che assume il cilindro in virtù della pura distorsione senza che esistano sollecitazioni esterne.

2. Nelle formule trovate nell'Art. III della mia Nota: *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* [2] facciamo successivamente

$$l = n = p = q = r = 0$$

e

$$l = m = n = q = r = 0;$$

otterremo rispettivamente i valori seguenti per i secondi membri:

$$(1) \qquad \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi} m \log(x^2 + y^2) \\ \dfrac{1}{2\pi} m \operatorname{arco\,tg} \dfrac{y}{x} \\ 0 \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} -\dfrac{1}{4\pi} pz \log(x^2 + y^2) \\ \dfrac{1}{2\pi} pz \operatorname{arco\,tg} \dfrac{y}{x} \\ -\dfrac{1}{2\pi} py \operatorname{arco\,tg} \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{4\pi} px \log(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Le (1) dànno gli spostamenti corrispondenti ad una distorsione di ordine 2 e le (2) quelli corrispondenti ad una distorsione di ordine 4. Ora è facile riconoscere che le prime due espressioni (2) possono ricavarsi dalle corrispondenti (1) moltiplicando quest'ultime per $\frac{p}{m} z$. D'altra parte nella Nota: *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi*, § 2 [3], abbiamo mostrato che nel caso di un cilindro cavo di rivoluzione le cui superficie laterali hanno i raggi R_1 e R_2 possono eliminarsi le tensioni lungo le superficie

[1] Il metodo tenuto è analogo a quello impiegato dal prof. Almansi nella sua Memoria: *Sopra la deformazione dei cilindri sollecitati lateralmente.* Sedute del 5 e 19 maggio 1901.

[2] Seduta del 19 febbraio 1905.

[3] Vedi Nota precedentemente citata, § 2.

laterali aggiungendo alle espressioni (1) respettivamente le quantità

$$(3)\qquad \begin{cases} u' + Au'' + Bu''' \\ v' + Av'' + Bv''' \\ 0 \end{cases}$$

e scegliendo convenientemente le costanti A e B [1]. Cerchiamo quindi di eliminare le tensioni laterali nel caso della distorsione d'ordine 4 prendendo le componenti degli spostamenti dati da

$$(4)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{p}{m} z \left(-\dfrac{1}{4\pi} m \log(x^2 + y^2) + u' + Au'' + Bu''' \right) = zU \\ v = \dfrac{p}{m} z \left(\dfrac{1}{2\pi} m \operatorname{arco\,tg} \dfrac{y}{x} + v' + Av'' + Bv''' \right) = zV \\ w = -\dfrac{1}{2\pi} py \operatorname{arco\,tg} \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{4\pi} px \log(x^2 + y^2) + \\ \qquad\qquad + \Phi(x, y) = W + \Phi(x, y) \end{cases}$$

in cui $\Phi(x, y)$ è una funzione regolare incognita da determinarsi.

Le U e V si otterranno sostituendo nelle formule (I) dell'ultima Nota citata, p alla lettera m, onde saranno

$$(5)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{p}{2\pi} \left\{ \dfrac{K}{L + 2K} \log r + \dfrac{L + K}{2(L + 2K)} \left(r^2 - \dfrac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \dfrac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{1}{2(L + 2K)(R_1^2 + R_2^2)} [(3L + 5K) y^2 + (L + K) x^2] \right\}, \\ V = \dfrac{p}{2\pi} \left\{ \operatorname{arco\,tg} \dfrac{y}{x} + \dfrac{L + K}{2(L + 2K)} \left(r^2 - \dfrac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \dfrac{\partial^2 \log r}{\partial x \, \partial y} - \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{L + 3K}{(L + 2K)(R_1^2 + R_2^2)} xy \right\}. \end{cases}$$

Avremo poi

$$(5')\qquad W = -\frac{1}{2\pi} py \operatorname{arco\,tg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2\pi} px \log r$$

avendo posto

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

[1] Nel luglio 1905 il dott. Timpe mi spedì un esemplare della sua Dissertazione: *Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Function*, ove questo stesso problema ed altri analoghi erano stati risoluti con metodo diverso. A causa della mia assenza da Roma io non ne ebbi però conoscenza allorchè scrissi nel settembre a St. Moritz la mia Nota: *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi*. Sono lieto ora di poter fare la citazione della bella Memoria del dott. Timpe, la quale è stata anche riprodotta nel 4° fascicolo del 52° volume del *Zeitschrift für Mathematik und Physik*.

3. Delle tre equazioni indefinite dell'equilibrio elastico

$$K\Delta^2 u + (L + K)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0$$
$$K\Delta^2 v + (L + K)\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0$$
$$K\Delta^2 w + (L + K)\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0$$

in cui

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

le prime due sono soddisfatte dai valori (4) e la terza diviene

$$K\Delta^2\Phi + (L + K)\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0. \tag{6}$$

Chiamiamo $t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{31}, t_{12}$ le sei caratteristiche delle tensioni corrispondenti agli spostamenti (4). Si verifica facilmente che, lungo le superficie laterali del cilindro cavo, si ha

$$t_{11}\cos nx + t_{12}\cos ny + t_{13}\cos nz = 0$$
$$t_{21}\cos nx + t_{22}\cos ny + t_{23}\cos nz = 0$$
$$t_{31}\cos nx + t_{32}\cos ny + t_{33}\cos nz =$$
$$= \left(U + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\cos nx + \left(V + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\cos nz.$$

ove n denota la normale al contorno. Quindi, affinchè gli spostamenti (4) corrispondano a tensioni laterali nulle, sarà necessario e sufficiente che

$$\left(U + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\cos nx + \left(V + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\cos ny = 0. \tag{7}$$

4. Il problema è quindi ricondotto a *determinare la funzione* $\Phi(x, y)$ *nello spazio* ω *compreso entro due circonferenze* σ_1 *e* σ_2 *di raggi* R_1 *e* R_2 *aventi il centro nell'origine, la quale soddisfa in questo campo all'equazione differenziale*

$$\Delta^2\Phi = -\frac{L + K}{K}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) \tag{6'}$$

e al contorno alla condizione

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\frac{\partial W}{\partial n} - (U\cos nx + V\cos ny). \tag{7'}$$

Ora con calcoli facili la (6′) si trasforma in

$$(6'') \qquad \Delta^2\Phi = -p\,\frac{L+K}{\pi(L+2K)}\,x\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2}{R_1^2+R_2^2}\right)$$

e la (7′) in

$$(7'') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = -\dfrac{p}{2\pi}\left(\dfrac{L+3K}{L+2K}\log R_1 + 1 - \dfrac{K}{L+2K}\,\dfrac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\right)\cos\vartheta\,, \text{ sopra } \sigma_1 \\[2ex] \dfrac{\partial\Phi}{\partial n} = -\dfrac{p}{2\pi}\left(\dfrac{L+3K}{L+2K}\log R_2 + 1 - \dfrac{K}{L+2K}\,\dfrac{R_2^2}{R_1^2+R_1^2}\right)\cos\vartheta\,, \text{ sopra } \sigma_2 \end{cases}$$

in cui

$$\cos\vartheta = \cos nx\,.$$

Si verifica poi facilmente che

$$\int_\omega \Delta^2\Phi\,d\omega + \int_{\sigma_1}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma_1 + \int_{\sigma_2}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,d\sigma_2 = 0$$

supponendo di prendere la normale n diretta verso l'interno del campo ω. Infatti ciascuno dei tre integrali della formola precedente è separatamente nullo. Ne segue che *le condizioni* (6′) *e* (7′) *sono fra di loro compatibili.*

Posto

$$(8) \qquad \Phi = -\frac{p}{2\pi}\,\frac{L+K}{L+2K}\left(\log r - \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{R_1^2+R_2^2}\right)x + \Psi$$

avremo che la (6′) si trasformerà in

$$\Delta^2\Psi = 0$$

e la (7″) in

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Psi}{\partial n} = -\dfrac{p}{2\pi}\,\dfrac{K}{L+2K}\left(1 + 2\log R_1 + \dfrac{3L+K}{2K}\,\dfrac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\right)\cos\vartheta\,, \text{ sopra } \sigma_1 \\[2ex] \dfrac{\partial\Psi}{\partial n} = -\dfrac{p}{2\pi}\,\dfrac{K}{L+2K}\left(1 + 2\log R_2 + \dfrac{3L+K}{2K}\,\dfrac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\right)\cos\vartheta\,, \text{ sopra } \sigma_2 \end{cases}$$

Quindi

$$\Psi = M\,x + N\,\frac{x}{r^2}$$

con M e N costanti. Queste si calcolano facilmente e si trova

$$(9) \qquad \Psi = -\frac{p}{2\pi}\,\frac{Kx}{L+2K}\left\{\left(\frac{3}{2}\,\frac{L+K}{K} + \frac{R_1^2\log R_1^2 - R_2^2\log R_2^2}{R_1^2-R_2^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{R_1^2R_2^2}{r}\left(\frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2-R_2^2} + \frac{3L+K}{2K}\,\frac{1}{R_1^2+R_2^2}\right)\right\}$$

da cui finalmente combinando le formule (5′), (8) e (9) si ricava il valore di w.

Tenendo quindi presenti le formule (4) e (5) avremo

$$
(\mathrm{A})\quad \begin{cases}
u = \dfrac{pz}{2\pi}\left\{\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\log r + \dfrac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{2(\mathrm{L}+2\mathrm{K})}\left(r^2 - \dfrac{\mathrm{R}_1^2\,\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right)\dfrac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \right. \\
\qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{2(\mathrm{L}+2\mathrm{K})(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\left[(3\mathrm{L}+5\mathrm{K})\,y^2 + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\,x^2\right]\right\}, \\
v = \dfrac{pz}{2\pi}\left\{\operatorname{arco\,tg}\dfrac{y}{x} + \dfrac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{2(\mathrm{L}+2\mathrm{K})}\left(r^2 - \dfrac{\mathrm{R}_1^2\,\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right)\dfrac{\partial^2 \log r}{\partial x\,\partial y} - \right. \\
\qquad\qquad \left. - \dfrac{\mathrm{L}+3\mathrm{K}}{(\mathrm{L}+2\mathrm{K})(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\,xy\right\}, \\
w = -\dfrac{py}{2\pi}\operatorname{arco\,tg}\dfrac{y}{x} - \dfrac{px}{2\pi}\,\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left\{\dfrac{3}{2}\,\dfrac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{\mathrm{K}} + \right. \\
\qquad\qquad + \dfrac{\mathrm{R}_1^2\log \mathrm{R}_1^2 - \mathrm{R}_2^2\log \mathrm{R}_2^2}{\mathrm{R}_1^2-\mathrm{R}_2^2} - \log r + \\
\left. + \dfrac{\mathrm{R}_1^2\,\mathrm{R}_2^2}{r^2}\left(\dfrac{\log \mathrm{R}_1^2 - \log \mathrm{R}_2^2}{\mathrm{R}_1^2-\mathrm{R}_2^2} + \dfrac{3\mathrm{L}+\mathrm{K}}{2\mathrm{K}}\,\dfrac{1}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right) - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{\mathrm{K}}\,\dfrac{r^2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right\}
\end{cases}
$$

e da queste equazioni si ricava facilmente

$$
(\mathrm{B})\quad \begin{cases}
t_{33} = \dfrac{p\mathrm{KL}}{\pi(\mathrm{L}+2\mathrm{K})}\,xz\left(\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right) \\
t_{13} = 2\mathrm{K}\left(\mathrm{U} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\
t_{23} = 2\mathrm{K}\left(\mathrm{V} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{cases}
$$

onde sono determinate le tensioni agenti sulle due basi.

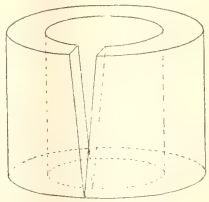


Fig. 1.

5. Per ottenere praticamente una distorsione d'ordine 4 basta fare nel cilindro cavo una *fessura cuneiforme* come è indicato nella fig. 1 in modo che le due faccie della fessura si incontrino lungo un raggio di una delle due basi. Quindi accostare le due faccie della fessura e saldarle. Se le due

faccie della fessura sono egualmente inclinate sulla base, la forma del solido deformato dopo la saldatura è simmetrico rispetto al piano di questa.

Applicando ai resultati del paragrafo precedente dei ragionamenti analoghi a quelli che abbiamo fatto nelle due Note precedenti, sarebbe a priori possibile formarsi un'idea approssimata della forma che assume il cilindro per la *pura distorsione* allorchè si immaginano eliminate le tensioni alle basi.

Noi ci limitiamo però a riprodurre (figg. 2 e 3) l'immagine di un cilindro di *caoutchouc* che ha subìta la indicata distorsione. Le due fotografie

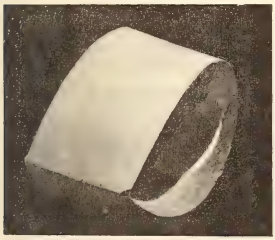


Fig. 2.

Fig. 3.

(figg. 2 e 3) dello *stampo in gesso* del solido deformato, veduto da due parti diverse, mostrano chiaramente la forma delle due basi. Lo spigolo corrisponde alla saldatura. Il cilindro di *caoutchouc* aveva prima della distorsione il diametro esterno di $10^{cm},6$, quello interno di 6^{cm}, l'altezza di $5^{cm},9$. L'apertura angolare della fessura cuneiforme era di circa 38°.

Debbo ringraziare l'ing. E. Jona del modello in *caoutchouc* che mi ha procurato, i dottori Zambiasi e Pochettino delle fotografie ed il prof. Alessandrini del disegno eseguito.

Chimica. — *Nuove ricerche intorno alle sostanze dette aromatiche a 6 atomi di carbonio.* Nota del Socio G. Körner.

Nonostante il grandissimo numero di ricerche eseguite dai più insigni chimici intorno ai prodotti alogeno- e nitrosostituiti della benzina, questo gruppo di sostanze presenta tuttora non poche lacune essendo rimasti sconosciuti in quasi ogni serie alcuni dei termini più semplici e più importanti dal punto di vista, di stabilire la dipendenza delle proprietà fisiche e chimiche dalla composizione e costituzione di essi prodotti. Inoltre la letteratura è gremita di dati erronei, provenienti anche dal fatto che in epoche diffe-

renti autori diversi hanno compreso sotto la medesima denominazione sostanze affatto diverse.

In questo stato di cose ho ripreso le ricerche iniziate da oltre trent'anni, e sto eseguendo unitamente ad alcuni miei colleghi un lavoro di revisione dell'intero materiale di fatti risguardanti formazione e proprietà delle sostanze aromatiche a 6 atomi di carbonio, allo scopo di ottenere i dati necessari per stabilire la parte che spetta ad ogni atomo o gruppo, in causa della sua natura e del posto occupato dallo stesso, delle proprietà finali della molecola. Sono state così preparate parecchie centinaia di sostanze nuove e completate alcune serie di questi derivati, la maggior parte dei quali si è potuta ottenere in cristalli nitidi e ben sviluppati, ed il prof. Artini ne ha assunto lo studio ottico e cristallografico.

Per molti di questi derivati furono escogitati metodi nuovi di preparazione e si ebbe il risultato non prevedibile che si ottennero dai medesimi materiali in condizioni leggerissimamente variate prodotti del tutto differenti per qualità e quantità, il qual fatto poi spiega molte contradizioni nella letteratura.

È mia intenzione di pubblicare, assieme ai rispettivi collaboratori, in brevi Note i risultati di queste ricerche man mano che le singole serie o gruppi si completano, salvo di riservare ad una Memoria più completa e riassuntiva la descrizione dettagliata delle esperienze e dei risultati.

Chimica. — *Intorno alla sesta nitrobibromobenzina.* Nota del Socio G. Körner e del dott. A. Contardi.

Sin dal 1874 uno di noi aveva notato nella nitrazione della ortobibromobenzina la formazione in piccolissima quantità d'un secondo nitrocomposto [1] che allora non potè essere separato dal suo isomero 1.3.4 (NO_2 in 1) $C_6H_2NO_2HBrBr$, che forma il prodotto principale della reazione, in causa della difficoltà di poter disporre di quantità alquanto notevoli di ortobibromobenzina. Nel 1894 tale difficoltà venne superata colla scoperta di un metodo per la preparazione in grande e facile di tale prodotto, partendo da materiali del commercio [2].

Abbiamo con questo processo preparato oltre un chilogrammo di ortobibromobenzina allo stato di chimica purezza e bollente entro 2 decimi di grado e cioè tra 225° e 225°,2.

Nitroortobibromobenzine 1.3.4 e 1.2.3 *e loro separazione.* — 50 gr. di ortobibromobenzina s'introducono poco per volta in 100 gr. di ac. nitrico di 1,54 p. s.; indi si lava il vaso in cui trovavasi la bibromoben-

[1] Gazz. chim. ital., vol. IV, pag. 328 (1874).

[2] Rendic. Acc. Lincei, vol. III, Serie V, 1894.

zina con 25 gr. di ac. nitrico, e, compiutasi la reazione violenta, si versa il tutto, dopo 10 minuti, in acqua fredda. La massa oleosa che si separa dal liquido acido non tarda a solidificarsi; la si rifonde più volte sotto rinnovata acqua bollente, agitando fortemente sino a solidificazione. Il prodotto raccolto, lavato ed essiccato si discioglie in 4 parti di alcool di 95 % e si lascia raffreddare. Risulta così trasformata oltre 60 per cento della bibromobenzina in nitro-bibromobenzina 1.3.4, fusibile a 57°-58°, che una sola volta ricristallizzata da alcool (1 a 4) è chimicamente pura e fonde a 57°,8. Le acque madri unite e concentrate dànno più volte nuovamente cristalli di punto di fusione più basso. Ricristallizzando questa parte più fusibile si ottengono frazioni di assai diversi punti di fusione e fra esse si riscontra una fondente a 42° e che mantiene questo punto di fusione anche dopo un'altra cristallizzazione dall'alcool.

Se questa frazione si scioglie in ac. acetico glaciale bollente, nella proporzione di 5 a 9, la soluzione separa per raffreddamento dopo 24 ore circa cristalli aghiformi, splendenti di tinta verdognola assai più pronunciata di quella del suo isomero 1.3.4. I cristalli che risultano nella quantità di 10 p. c. della miscela fusibile a 42° fondono a 85°,2. Si sciolgono facilmente in 3 parti di ac. acetico bollente, separandosi per raffreddameuto per oltre 85 p. c. Essi similmente sono assai meno solubili in alcool conc. freddo dell'isomero 1.3.4.

In acetone e cloroformio sono solubilissimi, meno invece in etere e in acetato etilico.

Per lentissima evaporazione tanto dall'acido acetico, quanto dall'etere etilacetico, si può ottenere questa sostanza cristallizzata in grossi prismi monoclini di cui le costanti date dal dott. E. Repossi sono $a : b : c : = 1,031 : 1 : 0,282$; $\beta = 80, 8' 30''$.

Per dimostrare la costituzione di questa nitrobibromobenzina, la si trasformò in tribromobenzina, riducendola prima in bibromoanilina e sostituendo in questa, passando per il perbromuro del corrispondente diazocomposto, il gruppo ammidico con un atomo di bromo. Come era da aspettarsi si ottenne la tribromobenzina 1.2.3 fusibile a 87°,4.

La nuova nitrobibromobenzina descritta, scaldata con ammoniaca alcoolica per 2 giorni a 180°, diede una nuova nitrobromanilina in aghi giallochiari, facilmente volatile col vapor acqueo, abbastanza solubile nell'alcool e del punto di fusione 73°,4.

Eliminando da questo prodotto il gruppo NH_2 mediante etere nitroso si ottenne la metanitrobromobenzina $C_6 H_3 NO_2 H Br$, fusibile a 56°,4.

Una miscela calda di ac. solforico concentrato e acido nitrico di 1,54 p. s. trasforma la nitrobibromobenzina in una miscela di 3 binitro derivati.

Ortobibromoanilina 1.2.3 (NH_2 in 1) $C_6 H_3 NH_2 Br Br$. — Si ottiene facilmente questa sostanza scaldando la nuova nitrobibromobenzina con una soluzione cloridrica di cloruro stannoso impiegato nella quantità teorica (3 mol.). La potassa precipita l'anilina che si purifica distillando la miscela alcalina

col vapor acqueo. È base meno energica dell'altra ortobibromanilina, distilla facilmente col vapor acqueo, è poco solubile in acqua, solubilissima invece in alcool, in etere e in acetato etilico.

Dall'alcool diluito cristallizza in tavole trasparenti ed incolore fondenti a 43°.

Ortobibromacetanilide 1.2.3 ($NH\overline{A}$ in 1). — L'anidride acetica bollente trasforma la nuova bibromanilina rapidamente nel derivato acetilico, il quale è presso a poco insolubile nell'acqua fredda e poco solubile nell'alcool caldo; si separa da quest'ultimo in cristalli aghiformi che fondono a 164°.

La sopradescritta nitrobibromobenzina 1.2.3 abbiamo potuto ottenere anche per altra via, partendo dall'acetanilide. Questa sciolta in acido solforico, trattata a freddo con acido nitrico concentrato 1,54 p. s., come è noto, fornisce l'acido nitrosolfanilico 1.2.5 (NO_2 (1); NH_2 (2); SO_3H (5), il quale, trasformato nel sale baritico, pel trattamento in soluzione acquosa diluita con soluzione di bromo nel bromuro potassico, diede, a fianco a poca bibromoortonitroanilina, il corrispondente nitrobromoamidosolfonato baritico 1.2.3.5 (bromo in 3, gli altri gruppi come sopra). L'eliminazione del residuo solfonico riesce facilmente, scaldando l'acido libero con acido solforico diluito in tubo chiuso a 185°, oppure con ac. solforico concentrato (60 B°) a 160° sotto pressione ordinaria. Il prodotto della reazione sottoposto alla distillazione col vapor acqueo fornisce una sostanza gialla, cristallina, che altro non è che la sopradescritta nitrobromoanilina del punto di fusione 73°,4. Questa, trasformata nel diazocomposto e successivamente nel corrispondente perbromuro, conduce nella scomposizione con alcool assoluto bollente, come era da prevedersi, alla sopradescritta nuova nitrobibromobenzina 1.2.3. Il quale ultimo composto si ottiene ancor meglio facendo cadere goccia a goccia la soluzione del diazocomposto sopra il bromuro rameoso bollente, e di stillando il prodotto di reazione col vapor d'acqua.

Nitroiodobromobenzina 1.2.3. — Abbiamo preparato questo composto sostituendo il gruppo ammidico della nitrobromanilina nuova con un atomo di iodio. Essa si presenta sotto forma di prismi trasparenti di tinta leggermente verdognola, appartenenti, secondo le determinazioni del dott. E. Repossi, al sistema monoclino: $a : b : c : = 0{,}634 : 1 : 0{,}568$; $\beta = 74°,56$: si fondono a 119°-120°.

Nitroclorobromobenzina 1.2.3. — Si ottiene tale prodotto se la soluzione del diazocomposto dell'anilina pf' 73°,4 si fa cadere sopra del cloruro rameoso bollente e si distilla quindi in corrente di vapor acqueo. Essa è una sostanza facilmente volatile, molto solubile in alcool ed in etere; dai quali solventi si separa in aghi piatti verdognoli, fusibili a 65°. I cristalli non poterono fino ad ora esser misurati.

Fisica. — *Resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza.* Nota del Corrispondente **A. Battelli.**

Le considerazioni generali che ho svolto in una mia precedente Nota [1] mi permettono di stabilire nelle sue linee principali le leggi con cui le correnti di alta frequenza si distribuiscono nella sezione di un filo che sia avvolto a solenoide.

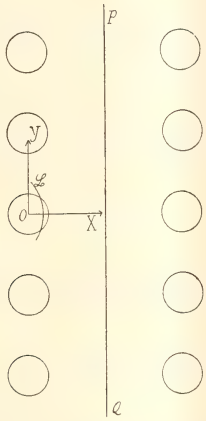


Fig. 1

In pratica i solenoidi sono formati avvolgendo un filo metallico a sezione circolare sopra un cilindro, sul quale l'asse del filo forma un'elica di passo costante p.

Per semplicità conviene però immaginare che le varie spire siano addirittura di forma circolare; io, riferendomi ad una qualunque di esse, assumo come asse delle z la tangente al filo nel centro O (fig. 1) di una sezione meridiana della spira. Allora $u = v = o$, $\varphi = w$ ed il problema è ridotto a determinare w in funzione di x ed y.

Nel piano xy, io assumo per asse delle x la perpendicolare dell'asse PQ del solenoide e per asse delle y la parallela alla PQ; si indichi con

$$f(x, y) = 0$$

[1] Rend. Acc. Lincei, fasc. 9°, 1° sem. 1906

una delle linee, sulle quali $w = \text{cost}$; si tratta anzitutto di mettere grossolanamente in evidenza la forma di tali linee. Esse evidentemente coincidono con quelle sulle quali ha un valore costante la forza elettrica; ora questa si compone di due termini, l'uno costante per tutti i punti del conduttore e dovuto alla forza elettromotrice esterna applicata ai due capi del solenoide, e l'altro variabile col variare di x ed y e rappresentante l'intensità elettromotrice, indotta sopra ciascun punto del solenoide, dalla corrente variabile, che circola negli altri punti della stessa spira e delle spire vicine. Tale intensità elettromotrice indotta M si compone, a sua volta, di due termini, uno F_1, dipendente unicamente dalla corrente, che circola nella spira, a cui appartiene il punto considerato; e l'altro F_2, dipendente dalla corrente che circola nelle rimanenti spire. Indicando con ϱ la distanza di un punto generico del conduttore dall'asse del filo, si può avere un'espressione approssimata di F_1, ammettendo per un momento che la corrente sia uniformemente distribuita intorno all'asse medesimo. In tale caso F_1 dipende unicamente da ϱ; d'altro canto, immaginando F_2 sviluppata con la formola del Taylor secondo le potenze ascendenti di x ed y, e trascurando i termini di grado superiore al 1°, si può porre:

$$F_2 = a + bx + cy.$$

D'altra parte, per ragioni di simmetria il valore di M, e quindi anche di F_2, deve restare inalterato scambiandovi y con $-y$, onde

$$c = 0,$$

$$M = F_1(\varrho) + a + bx. \tag{2}$$

Io ammetto che l'equazione delle linee, sulle quali la densità w della corrente è costante, sia realmente rappresentata da un'equazione del tipo della (2), dove tutti i coefficienti abbiano un valore costante eccetto che M, che varia da linea a linea. Ne segue che

$$w = w(M)$$

ed il problema è ridotto a trovare l'espressione effettiva di w sopra ogni superficie.

Sia adesso s un arco, che sia in ogni punto ortogonale alla famiglia di superficie:

$$M = \text{cost}.$$

Si ha:

$$\frac{dM}{ds} = \cos(sx)\frac{\partial M}{\partial x} + \cos(sy)\frac{\partial M}{\partial y};$$

d'altra parte

$$\cos(sx) = \frac{\frac{\partial M}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos(sy) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)^2}};$$

onde

(2) $$\frac{dM}{ds} = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)^2}.$$

Ora per la (1) è

$$\frac{\partial M}{\partial x} = F_1'(\varrho)\frac{x}{\varrho} + b,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = F_1'(\varrho)\frac{y}{\varrho}.$$

Sostituendo in (2) si ha

$$\frac{dM}{ds} = \sqrt{[F_1'(\varrho)]^2 + b^2 + 2F_1'(\varrho)\, b\frac{x}{\varrho}}.$$

Quanto al segno della quantità $F_1'(\varrho)$ bisogna osservare che il valore di F_1' diminuisce col crescere della distanza ϱ e che quindi la sua derivata è negativa; invece il segno di b è negativo. La precedente uguaglianza, servendosi delle coordinate polari ϱ e θ, cioè ponendo:

$$x = \varrho\cos\theta \qquad y = \varrho\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

è quindi del tipo

$$\frac{dM}{ds} = \sqrt{p^2 + 2q^2\cos\theta},$$

dove p e q sono soltanto funzioni di ϱ.

Se ne ricava

(3) $$ds = \frac{dM}{\sqrt{p^2 + 2q^2\cos\theta}}.$$

Ora in coordinate polari è:

(4) $$M = F_1(\varrho) + a + b\varrho\cos\theta;$$

inoltre

$$dM = \frac{\partial M}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial M}{\partial \theta} d\theta ;$$

riferendomi dapprima unicamente ai punti, che stanno sulla superficie del conduttore, per essi è $\varrho =$ cost. e perciò, nel passaggio da un punto all'altro del contorno, è

$$dM = \frac{\partial M}{\partial \theta} d\theta = - b\varrho \operatorname{sen} \theta \, d\theta ,$$

onde

$$ds = \frac{- b\varrho \operatorname{sen} \theta \, d\theta}{\sqrt{p^2 + 2q^2 \cos \theta}} .$$

Per valori piccoli di θ si ha

$$\cos \theta = 1 \quad , \quad \operatorname{sen} \theta = \theta ,$$

e quindi, attribuendo ad s il valore zero nel punto A (fig. 2) di coordinate

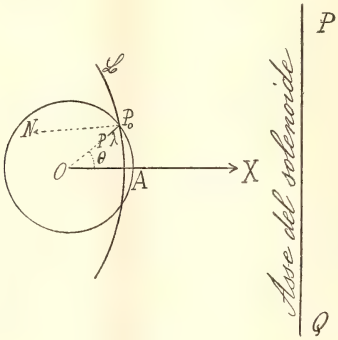


Fig. 2.

$\varrho = 0$, $\theta = 0$, il valore s_0 di s sul contorno del conduttore ed in vicinanza di A risulta:

(5) $$s_0 = \beta^2 \theta^2 ,$$

dove si è posto

(6) $$\beta^2 = \frac{- b\varrho}{2\sqrt{p^2 + 2q^2}} .$$

Per ciò che si riferisce al valore di s sempre in vicinanza di A, ma nell'interno del conduttore, conduco dal punto generico P la perpendicolare PP_0

al contorno ed indico con λ la distanza PP_0. Sviluppando s colla formola del Taylor, per valori di λ sufficientemente piccoli, si ha:

$$s = s_0 + \frac{ds}{d\lambda}\lambda .$$

Per calcolare $\frac{ds}{d\lambda}$ si consideri la superficie di densità di corrente uniforme passante per P_0 e sia P_0Q la sua normale nel punto P_0. È chiaro che

$$\frac{ds}{d\lambda} = \cos(Q P_0 P) .$$

D'altra parte si può ritenere che in vicinanza del punto A le superficie di ugual densità di corrente siano parallele all'asse del solenoide; ne risulta che in vicinanza del punto A è l'angolo

$$Q P_0 P = 0 ,$$

e quindi

$$s = s_0 + \lambda = \beta^2\theta^2 + \lambda .$$

Si applichi adesso il risultato generale espresso dalla formola (10) stabilita nella mia Nota precedente e si osservi che in questo caso è $\varphi = w$; indicando con $w_0 \cos \omega t$ la densità della corrente nel punto A, nei punti vicini si ha:

$$w = w_0 e^{-\alpha(\lambda+\beta^2\theta^2)} \cos(\omega t - \alpha[\lambda + \beta^2\theta^2]) . \tag{7}$$

Questa formola dà un'idea assai chiara della legge, con cui è distribuita la corrente nella sezione del filo: l'ampiezza della densità della corrente è

$$w_0 e^{-\alpha(\lambda+\beta^2\theta^2)}$$

e, come si vede, quest'ampiezza decresce con legge esponenziale, sia col crescere della distanza λ del punto generico dal contorno del conduttore, sia col crescere dell'azimut θ. Tali variazioni della densità sono tanto più considerevoli quanto più grande è il valore di α e quindi quanto più alta è la frequenza delle correnti.

Per ciò che si riferisce ai punti che non sono vicini ad A non si può affermare se la (7) continui a valere rigorosamente. Si osservi però che si sa già a priori, da quanto è stato mostrato in proposito dal Wien e dal Sommerfeld, che è superfluo preoccuparsi di tali punti, perchè in essi la densità della corrente è praticamente trascurabile. Siccome anche la formula (7) rispecchia questa circostanza, così io nel seguito ammetterò che essa valga anche per grandi valori di λ e di θ. In base alla formula medesima si può dunque

dire che per frequenze molto alte si può ritenere che la corrente resti localizzata in un piccolo intorno dei punti A più vicini dell'asse del solenoide. Nella figura 3 la parte della sezione del filo la quale è praticamente utilizzata nel passaggio della corrente è sparsa di punti.

Passo adesso al calcolo della resistenza R del solenoide. A tal uopo, indicando con W il calore svolto dalla corrente nel circuito in un secondo, ho

$$W = \sigma \int w_m^2 \, dv \, ,$$

ove dv è l'elemento di volume, w_m^2 è la media dei valori assunti dal quadrato di w nel corso di un periodo e l'integrazione va estesa a tutto il volume

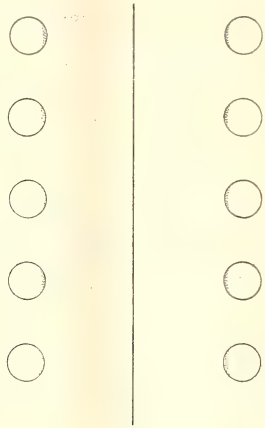


Fig. 3.

occupato dal conduttore. Detta l la lunghezza del conduttore ed a il raggio della sezione del medesimo

$$dv = l(a - \lambda) \, d\lambda \, d\theta \, ,$$

e quindi

$$W = \sigma \, l \, a \iint w_m^2 \, d\lambda \, d\theta - \sigma \, l \iint w_m^2 \, \lambda \, d\lambda \, d\theta \, .$$

Qui si intende che l'integrazione rispetto a λ vada estesa da zero ad a e quella rispetto a θ da $-\pi \, a + \pi$.

Sarà superfluo occuparsi anche del secondo termine cioè di $\sigma l \iint w_m^2 \, \lambda d\lambda \, d\lambda$; infatti esso è trascurabile di fronte al primo per i punti che stanno in un

piccolo intorno di A; al di fuori di tale intorno w_m^2 diventa trascurabile e quindi, senza alterare notevolmente i risultati, si può porre:

$$W = \sigma l a \int d\lambda \int w_m^2 \, d\theta ,$$

dove per la (7)

$$w_m^2 = \frac{w_0^2}{2} e^{-2\alpha(\lambda + \beta^2\theta^2)} .$$

Sostituendo ottengo:

$$W = \frac{\sigma l a w_0^2}{2} \int e^{-2\alpha\lambda} d\lambda \int e^{-2\alpha\beta^2\theta^2} d\theta .$$

Quanto ai limiti di integrazione, come già si è detto, essi sono 0 ed a per il primo integrale, $-\pi$ e $+\pi$ per il secondo. Si noti però che le funzioni integrande $e^{-2\alpha\lambda}$ ed $e^{-2\alpha\beta^2\theta^2}$ tendono assintoticamente verso lo zero col crescere di λ e di $\pm\theta$ e che, per alte frequenze cioè per grandi valori di α, i valori delle funzioni medesime sono sensibilmente diverse da zero soltanto per valori delle variabili λ e θ moltò vicini a zero; ne segue che il valore degli integrali in discorso resta sensibilmente inalterato, anche se come limiti di integrazione si assumono per il primo integrale 0 ed ∞ e per il secondo $-\infty$ e ∞.

Ne segue che

$$W = \frac{\sigma l a w_0^2}{2} \int_0^\infty e^{-2\alpha\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha\beta^2\theta^2} d\theta .$$

Ora, cercando prima l'integrale indefinito di $e^{-2\alpha\lambda}$, si trova facilmente che

$$\int_0^\infty e^{-2\alpha\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\alpha} .$$

Quanto all'altro integrale è noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}} ;$$

se ne deduce che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha\beta^2\theta^2} d\theta = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

e conseguentemente

$$W = \frac{\sigma l a w_0^2 \sqrt{\pi}}{4\beta\sqrt{2}} \alpha^{-\frac{3}{2}} .$$

D'altra parte, indicando con I l'intensità totale della corrente, si ha

$$I = \int w \, dS ,$$

dove dS è l'elemento di area della sezione del filo, ossia

$$dS = (a - \lambda)\, d\lambda\, d\theta .$$

Con considerazioni del tutto analoghe a quelle or ora fatte per il calcolo di W, si ottiene

$$I = a \int_0^\infty d\lambda \int_-^+ w\, d\theta .$$

Ora

$$w = \text{parte reale di } w_0\, e^{-\alpha(\lambda\beta^2\theta^2)}\, e^{\omega t i - \alpha(\lambda+\beta^2\theta^2)i}$$
$$= \quad " \quad " \quad " \quad w_0\, e^{\omega t i}\, e^{-\alpha(\lambda+\beta^2\theta^2)(1+i)}$$

e quindi

$$I = \text{parte reale di } a w_0 e^{\omega t i} \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda(1+i)} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\beta^2(1+i)\theta^2} d\theta .$$

Eseguendo le integrazioni ho:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\lambda(1+i)} d\lambda = \frac{1}{\alpha(1+i)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\beta^2(1+i)\theta^2} d\theta = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha(1+i)}},$$

e sostituendo

$$I = \text{parte reale di } \frac{a w_0 \sqrt{\pi}}{\beta}\, \alpha^{-3/2}\, e^{\omega t i} (1+i)^{-3/2} .$$

Siccome

$$1 + i = e^{\frac{\pi}{4} i}$$

si ha

$$(1+i)^{-3/2} = e^{-\frac{3\pi}{8} i}$$

e quindi

$$I = \text{parte reale di } \frac{a w_0 \sqrt{\pi}}{\beta}\, \alpha^{-3/2}\, e^{(\omega t - \frac{3\pi}{8}) i} =$$
$$= \frac{\alpha w_0 \sqrt{\pi}}{\beta}\, \alpha^{-3/2} \cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{8}\right) .$$

Il valore medio del quadrato di I, nel corso di un periodo è quindi

$$I_m^2 = \frac{\alpha^2 w_0^2 \pi}{\beta^2}\, \alpha^{-3} .$$

Il rapporto $\frac{W}{I_m^2}$ dà, come è noto, la resistenza del conduttore. Si ha dunque:

$$R = \frac{W}{I_m^2} = \sigma l \frac{\beta}{4a\sqrt{2\pi}}\, \alpha^{3/2} = \frac{\sigma l \pi \beta}{2a} \left(\frac{\mu}{\sigma T}\right)^{3/4},$$

dove si è indicato con T il periodo della corrente.

Se lo stesso filo fosse steso in linea retta, si troverebbe, secondo la nota formula del Rayleigh, per la sua resistenza R′ il valore

$$R' = \frac{\sigma l}{a}\left(\frac{\pi}{\sigma T}\right)^{1/2}, \tag{8}$$

e quindi

$$\frac{R}{R'} = \frac{\pi\beta}{2}\sqrt[4]{\frac{\pi}{\sigma T}}, \tag{9}$$

ovvero

$$\frac{R}{R'} = K\sqrt[4]{\frac{1}{T}}, \tag{10}$$

dove la costante K ha il valore

$$K = \frac{\beta\pi}{2}\sqrt[4]{\frac{\pi}{\sigma}}.$$

Il risultato, espresso dalla formola (9), differisce essenzialmente da quello trovato dal Sommerfeld e rispecchia una importantissima circostanza, che realmente si verifica nella pratica, cioè la dipendenza del rapporto $\frac{R}{R'}$ dalla frequenza delle correnti; come si vede dalla (9), il valore di questo rapporto cresce proporzionalmente alla radice quarta della frequenza. Ora il Sommerfeld, confrontando la resistenza R del solenoide per correnti di alta frequenza, non con R′ ma con quella R_0 dello stesso solenoide per correnti continue, trova che il rapporto

$$\frac{R}{R_0}$$

è proporzionale alla radice quadrata della frequenza. Per stabilire un confronto tra il risultato del Sommerfeld ed il mio, basta osservare che, secondo la formola del Rayleigh, sopra ricordata, si ha per la resistenza di un filo rettilineo con correnti di alta frequenza

$$R' = \frac{\sigma l}{a^2}\, a\left(\frac{\pi}{\sigma T}\right)^{1/2} = R_0\, a\left(\frac{\pi}{\sigma T}\right)^{1/2}.$$

I rapporti $\frac{R}{R_0}$ ed $\frac{R'}{R_0}$ sono dunque tutti e due proporzionali alla radice quadrata della frequenza e perciò, combinando insieme il risultato del Sommerfeld con quello del Rayleigh, il quoziente di questi due rapporti, cioè l'espressione

$$\frac{R}{R'}$$

dovrebbe, al contrario di quanto è indicato dalla mia formola (21), essere indipendente dalla frequenza. Per decidere la cosa sperimentalmente basta

dare un'occhiata al seguente quadro in cui sono riassunti i risultati delle poche esperienze che finora si conoscono su questo proposito e che sono quelle da me fatte nel citato lavoro sulle scariche oscillatorie [1].

Periodo	$\frac{R}{R'} = \frac{\text{Resistenza del solenoide}}{\text{Resistenza del filo rettilineo}}$
$4{,}3 \times 10^{-6}$ sec	1,96
$3{,}0 \times 10^{-6}$ sec	2,15
$2{,}2 \times 10^{-6}$ sec	2,17

Si vede senz'altro che, conformemente alla mia conclusione, col crescere della frequenza va sempre crescendo il valore del rapporto $\frac{R}{R'}$. Ma c'è di più: anche la legge quantitativa, espressa dalla (22), si può ritenere, con discreta approssimazione, confermata dalle esperienze medesime. Infatti, secondo la mia formola, l'espressione:

$$\frac{R}{R'} \sqrt[4]{T}$$

dovrebbe, per alte frequenze, conservare un valore costante.

Ora, se con i dati sopra riferiti si calcola il valore della costante $K = \frac{R}{R'} \sqrt[4]{T}$ si ha:

T	$K = \frac{R}{R'} \sqrt[4]{T}$
$4{,}3 \times 10^{-6}$	$2{,}82 \times 10^{-3/2}$
$3{,}0 \times 10^{-6}$	$2{,}83 \times 10^{-3/2}$
$2{,}2 \times 10^{-6}$	$2{,}64 \times 10^{-3/2}$

Come si vede, specialmente per le prime due frequenze, la concordanza fra la mia formola e le esperienze, se non è casuale, è addirittura perfetta. Quanto alla terza frequenza ritengo che il valore sperimentale di $\frac{R}{R'}$ sia molto più piccolo del vero; pare infatti poco probabile, esaminando la penultima tabella, che, mentre per il passaggio dal periodo

$$T = 4{,}3 \times 10^{6}$$

al periodo

$$T = 3{,}0 \times 10^{-6}$$

il rapporto $\frac{R}{R'}$ subisce un notevole aumento, debba poi quel rapporto nel

[1] l. c., pag. 374.

successivo intervallo, relativamente più ampio, compreso fra il periodo

$$T = 3{,}0 \times 10^{-6}$$

e il periodo

$$T = 2{,}2 \times 10^{-6}$$

mantenere un valore costante.

Per avvalorare le mie conclusioni con una maggior copia di dati sperimentali, ho già da qualche tempo ripreso le misure di resistenza di speciali solenoidi per correnti di alta frequenza, e fra poco ne comunicherò i risultati a questa Accademia.

Finalmente è da rilevarsi che il coefficiente di proporzionalità K dipende certamente dal passo della spirale, e dai ragionamenti da me fatti per venire alla formola finale si capisce che, col crescere del passo, diminuisce il valore del coefficiente b che comparisce nella (1) e con esso il valore della costante K. Anche ciò è pienamente confermato dalle esperienze da me riferite a pag. 375 del citato lavoro.

Meccanica. — *Sul principio dei lavori virtuali in rapporto all'attrito.* Nota di G. Almansi, presentata dal Socio V. Volterra.

1. È oggetto di questa Nota esaminare se il *Principio dei lavori virtuali*, in quanto rappresenta la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio, non possa applicarsi a quei sistemi di corpi fra le cui superficie si esercita attrito.

Dallo studio di alcuni casi fra i più semplici, apparirà chiaramente quali ipotesi è necessario fare affinchè il detto Principio possa ritenersi valido.

2. Consideriamo da prima un sistema costituito di due corpi a contatto, C e C′, i quali si presentano ai nostri sensi come indeformabili, e separati dal piano Π.

Il corpo C′ sia fisso, C mobile. Le forze esterne agenti sopra C si riducano ad una forza F, applicata ad un suo punto P.

Diciamo n la normale a Π, condotta da P e rivolta verso C′, θ l'angolo che F forma con n.

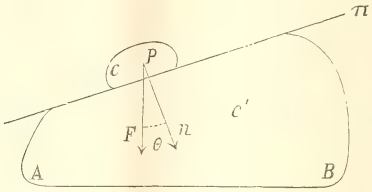
Ammettendo che il Principio de' lavori virtuali sia valido, e denotando con L il lavoro eseguito dalla forza F per uno spostamento di C, la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di questo corpo sarà espressa dalla formula

$$L \leqq 0,$$

che dovrà esser verificata per tutti gli spostamenti infinitesimi di C compa-

tibili coi vincoli, ossia colla presenza del corpo C′. È superfluo ricordare che nella formula con cui si esprime il Principio de' lavori virtuali non devono figurare le *resistenze passive* (reazioni dei vincoli) e che il segno $<$ è necessario quando si hanno vincoli *unilaterali*.

In alcuni casi l'esperienza ci dirà che l'equilibrio di C non sussiste se non quando θ abbia sensibilmente il valore *zero*. Supponiamo, invece, di aver constatato che C sta in equilibrio anche se l'angolo θ è diverso da zero, purchè non superi un certo valore Θ compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Noi diciamo in tal caso che fra la superficie di C e quella di C′ *si esercita attrito*.



Quando ciò accade, non potremo ritenere che C e C′ siano *esattamente* separati dal piano Π: poichè, se ciò fosse, noi potremmo dare a C una traslazione formante un angolo ottuso con n, ma un angolo acuto con F; e per un tale spostamento, a cui i vincoli non si opporrebbero, la forza F eseguirebbe un lavoro $L > 0$.

Se dunque il Principio de' lavori virtuali si vuol ritenere valido anche quando fra le superficie di C e C′ si esercita attrito, e d'altra parte non vogliamo introdurre arbitrariamente nuove forze esterne, dobbiamo intanto abbandonare l'ipotesi che i due corpi siano esattamente separati dal piano Π. Noi potremo supporre che si abbiano particelle appartenenti a C situate, rispetto al piano Π, dalla parte verso cui è rivolta la normale n, e particelle di C′ situate dal lato opposto, le quali, finchè θ non supera Θ, impediscono a C tutti quegli spostamenti infinitesimi per cui la forza F eseguirebbe un lavoro positivo. Denoteremo con k tali particelle.

Le particelle k, potranno essere, per esempio, dei piccoli coni di rivoluzione, aventi gli assi normali al piano Π, le basi su questo piano, e le generatrici inclinate dell'angolo Θ sul piano stesso: ma è evidente che infinite altre forme si potrebbero loro attribuire.

Per ciascuna delle particelle k appartenenti a C o C′, dovremo immaginare, in C′ o C, una cavità entro la quale la particella si trova: e non sarà necessario che ogni particella riempia del tutto la cavità corrispondente.

Poichè, conservando a Θ il suo valore, possiamo attribuire alle particelle k dimensioni piccole ad arbitrio, non v'è difficoltà ad ammettere che la loro presenza possa sfuggire alla nostra osservazione. Noi d'altronde non vogliamo affermare che tali particelle esistono, ma che *tutto accade come se esse esistessero, e il Principio de' lavori virtuali fosse valido.*

3. In questo primo caso esaminato, si può conservare l'ipotesi che i due corpi a contatto siano assolutamente indeformabili. Ma ciò in generale non è possibile.

Consideriamo ancora un corpo C apparentemente indeformabile, compreso fra *due* corpi fissi C′, C″, limitati dai piani paralleli Π', Π''. Fra la superficie di C, e quelle dei due corpi, coi quali esso è a contatto, si eserciti attrito.

Le forze esterne agenti sopra C si riducono ad una forza F, applicata ad un suo punto P e parallela ai due piani. L'esperienza ci mostrerà che l'equilibrio di C sussiste finchè la grandezza della forza non supera un certo valore F_0.

Analogamente a quanto accadeva nell'altro caso, se si ammette che il Principio d. l. v. sia valido, non potremo ritenere che i corpi C, C′, C″ siano esattamente separati dai piani Π', Π''; poichè se ciò fosse, supposto C in equilibrio sotto l'azione di una forza F diversa da zero, noi potremmo dare ad esso una traslazione infinitesima nella direzione e nel verso della forza, che eseguirebbe così un lavoro positivo.

Supporremo dunque che vi siano particelle di C fuori dello spazio compreso fra i due piani, e particelle di C′ e C″ entro questo spazio, le quali, finchè i tre corpi non subiscono deformazioni, impediscono a C qualsiasi spostamento.

Ma poichè, quando F supera in grandezza il valore F_0, noi constatiamo uno spostamento di C, dovremo ammettere che i corpi del nostro sistema *possono deformarsi.* Per attenerci all'ipotesi più semplice, supporremo che essi presentino, sia pure in grado piccolissimo, le proprietà degli ordinarî solidi elastici. Diciamo, per una deformazione qualunque del sistema, L il lavoro delle forze esterne, L_i il lavoro delle forze interne: la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio sarà espressa dalla formula

$$L + L_i \leqq 0, \tag{1}$$

che dovrà esser verificata per tutte le deformazioni infinitesime che il sistema può subire.

4. Abbiasi ora un sistema di quanti corpi C si voglia, limitati apparentemente dalle superficie Σ. Denoti σ la totale superficie apparente di contatto (nei casi esaminati σ fa parte dei piani Π, Π', Π'').

La presenza delle particelle k che si trovano fuori delle sup. Σ, se trascuriamo le deformazioni elastiche che tali particelle potranno subire, avrà unicamente l'effetto d'introdurre nel sistema un nuovo vincolo, che denoteremo

con V. Fissato il verso della normale n, in ogni punto di σ, e detto μ *il vettore differenza geometrica fra gli spostamenti virtuali di due punti vicinissimi ad un punto* P *di* σ, *e appartenenti l'uno al corpo situato dalla parte di* n, *l'altro all'altro corpo*, il vincolo V consiste in questo, che l'angolo formato da μ con n non può superare il valore $\frac{\pi}{2} - \Theta$.

Introdotto il vincolo V, noi potremo ragionare come se le particelle k non esistessero, e σ fosse la *vera* superficie di contatto fra i corpi del sistema.

5. Posto così il problema, passiamo senz'altro a trasformare, nel caso generale, la formula (1).

Le superficie Σ dei corpi C potranno avere dei punti di contatto con altri corpi (p. es. i punti della superficie AB nel primo caso esaminato). Questi punti, per non complicare inutilmente la questione, li supporremo fissi.

Consideriamo da prima quelle deformazioni per cui lo spostamento è continuo anche nei punti di σ $(\mu = 0)$. Si cadrà nel caso di un ordinario solido elastico, e ritroveremo le note relazioni $\frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \cdots + X = 0$, ecc. che legano le tensioni interne alle forze esterne.

Teniamo poi conto di tutte le altre possibili deformazioni del sistema. Per ogni corpo C il lavoro

$$\int_C \left\{ X\delta x + Z\delta y + Z\delta z \right\} dC - \int_C \left\{ t_{11} \frac{\partial \delta x}{\partial x} + t_{12} \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta x}{\partial x} \right) + \cdots \right\} dC$$

eseguito dalle forze esterne (forze di massa) e dalle forze interne (forze elastiche), avendo presenti le relazioni già stabilite, potremo trasformarlo in un integrale esteso alla sup. Σ di C. Esso sarà uguale a

$$-\int_\Sigma (p\xi + q\eta + r\zeta) d\Sigma ,$$

ove per ogni punto P di σ, ξ, η, ζ rappresentano le componenti, secondo la normale interna e due direzioni ortogonali tangenti a σ, dello spostamento di P, $pd\Sigma$, $qd\Sigma$, $rd\Sigma$ le componenti, secondo le stesse direzioni, della forza che agisce sulla faccia esterna dell'elemento $d\Sigma$.

Nei punti di Σ non a contatto con altri corpi del sistema, non appartenenti cioè a σ, l'elemento dell'integrale è nullo.

Il lavoro totale sarà dato dalla formola

$$L + L_i = -\int_\sigma (p\xi + q\eta + r\zeta) d\sigma ,$$

ove ξ, η, ζ rappresenteranno le componenti del vettore μ (spostamento rela-

lativo) se intendiamo che $pd\sigma$, $qd\sigma$, $rd\sigma$ sieno le componenti della forza f che agisce sulla faccia dell'elemento $d\sigma$ opposta ad n.

Poichè ξ, η, ζ sono arbitrarie, salvo a soddisfare la condizione imposta dal vincolo V, dovrà essere, in tutti i punti di σ,

$$p\xi + q\eta + r\zeta \geqq 0,$$

per qualunque direzione di μ formante con n un angolo non maggiore di $\frac{\pi}{2} - \Theta$; quindi se θ è l'angolo che f forma con n, dovrà essere

$$\theta \leqq \Theta.$$

Questa è appunto la condizione d'equilibrio, quale risulta dall'esperienza.

Dunque l'ipotesi che un sistema di corpi a contatto, fra le cui superficie si esercita attrito, sia soggetto al vincolo V, ci permette di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio, applicando rigorosamente il Principio dei lavori virtuali.

Se diciamo λ la grandezza del vettore proiezione di μ sul piano tangente a σ, la condizione imposta dal vincolo V sarà espressa dalla formula $\xi \geqq \lambda \operatorname{tag} \Theta$, ovvero, posto $\operatorname{tag} \Theta = \mathrm{K}$,

$$\xi \geqq \mathrm{K}\lambda. \quad (\xi = \text{comp. normale di } \mu).$$

6. Nel linguaggio ordinario, quando si studiano le condizioni d'equilibrio di un sistema di corpi, le cui superfice presentano attrito, non si parla di *vincoli*, ma di *forze d'attrito*. Noi vogliamo trasformare la formula (1) in modo da poter esprimere la condizione che essa rappresenta, adoperando i termini ordinariamente usati.

Perciò diciamo ora ξ, η, ζ le componenti del vettore μ in una deformazione infinitesima D che sarebbe possibile *se il vincolo* V *non esistesse*: la condizione $\xi \geqq \mathrm{K}\lambda$ potrà non esser verificata. Poniamo

$$\xi' = \xi + \varphi\lambda, \; \eta' = \eta, \; \zeta' = \zeta \quad , \quad (\lambda = |\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}|)$$

φ essendo una funzione di ξ, η, ζ, tale che risulti sempre $\xi' \geqq \mathrm{K}\lambda$. Quando è $\xi \geqq \mathrm{K}\lambda$, supporremo $\varphi = 0$, quando $\xi = 0$, $\varphi = \mathrm{K}$.

Una deformazione D′ a cui corrisponda il vettore μ' di componenti ξ', η', ζ' sarà compatibile anche col vincolo V. E tutte le deformazioni D′ compatibili col vincolo V saranno comprese nelle D.

Nella deformazione D′ il lavoro $\mathrm{L}' + \mathrm{L}'_i$ eseguito dalle forze esterne ed interne è dato dalla formula

$$\mathrm{L}' + \mathrm{L}'_i = -\int_\sigma (p\xi' + q\eta' + r\zeta')d\sigma,$$

la quale, sostituendo a ξ', η', ζ' le loro espressioni $\xi + \varphi\lambda$, η, ζ, e ponendo

$$L_a = -\int_\sigma \varphi\lambda\, p d\sigma,$$

si potrà scrivere

$$L' + L'_i = L + L_i + L_a,$$

ove L ed L_i rappresentano i lavori che eseguirebbero le forze nella def. D.

La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del sistema ($L' + L'_i \overline{<} 0$) sarà quindi espressa dalla formula

$$L + L_i + L_a \overline{<} 0,$$

la quale dovrà esser verificata *per tutte le deformazioni infinitesime* D *che il sistema potrebbe subire se il vincolo* V *non esistesse.*

Possiamo dunque dire che, per quanto riguarda l'equilibrio, *il fenomeno ci si presenta come se tutte le deformazioni* D *fossero possibili, ma per produrre tali deformazioni si dovessero vincere delle forze il cui lavoro fosse uguale ad* L_a. Secondo la rappresentazione che noi abbiamo dato del fenomeno, questo lavoro si riferisce invece ad una deformazione, la quale, composta con D, ci dà una deformazione D′ compatibile con tutti i vincoli a cui il sistema si suppone assoggettato.

Quando il vettore μ è tangente a σ ($\lambda = \mu$), l'elemento dell'integrale esteso a σ che dà il valore di L_a, è il prodotto della costante — K per la componente normale $p d\sigma$ della pressione che agisce su $d\sigma$, e per lo spostamento tangenziale λ.

La costante positiva $K = \operatorname{tag} \Theta$ avrà in ogni punto di σ un valore determinato, dipendente dalla natura dei due corpi a contatto e delle loro superficie *reali*. Essa non è altro che il *coefficiente d'attrito* (di primo distacco).

Si noti che il lavoro L_a può esser diverso da zero anche se in nessun punto di σ lo spostamento relativo μ giace sul piano tangente. Ciò apparirà ben naturale quando si pensi che σ non è la *vera* superficie di contatto fra i corpi del sistema.

Per una qualsiasi deformazione D diremo che L_a rappresenta il *lavoro delle forze d'attrito*. Chiameremo poi *vincoli apparenti* tutti i vincoli ai quali il sistema si suppone assoggettato, escluso il vincolo V. Onde avremo il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema di corpi a contatto, fra le cui superfice si esercita attrito, è questa: che per qualunque deformazione infinitesima compatibile coi vincoli apparenti, la somma dei lavori eseguiti dalle forze esterne, dalle forze interne, e dalle forze d'attrito sia nulla o negativa.

Matematica. — *Sopra una ricerca di limite.* Nota di Ettore Bortolotti, presentata dal Corrispondente E. Cesàro.

Il teorema:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

dal quale, direttamente od indirettamente, hanno preso origine molte ricerche del Cesàro sulla *Aritmetica assintotica* (1), e quelle del Borel sulle *Serie sommabili*; è dimostrato solo nel caso in cui la variabile positiva b_n vada allo zero sempre decrescendo, e la somma $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ cresca oltre ogni limite (2).

Questo è infatti il caso che più naturalmente si presenta nella teoria delle serie a termini positivi; ma il teorema medesimo si presta a molte altre importanti applicazioni, per le quali occorre che le b_n sieno assoggettate a condizioni più larghe.

In particolare, ho dovuto applicarlo allo studio della *frequenza di insiemi lineari*, ed a quello generale della *convergenza di algoritmi infiniti*; in casi in cui le b_n dovevano essere supposte infinite, ed in altri in cui la somma $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, era infinitesima per $n = \infty$.

Ho visto, che pur conservando per la variabile a_n la massima generalità di definizione, il teorema è valido anche in cotesti casi, *quando si ammetta che la variabile monotona*

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

abbia *ordine finito di infinito o di infinitesimo*; ma che non è più valido, senza che per le a_n si introducano speciali ipotesi, per variabili B_n crescenti più rapidamente di qualsiasi potenze positiva n^a, o decrescenti più rapidamente di qualunque potenza negativa n^{-a}

1. Teorema 1°. *Se, crescendo n all'infinito, la variabile b_n si conserva monotona e la somma*

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \tag{1}$$

(1) Rend. Acc. Sc. fisiche e mat. di Napoli, 1893, pag. 187; Mathesis, 1893, pag. 241, Atti Acc. Sc. di Napoli, 1894, n. 11; Rend. Circ. Mat. di Palermo, tomo I, pp. 224-293.

(2) Vedasi p. es. Cesàro, *Analisi algebrica*, pag. 103.

è infinita di ordine finito, si ha

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

purchè il secondo membro esista e sia finito (o nullo).

Se la variabile B_n *è infinita del primo ordine (secondo la definizione di Cauchy)* [1], *il teorema ha luogo anche nella ipotesi che esista solo il primo membro, purchè si sappia che il valore assoluto del secondo membro ha massimo limite finito.* (Questa condizione è in particolare soddisfatta se il valore assoluto $|a_n|$ ha massimo limite finito).

Il teorema è noto per variabili b_n infinitesime; se la variabile monotona b_n non è infinitesima, la somma

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

è infinita del primo ordine almeno.

Se B_n è infinita del primo ordine, dovremo avere [2]:

$$(3)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\Delta B_n}{B_n} : \frac{1}{n} = 1;$$

se ha ordine finito, maggiore di 1, determineremo due numeri positivi ε, μ, con la condizione:

$$(4)\qquad \begin{cases} \min.\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\Delta B_n}{B_n} : \dfrac{1}{n} \geqq 1 + \varepsilon, \\ \max.\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\Delta B_n}{B_n} : \dfrac{1}{n} < \mu. \end{cases}$$

Pongasi:

$$(5)\qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n\lambda_n,$$

$$(6)\qquad c_n = n(b_{n+1} - b_n),$$

$$(7)\quad C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = nb_{n+1} - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = n\Delta B_n - B_n.$$

Avremo le identità:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_n b_n &= \lambda_1 b_1 + (2\lambda_2 - \lambda_1) b_2 + \cdots + (n\lambda_n - (n-1)\lambda_{n-1}) b_n \\ &= \lambda_n \{ b_1 + b_2 + \cdots + b_n + c_1 + c_2 + \cdots + c_n \} - \\ &\quad - (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_n c_n); \end{aligned}$$

da cui

$$(8)\qquad \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lambda_n + \\ + \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \left\{ \lambda_n - \frac{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_n c_n}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \right\}.$$

[1] *Oeuvres*, sér. II, t. IV, pag. 281. Vedi ancora: E. Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*; E. Bortolotti, *Lezioni pel calcolo degli infinitesimi* (Modena 1905).

[2] Cfr. Bortolotti, *Contributo alla teoria degli infiniti*, Ann. di Mat. t. XI della serie III, pag. 50; *Lezioni sul calcolo degli infinitesimi*, pag. 50.

Ora

$$(9)\qquad \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{n\Delta B_n-B_n}{B_n}=\frac{\Delta B_n}{B_n}:\frac{1}{n}-1;$$

onde, ricordando la (3), si vede che, *se la* B_n *è infinita del primo ordine, si ha*

$$(10)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=0.$$

Poichè $|\lambda_n|$ ha massimo limite finito, indicando questo con L, avremo:

$$\begin{cases}\max.\lim\limits_{n=\infty}|\lambda_n|\leqq L,\\ \max.\lim\limits_{n=\infty}\left|\dfrac{\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\cdots+\lambda_nc_n}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\right|\leqq L;\end{cases}$$

onde ancora:

$$\max.\lim_{n=\infty}\left|\lambda_n-\frac{\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\cdots+\lambda_nc_n}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\right|<2L,$$

e, per la (10):

$$(11)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\left\{\lambda_n-\frac{\lambda_1c_1+\cdots+\lambda_nc_n}{c_1+\cdots+c_n}\right\}=0.$$

Dalla identità (8) ricaviamo dunque:

$$(12)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\lim_{n=\infty}\lambda_n;$$

quando uno dei due membri esista.

Sia invece B_n infinita di ordine superiore al 1°.

Considerando che, in questa ipotesi, la b_n non può essere decrescente; vediamo che la

$$c_n=n(b_{n+1}-b_n)$$

è sempre positiva o nulla, *la* C_n *è dunque monotona*; mentre, dalla prima delle (4), ricaviamo

$$C_n\geqq\varepsilon B_n,$$

la quale ci assicura che *la* C_n *è infinita per* $n=\infty$.

Supposto dunque che esista il limite della variabile λ_n, si avrà per un noto teorema:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\cdots+\lambda_nc_n}{c_1+c_2+\cdots+c_n}=\lim_{n=\infty}\lambda_n,$$

ed in conseguenza, se λ_n è finito o nullo,

$$\lim_{n=\infty}\left\{\lambda_n-\frac{\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\cdots+\lambda_nc_n}{c_1+c_2+\cdots+c_n}\right\}=0.$$

Si ha poi, per le (4), (9),

$$\max.\lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \max.\lim_{n=\infty} \left(\frac{\Delta B_n}{B_n} : \frac{1}{n} - 1 \right) < \mu - 1 .$$

Dunque rimane provato, che

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \left\{ \lambda_n - \frac{c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + \cdots + c_n \lambda_n}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \right\} = 0$$

e, dalla identità (8) ricaviamo

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n=\infty} \lambda_n ,$$

purchè il secondo membro esista, e sia finito (o nullo).

2. Teorema 2°. *Se la variabile* $R_n = a_0 b_0 - a_1 b_1 - \cdots - a_n b_n$, *è infinitesima, la variabile* b_n *è monotona, e la variabile* $\beta = b_0 - b_1 - b_2 - \cdots - b_n$, *è infinitesima, di ordine non superiore a quello di qualunque potenza positiva* $\left(\frac{1}{n}\right)^a$, *di* $\frac{1}{n}$, *si ha*

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 b_0 - a_1 b_1 - \cdots - a_n b_n}{b_0 - b_1 - b_2 - \cdots - b_n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} ,$$

purchè il secondo membro esista, e sia finito (o nullo).

Pongasi

$$(13) \qquad \begin{cases} a_0 = \lambda_0 \ , \ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n \lambda_n \\ c_0 = b_0 \ , \ c_n = n(b_n - b_{n+1}) \\ \gamma_n = c_0 - c_1 - c_2 - \cdots - c_n = \beta_n + n b_{n+1} . \end{cases}$$

Per la convergenza della serie a termini positivi monotoni Σb_n, supposta dal nostro enunciato, si ha

$$\lim_{n=\infty} n b_{n+1} = 0 ;$$

ed anche perciò, dalle (13),

$$\lim_{n=\infty} \gamma_n = 0 .$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, converge dunque verso la somma c_0.

Si ha poi la identità

$$a_0 b_0 - a_1 b_1 - \cdots - a_n b_n =$$

$$= a_0 b_0 - \lambda_1 b_1 - (2\lambda_2 - \lambda_1) b_2 - \cdots - (n \lambda_n - (n-1) \lambda_{n-1}) b_n$$
$$= \lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 - \cdots - n \lambda_n b_{n+1} .$$

Da cui

$$(14)\qquad a_0 b_0 - a_1 b_1 - \cdots - a_n b_n = \\ = \lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 - \cdots - \lambda_n c_n + \lambda_n(\beta_n - \gamma_n).$$

Osserviamo anzitutto che

$$\lim_{n=\infty} \lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 - \cdots - \lambda_n c_n = 0,$$

cioè che *le serie* $\sum_1^\infty \lambda_n c_n$ *converge verso la somma* $c_0 \lambda_0$.

In secondo luogo poi, dividendo per β_n, abbiamo dalla (14):

$$(15)\quad \frac{a_0 b_0 - a_1 b_1 - \cdots - a_n b_n}{b_0 - b_1 - \cdots - b_n} = \lambda_n + \frac{\gamma_n}{\beta_n}\left\{\frac{\lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \cdots - \lambda_n c_n}{c_0 - c_1 - \cdots - c_n} - \lambda_n\right\}.$$

Poichè la variabile

$$\gamma_n = c_0 - c_1 - \cdots - c_n,$$

al crescere indefinito di n, tende allo zero, senza mai crescere; ed anche la variabile

$$\lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \cdots - \lambda_n c_n,$$

è infinitesima, avremo

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \cdots - \lambda_n c_n}{c_0 - c_1 - \cdots - c_n} = \lim_{n=\infty} c_n,$$

purchè esista il secondo membro, ed anche perciò:

$$\lim_{n=\infty} \left\{\frac{\lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \cdots - \lambda_n c_n}{c_0 - c_1 - \cdots - c_n} - \lambda_n\right\} = 0.$$

Siccome poi

$$\frac{\gamma_n}{\beta_n} = \frac{\beta_n + n b_{n+1}}{\beta_n} = 1 + \frac{n b_{n+1}}{\beta_n} = 1 + \frac{\Delta \beta_n}{\beta_n} : \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n+1}};$$

ed è noto che, se la variabile β_n ha ordine finito di infinitesimo, si può determinare un numero L tale che

$$\max.\lim_{n=\infty} \frac{\Delta \beta_n}{\beta_n} : \frac{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} < \mathrm{L};$$

così rimane provato, che

$$\lim_{n=\infty} \frac{\gamma_n}{\beta_n}\left\{\frac{\lambda_0 c_0 - \lambda_1 c_1 - \cdots - \lambda_n c_n}{c_0 - c_1 - \cdots - c_n} - \lambda_n\right\} = 0;$$

ed infine, per la (15),

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0 b_0 - a_1 b_1 - \cdots - a_n b_n}{b_0 - b_1 - \cdots - b_n} = \lim_{n=\infty} \lambda_n .$$

3. I risultamenti ottenuti si possono riassumere nell'enunciato seguente:

Teorema 3°. *Date due serie:*

$$\sum_1^\infty u_n \quad , \quad \sum_1^\infty b_n ,$$

delle quali la seconda è a termini positivi, monotoni; se al tendere di n all'infinito, esiste limite determinato e finito per la media:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \cdots + \frac{u_n}{b_n}\right),$$

dei rapporti dei primi n termini corrispondenti; allo stesso limite tende il rapporto

$$\frac{U_n}{B_n} = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n},$$

delle loro somme, quando la Σb_n *sia divergente; od il rapporto*

$$\frac{R_n}{\beta_n} = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots}{b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots}$$

dei loro resti, se entrambe convergano; purchè la variabile B_n *non diverga nel primo caso più rapidamente di qualunque potenza positiva* n^a *della n, o la* B_n *non sia, nel secondo caso, infinitesima di ordine superiore a quello di qualunque potenza negativa* $\frac{1}{n^a}$, *della n.*

4. Le condizioni che in questo enunciato si sono imposte, circa la rapidità di crescenza della B_n, o la rapidità di evanescenza della β_n, sono essenziali.

Senza entrare qui in particolari minuti, che troveranno posto in una Memoria di prossima pubblicazione negli Atti dell'Accademia di Scienze lettere ed arti in Modena; mi basti osservare, che fatto

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{u_1}{b_1} = 0 , \frac{u_2}{b_2} = 0 , \ldots , \frac{u_r}{b_r} = 0 , \frac{u_{r+1}}{b_{r+1}} = 1 , \frac{u_{r+2}}{b_{r+2}} = 1 , \ldots , \frac{u_{r+\frac{r}{\lg r}}}{b_{r+\frac{r}{\lg r}}} = 1 , \\
\frac{u_{r+\frac{r}{\lg r}+1}}{b_{r+\frac{r}{\lg r}+1}} = 0 , \frac{u_{r+\frac{r}{\lg r}+2}}{b_{r+\frac{r}{\lg r}+2}} = , \ldots , \\
\qquad\qquad \frac{u_{r^2}}{b_{r^2}} = 0 , \frac{u_{r^2+1}}{b_{r^2+1}} = 1 , \frac{u_{r^2+2}}{b_{r^2+2}} = 1 , \ldots , \frac{u_{r^2+\frac{r^2}{(\lg r)^2}}}{b_{r^2+\frac{r^2}{(\lg r)^2}}} = 1 , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r > 2 ,
\end{array}\right.$$

dove si è scritto brevemente

$$\frac{r}{\lg r}, \quad \frac{r^2}{(\mathrm{G}\, r)^2} \cdots$$

invece dei massimi interi contenuti in quelle espressioni; si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{u_1}{b_1} + \frac{u_2}{b_2} + \cdots + \frac{u_n}{b_n} \right) = 0 .$$

Se poi si prende $b_n = e^{n^{\frac{1}{\mu}}}$, μ positivo arbitrario, si trova che il rapporto

$$\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n},$$

non cessa di oscillare fra i limiti 0, 1.

Matematica. — *Ricerche sulle funzioni derivate.* Nota di Beppo Levi, presentata dal Socio C. Segre.

Riprendo in questa Nota e nella successiva lo studio delle relazioni fra il comportamento delle funzioni derivate e quello delle loro funzioni primitive, di cui già trattai in altra Nota [1] portante lo stesso titolo. E con nuove argomentazioni mostrerò come i risultati già ottenuti per le funzioni a funzioni derivate limitate si estendano ancora a casi molto più generali.

1. *Se una funzione continua $\psi(x)$ ha in un intervallo $a \ldots b$ un incremento di valor assoluto* K *e se si sa che, tolto dall'intervallo $a \ldots b$ un aggregato* A *di punti cui corrisponde un aggregato di valori di $\psi(x)$ di misura* $\mathrm{H} < \mathrm{K}$ [2], *in tutti i punti residui, fatta eccezione per quelli di un aggregato di misura nulla, la derivata superiore a destra della $\psi(x)$ è nulla, esistono in $a \ldots b$ infiniti punti non appartenenti ad* A *ed in cui almeno una derivata di $\psi(x)$ è infinita* (La proposizione rimane evidentemente vera se in luogo della derivata superiore a destra si considera uno qualunque degli altri tre numeri derivati [3]).

[1] Vedi pag. 433.

[2] La dimostrazione si semplifica notevolmente nell'ipotesi della non esistenza dell'aggregato A; il lettore potrà ottenere tal semplificazione considerando come nulli i segmenti e aggregati di segmenti $\mathcal{S}$, S, s_i, σ_i, e nulli pure i numeri H, χ e come non esistenti quindi le considerazioni che a questi elementi si riferiscono.

[3] Il ragionamento si ripete per questi altri numeri derivati, per semplice analogia. D'altronde una osservazione già fatta nella Nota precedente (n. 3) permette di dedurre le proposizioni analoghe direttamente da quella del testo, senza riprendere il ragionamento. Nel seguito le proposizioni analoghe a quelle enunciate, per le singole funzioni derivate, saranno costantemente sottintese.

Si chiami B l'aggregato dei punti di $a \dots b$, non appartenenti ad A, ed in cui si sa che la derivata superiore a destra di $\psi(x)$ è nulla; C l'aggregato di misura nulla di punti non appartenenti ad A in cui non si conosce la derivata di $\psi(x)$, $\mathfrak{A}$ l'aggregato dei valori di $\psi(x)$ corrispondenti ai punti di A.

Assegnato arbitrariamente un $\chi > 0$, si può determinare un aggregato $\mathcal{S}$ di segmenti di misura totale compresa fra H e $H + \chi$, contenente nel suo interno $\mathfrak{A}$. Se x_0 è un punto di A, il valore corrispondente $\psi(x_0)$ di $\psi(x)$ sarà interno a qualche segmento di $\mathcal{S}$ e, per la continuità di ψ, si potrà determinare un intervallo contenente x_0 nel suo interno e tale che ai punti di esso corrispondano solo valori di $\psi(x)$ interni a quel segmento di $\mathcal{S}$. Per tal modo si verrà a rinchiudere A dentro un aggregato S di segmenti ai cui punti corrispondono solo valori di $\psi(x)$ interni ad $\mathcal{S}$; e riunendo convenientemente in un unico più segmenti di tale aggregato quando si sovrappongano parzialmente, o totalmente, od abbiano un estremo comune, si potrà supporre che questo aggregato consti di una infinità numerabile di segmenti non aventi punti comuni. Gli estremi dei segmenti di S appartengono a B e a C.

Si supponga scomposto l'intervallo $a \dots b$ in una somma qualsiasi di segmenti $\mathcal{A}$: la somma degli incrementi di ψ nei segmenti di questo aggregato è in valore assoluto $= K$: ma l'aggregato dei valori di ψ corrispondenti a punti di S ha misura $< H + \chi$ e tal misura è d'altronde maggiore o uguale al valore assoluto della somma degli incrementi di ψ nei segmenti di S od in qualsiasi aggregato di segmenti contenuto in S: dunque anche il valore assoluto di questa somma è $< H + \chi$. Se quindi si sopprime in $\mathcal{A}$ un aggregato di segmenti σ, contenuti in S, e tali che $\mathcal{A} - \sigma$ sia ancora un aggregato di segmenti, il valore assoluto della somma degli incrementi di ψ nei segmenti di $\mathcal{A} - \sigma$ è, qualunque sia σ, $> K - H - \chi$.

In S potrà esser contenuta una parte di C; il ragionamento che segue mostrerà che questa parte non può estendersi a tutto C: in ogni modo si chiami C′ la parte di C esterna ad S, ammettendo, al bisogno ch'essa possa esser nulla.

Si supponga ora fissata una numerazione dei segmenti di S, ed i segmenti così numerati si chiamino $s_1, s_2, \dots$

Si rinchiuda allora C′ in un aggregato T_{η_1} di segmenti non aventi fra loro punti comuni e aventi comuni con s_1 al più estremi, e di misura totale $< \eta_1$, ove η_1 è un numero che si può assegnare arbitrariamente e di cui ci riserviamo di disporre. Vogliamo dimostrare che *in* T_{η_1} *è contenuto qualche segmento tale che, detta* ζ_1 *la sua lunghezza, il valore assoluto della somma degli incrementi di* $\psi(x)$ *nei segmenti che si ottengono sopprimendo in esso un aggregato qualsiasi* (che può essere nullo) *di segmenti contenuti in* S, *sia sempre* $> (K - H - \chi - \varepsilon)\dfrac{\zeta_1}{\eta_1}$.

Consideriamo perciò l'aggregato $S + T_{\eta_1}$: qualora avvenisse ch'esso ricopra tutto l'intervallo $a \dots b$, lo si pensi ridotto ad un aggregato semplice di segmenti senza parti comuni e di cui sia parte l'aggregato T_{η_1}; si potrà considerare questo come l'aggregato A delle linee precedenti. Se in questo aggregato si pensano quindi soppressi i segmenti (contenuti in S) esterni ai segmenti di T_{η_1} ed un aggregato arbitrario σ_1 di altri segmenti contenuti in S, il valore assoluto della somma degli incrementi di ψ nei segmenti di $T_{\eta_1} - \sigma_1$ è, qualunque sia σ_1 (eventualmente anche nullo), $> K - H - \chi$ (> 0 perchè $H < K$ e quindi, per χ sufficientemente piccolo, $H + \chi < K$). Per unità di linguaggio con quanto segue, potremo, a maggior ragione, asserire che il valore assoluto di tal somma è $> K - H - \chi - \varepsilon$ e si potranno chiamare, nella presente ipotesi, t i segmenti di T_{η_1} e T'_{η_1} l'aggregato T_{η_1} medesimo.

Se invece $S + T_{\eta_1}$ non ricopre tutto l'intervallo $a \dots b$, si consideri l'aggregato U dei segmenti senza punti comuni che contiene tutti e soli i punti di $S + T_{\eta_1}$, e si pensino numerati in un modo qualsiasi questi segmenti, e quindi i loro estremi destri. Ciascuno di questi estremi appartiene a B.

Assegnato arbitrariamente un ε, ad ogni punto x di B si può far corrispondere un intervallo $x \dots x + h (h > 0)$ massimo tale che $|\psi(x + h) - \psi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a} h$: il punto $x + h$ non apparterrà a B perchè, qualora vi appartenesse gli corrisponderebbe un $h_1 > 0$ tale che $|\psi(x + h + h_1) - \psi(x + h)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a} h_1$ e sarebbe $|\psi(x + h + h_1) - \psi(x)| \leq |\psi(x + h + h_1) - \psi(x + h)| + |\psi(x + h) - \psi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}(h + h_1)$: l'intervallo $x \dots x + h + h_1$ dovrebbe quindi sostituirsi a $x \dots x + h$. È quanto dire che ciascun punto $x + h$ è *interno* a un segmento di U.

Ciò posto sia x_1 il primo estremo destro di segmenti di U nella numerazione dianzi supposta, h_1 il corrispondente valore di h, secondo la precedente definizione: si chiami l_1 il segmento $x_1 \dots x_1 + h_1$; se inoltre l'estremo $x_1 + h_1$ è interno ad un segmento $\alpha_1 \dots \beta_1$ di $T_{\eta_1} (\alpha_1 < x_1 + h_1 < \beta_1)$ si chiami t_1 il segmento $x_1 + h_1 \dots \beta_1$. Sia poi x_2 il primo estremo destro di segmenti di U che nella supposta numerazione segue x_1 e che è esterno a $x_1 \dots x_1 + h_1$ (quindi anche esterno o estremo a $x_1 \dots \beta_1$); sia h_2 il massimo valore di h per cui $|\psi(x_2 + h) - \psi(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a} h$ e il segmento $x_2 \dots x_2 + h_2$ non ha punti comuni con $x_1 \dots x_1 + h_1$ (è certo $h_2 > 0$). Si chiami l_2 il segmento $x_2 \dots x_2 + h_2$ e, se $x_2 + h_2$ è interno all'intervallo $\alpha_2 \dots \beta_2$ di T_{η_1}, si chiami t_2 il segmento $x_2 + h_2 \dots \beta_2$. Analoga operazione si ripeta per l'estremo destro di segmenti di U, primo, nella supposta numerazione, fra quelli esterni a $x_1 \dots x_1 + h_1$, $x_2 \dots x_2 + h_2$, chiedendo che il corrispondente

segmento $x_3 \dots x_3 + h_3 \equiv l_3$ non abbia punti comuni coi segmenti precedenti e così via. Si chiami L l'aggregato dei segmenti l; si chiamino poi segmenti t, oltre quelli or ora definiti, ancora tutti i segmenti di T_{η_1} completamente esterni ai segmenti l e si chiami T'_{η_1} l'aggregato dei segmenti t. L'aggregato $S + L + T'_{\eta_1}$ ricopre interamente $a \dots b$; si può quindi ripetere per esso l'osservazione fatta poco fa, nell'ipotesi che $S + T_{\eta_1}$ ricoprisse $a \dots b$ e considerarlo cioè come l'aggregato A del principio: si conclude che il valore assoluto della somma degli incrementi di $\psi(x)$ nei segmenti l e in quelli dell'aggregato $L + T'_{\eta_1} - \sigma_1$ ottenuto sopprimendo in $L + T'_{\eta_1}$ un aggregato qualunque σ_1 di segmenti contenuti in S è $> K - H - \chi$. Questo valore assoluto non può che accrescersi se a qualcuno degli incrementi addendi si sostituisce il suo valore assoluto; ora la somma dei valori assoluti degli incrementi di $\psi(x)$ nei segmenti l è

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_i l_i < \varepsilon$$

poichè $\sum l_i < b - a$; quindi il valore assoluto della somma degli incrementi di $\psi(x)$ nei segmenti di $T'_{\eta_1} - \sigma_1$ — e a più forte ragione la somma dei valori assoluti delle somme formate ciascuna con quelli di tali incrementi che appartengono a segmenti di uno stesso t — è $> K - H - \chi - \varepsilon$ (1). Sia η' la misura totale di $T'_{\eta_1} (\eta' \leq \eta_1)$; fra i segmenti t dovrà esservene qualcuno tale che, detta ζ_1 la lunghezza dell'intervallo, il valore assoluto della somma degli incrementi di $\psi(x)$ nei segmenti contenuti in esso ed esterni a σ_1 è, qualunque sia σ_1 (2),

$$> \{K - H - \chi - \varepsilon\} \frac{\zeta_1}{\eta'} \geq \{K - H - \chi - \varepsilon\} \frac{\zeta_1}{\eta_1}.$$

Si chiami τ_1 un segmento per cui questo fatto si verifichi.

Si può ripetere sopra τ_1 il ragionamento ora fatto per il segmento $a \dots b$, con poche modificazioni; si costruirà cioè un aggregato di segmenti T_{η_2} di misura totale $\eta_2 < \zeta_1$, contenenti nel loro interno la parte di C′ contenuta in τ_1 e non aventi fra loro punti comuni, ed aventi al più estremi comuni con s_2, e, scegliendo il numero $\varepsilon\zeta_1$ a far l'ufficio di ε, si concluderà esistere

(1) Se cioè, per ciascun segmento t esistesse un σ_1 contenuto in esso per cui questa disuguaglianza non fosse soddisfatta quando si considerano gli incrementi nei soli segmenti di $t - \sigma_1$, si osservi che i segmenti t sono esterni tutti l'uno all'altro, e si consideri quindi l'aggregato di segmenti ottenuto sopprimendo da T'_{η_1} la somma di questi aggregati σ_1 contenuti nei singoli t; in questo aggregato non potrebbe la somma di incrementi di cui sopra essere in valore assoluto $> K - H - \chi - \varepsilon$.

(2) Per la continuità $\psi(x)$ la misura di T'_{η_1} e quindi quella di T_{η_1} non potrebbe dunque esser nulla: non potrebbe cioè mancare l'aggregato C′.

in τ_1 un segmento τ_2 di lunghezza ζ_2 tale che il valore assoluto della somma degli incrementi di $\psi(x)$ nei segmenti ottenuti sopprimendovi un (qualunque) aggregato σ_2 di segmenti contenuti in S è

$$> \{K - H - \chi - (1 + \eta_1)\varepsilon\} \frac{\zeta_1 \zeta_2}{\eta_1 \eta_2}.$$

E del pari in τ_2 si riuscirà a determinare un segmento τ_3 di lunghezza ζ_3 non avente punti comuni con s_3 e tale che il valore assoluto della somma degli incrementi di $\psi(x)$ nei segmenti ottenuti sopprimendovi un qualunque aggregato σ_3 di segmenti contenuti in S è

$$> \{K - H - \chi - (1 + \eta_1 + \eta_1 \eta_2)\varepsilon\} \frac{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}{\eta_1 \eta_2 \eta_3}.$$

e così via.

I numeri η_i restano arbitrari: si prenda

$$\eta_1 = \eta < 1 - \frac{\varepsilon}{K - H - \chi}, \quad \eta_{i+1} = \zeta_i \eta$$

Il valore assoluto della somma degli incrementi di $\psi(x)$ in ogni aggregato di segmenti ottenuto sopprimendo in τ_i un aggregato di segmenti contenuti in S risulterà

$$(\alpha) \qquad > \left\{\frac{K - H - \chi}{\eta^i} - \left(\frac{1}{\eta^i} + \frac{1}{\eta^{i-1}} + \frac{\zeta_1}{\eta^{i-2}} + \cdots \frac{\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_{i-1}}{\eta}\right)\varepsilon\right\} \zeta_i$$

e quindi, poichè

$$\zeta_i < \eta_i < \eta < 1,$$

$$> \left\{\frac{K - H - \chi}{\eta^i} - \left(\frac{1}{\eta^i} + \frac{1}{\eta^{i-1}} + \frac{1}{\eta^{i-2}} + \cdots + \frac{1}{\eta}\right)\varepsilon\right\} \zeta_i$$

$$> \left\{\frac{K - H - \chi}{\eta^i} - \frac{\varepsilon}{\eta^i(1 - \eta)}\right\} \zeta_i = \{(K - H - \chi)(1 - \eta) - \varepsilon\} \frac{\zeta_i}{\eta^i(1 - \eta)}.$$

Si osservi ora che, per la scelta fatta di η, $\varepsilon < (K - H - \chi)(1 - \eta)$ e si ponga $(K - H - \chi)(1 - \eta) - \varepsilon = M$ (> 0): l'espressione (α) risulta così $> \dfrac{M}{\eta^i(1 - \eta)} \zeta_i$.

Si supponga ora ciascuno degli aggregati σ_i nullo; risulterà, in particolare, che il valore assoluto dell'incremento di $\psi(x)$ in ciascun segmento τ_i è $> \dfrac{M}{\eta^i(1 - \eta)} \zeta_i$, ed il rapporto incrementale è quindi $> \dfrac{M}{\eta^i(1 - \eta)}$ [1].

[1] Il risultato finale trova quindi solo applicazione nell'ipotesi che gli aggregati σ_i siano nulli: cionondimeno tale ipotesi non poteva farsi fin da principio, perchè è invece essenziale nel passaggio da un segmento τ_i al successivo che si possa valutare l'incremento totale di $\psi(x)$ in un aggregato di segmenti ottenuti sopprimendo in τ_i un aggregato contenuto in S.

Col crescere indefinito di i i segmenti τ_i, tutti interni l'uno all'altro e di lunghezze ζ_i tendenti a 0 ($\zeta_i < \eta_i < \eta^i$) tendono ad un punto limite P, interno a tutti e il detto rapporto incrementale tende a ∞: nel punto P è dunque infinita almeno una derivata di $\psi(x)$. Ed il punto P non apparterrà ad A, perchè ciascun segmento τ_i non contiene punti di $s_1, s_2, \ldots, s_i$ e quindi nessun punto di A appartiene a tutti i segmenti τ_i.

Evidentemente non il solo punto P ottenuto con una determinata scelta dei segmenti τ_i sarà in tali condizioni, perchè in $a \ldots b$ si potranno determinare segmenti parziali, non contenenti P e soddisfacenti alle ipotesi della nostra proposizione, contenenti quindi essi stessi nuovi punti come P. Ma si può aggiungere di più: *all'aggregato dei punti come* P *in cui una derivata di* $\psi(x)$ *è infinita deve corrispondere un aggregato di valori di* $\psi(x)$ *di misura* $\geq K - H$; infatti quando un aggregato di tali punti fosse noto, e l'aggregato dei valori corrispondenti di $\psi(x)$ avesse misura $< K - H$, si potrebbe aggiungere tale aggregato di punti P all'aggregato A e si otterrebbe ancora un aggregato di punti cui corrisponderebbe un aggregato di valori di $\psi(x)$ di misura $< K$, onde si dovrebbe concludere che, oltre ai punti noti, altri punti in $a \ldots b$ dovrebbero avere almeno una derivata infinita.

In particolare questa osservazione ci mostra che *i punti dell'intervallo* $a \ldots b$ *in cui almeno una derivata è infinita costituiscono un aggregato non numerabile* (che anzi ha la potenza del continuo od almeno è incapace di essere ben ordinato). Infatti l'aggregato dei valori corrispondenti di $\psi(x)$ ha la potenza del continuo: quindi, facendo corrispondere ad ognuno di questi valori l'aggregato dei punti P in cui tal valore è assunto da $\psi(x)$, l'aggregato dei punti P viene a spezzarsi in un insieme di aggregati parziali staccati della potenza del continuo [1] [2].

[1] Cfr. la mia Nota *Intorno alla teoria degli aggregati*, Rendiconti del R. Ist. Lombardo (2), 35, 1902.

[2] La proposizione dimostrata in questo numero merita di essere confrontata con una varietà di proposizioni analoghe note, e che, nella forma esteriore della loro espressione più usuale *potrebbero parere* identiche ad essa, se non talora più espressive.

È noto anzitutto che una funzione continua che non sia costante in un intervallo $a \ldots b$ ha ciascuna delle sue derivate non nulla in un aggregato di punti che ha la potenza del continuo (V. Dini, Luroth-Schepp, *Grundlagen für eine Th. d. Functionen* u. s. w. pp. 96-98. Scheeffer, Acta Math. 5, pag. 283. Schoenflies, *Bericht ü. Mengenlehre*, Jahresber. d. d. Math.-Ver. 8, 1900, pp. 214-215 (in quest'ultimo luogo l'enunciato contiene condizioni eccessive)). Se poi tale aggregato ha misura nulla *nel senso di Jordan* è noto pure che esiste ancora in esso un aggregato parziale della potenza del continuo in cui almeno una derivata diviene infinita (Schoenflies, l. c. 171-172): questo enunciato è evidentemente un caso particolare di quello del testo, ma la notevole restrizione che in esso va rilevata sta nel trattarsi di aggregati di misura nulla nel senso di Jordan, mentre noi attribuiamo alle stesse parole il significato ben più largo di Borel-Lebesgue (i nostri aggregati di misura nulla possono p. es. essere densi nell'intervallo totale). A questo riguardo si avvicinerà meglio alla nostra la proposizione dello Scheeffer (l. c., pag. 189)

2. Qualche osservazione complementare merita di essere aggiunta alla precedente proposizione. In essa invero da ipotesi relative al comportamento della derivata superiore a destra (ed analoghe proposizioni si avrebbero per le altre funzioni derivate) si conclude solo per l'esistenza di valori infiniti di una indeterminata delle quattro derivate. Una maggior precisione si può evidentemente portare tenendo conto del segno dell'incremento $\psi(b) - \psi(a)$: *sarà, nei punti* P *del numero precedente* $= +\infty$ *una almeno delle derivate superiori* (*a destra o a sinistra*) *se questo incremento è positivo, sarà* $= -\infty$ *una almeno delle derivate inferiori se questo incremento è negativo.*

Si ricordi ancora che in ogni intervallo le quattro derivate hanno lo stesso limite superiore e lo stesso limite inferiore: ciascun punto P sarà quindi punto limite d'un aggregato di punti in cui una qualunque delle quattro derivate prende valori — positivi o negativi a seconda dei due casi — in valore assoluto grandi a piacere. Questa osservazione ci permette di enunciare la precedente proposizione nella forma: *l'aggregato che si ottiene per chiusura di* C *contiene un aggregato di punti in ogni intorno di ciascuno dei quali una derivata determinata* (p. es. la medesima derivata superiore a destra) *diviene grande a piacere positivamente o negativamente.* Un risultato più esplicito si ottiene quando si supponga $H = 0$: si potrà dire allora che *se la funzione* $\psi(x)$ *ha derivata superiore a destra nulla in ogni punto di* $a \ldots b$, *tolti i punti di un aggregato* C *di misura nulla ed ha in* $a \ldots b$ *incremento finito, ogni punto dell'aggregato* C *è punto limite di una serie di punti dell'aggregato medesimo in cui la detta derivata superiore a destra assume valori assoluti grandi a piacere*: perchè un punto di C che non fosse in queste condizioni sarebbe interno ad un intervallo in cui nessuna derivata di $\psi(x)$ sarebbe infinita, e quindi $\psi(x)$ sarebbe costante e ogni sua derivata nulla. E *l'aggregato dei valori di* $\psi(x)$

---

che qui, per comodità del confronto, riproduciamo in un caso particolare: « Una funzione « che non sia una costante non può avere la sua derivata superiore a destra (o un'altra « funzione derivata) nulla in tutto l'intervallo $a \ldots b$, ad eccezione di un aggregato di « punti i cui punti limiti sono tali che: 1° l'aggregato di quelli nell'intorno di ciascuno « dei quali tal derivata è limitata, ma in valore assoluto $> \varepsilon$ ha misura nulla nel senso « di Jordan, qualunque sia ε; 2° nell'aggregato dei punti nell'intorno di ciascuno dei « quali essa derivata può assumere valori assoluti grandi a piacere, la funzione assume « un aggregato di valori di misura nulla (nel senso di Jordan) ». Ora è ben vero che l'aggregato eccezionale dello Scheeffer — pur avendo misura nulla nel senso di Borel-Lebesgue — non ha però misura nulla nel senso di Jordan, avvicinandosi con ciò agli aggregati nostri, senza però rappresentarne il tipo più generale, ma la parte di questo aggregato in cui la funzione derivata considerata non è limitata si suppone abbia per corrispondente un aggregato di valori della funzione primitiva di misura nulla *nel senso di Jordan*.

nei punti in cui almeno una derivata è infinita ha allora misura eguale alla variazione totale di $\psi(x)$.

3. Corollario immediato delle precedenti proposizioni è che: *Date due funzioni* $F(x)$, $\Phi(x)$, *una delle quali* Φ *abbia derivata unica a destra in tutti i punti di un intervallo* $a \ldots b$, *tolti al più i punti di un aggregato di misura nulla, l'altra* F *abbia negli stessi punti la derivata superiore a destra uguale alla nominata derivata di* Φ; *se inoltre le due funzioni hanno tutte le derivate finite in tutti punti dell'intervallo tolti al più quelli di un aggregato cui corrisponde un aggregato di valori di* $F - \Phi$ *di misura nulla; si potrà affermare che* F *e* Φ *non possono differire fra loro che per una costante.*

Indichino infatti i segni $D^+ D_+$ le derivate a destra, superiore ed inferiore; si ha

$$D^+ F(x) - D_+ \Phi(x) \geq D^+(F(x) - \Phi(x)) \geq D^+ F(x) - D^+ \Phi(x).$$

Dalle fatte ipotesi risulta quindi che $F(x) - \Phi(x)$ ha derivata superiore a destra nulla in tutti i punti di $a \ldots b$ tolti al più i punti di un aggregato di misura nulla; d'altra parte le disuguaglianze analoghe che legano le altre derivate di $F(x) - \Phi(x)$ a quelle di $F(x)$ e di $\Phi(x)$ e l'ipotesi fatta nell'enunciato, relativamente all'aggregato di punti in cui qualcuna delle derivate di $F(x)$ o di $\Phi(x)$ può non essere finita, ci dicono che tutte le derivate di $F(x) - \Phi(x)$ sono finite in ogni punto di $a \ldots b$, tolti al più i punti di un aggregato cui corrisponde un aggregato di misura nulla di valori di $F - \Phi$. La funzione $F(x) - \Phi(x)$ non potrebbe quindi subire un incremento qualsiasi in alcun intervallo contenuto in $a \ldots b$, senza contraddire alla proposizione del n. 1.

Mineralogia. — *Appunti sulla scheelite di Traversella.* Nota di Ferruccio Zambonini, presentata dal Socio G. Strüver.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Da circa due anni mi stavo occupando dello studio della scheelite di Traversella, ma la Nota testè pubblicata dal dott. Colomba [1] sullo stesso argomento mi costringe a render noti brevemente soltanto quei risultati da me ottenuti che possono, in certo modo, completare il lavoro del Colomba. E ciò tanto più che il materiale che io ho avuto a mia disposizione era meno interessante di quello che il Colomba ha illustrato.

Le forme da me osservate sono le seguenti: c }001{, a }100{, q_1 }120{, p }111{, β }113{, v }112{, f }114{, e }101{, o }102{, d }105{, s_1 }131{,

[1] *Sulla scheelite di Traversella.* Rendiconti R. Acc. Lincei, 1° sem. 1906, XV, 281.

x }416{, già note nella scheelite, e μ }338{, ζ }227{, λ }507{, ν }407{ nuove per il minerale. Di queste ultime }407{ è da considerarsi come incerta. Delle forme già note, c, β, q e x sono nuove per la località, ma le prime tre sono state già descritte dal Colomba. Dalla semplice ispezione delle forme semplici trovate rispettivamente dal Colomba e da me risulta la differenza nel materiale studiato: in quello di Colomba, infatti, sono presenti spesso gli emidiottaedri; nel mio, invece, notevoli e frequenti sono gli ottaedri. I cristalli da me studiati provengono, infatti, in gran prevalenza dagli strati cloritici, talcosi e serpentinosi, mentre quelli di Colomba si trovano diffusamente « dove i giacimenti presentano la caratterisca alternanza degli strati di dolomite o di magnetite ».

La diffusione relativa delle diverse forme nei 310 cristalli da me osser-osservati risulta dalla seguente tabella:

}111{	310 volte	}001{	11 volte
}101{	81 »	}131{ }114{	4 »
}102{	21 »	}100{ }338{	2 »
}113{	18 »	tutte le altre una sola volta.	

Nei 306 cristalli che erano in tale stato da permettere di determinare con certezza la combinazione presente, si osservarono 22 diverse combinazioni e cioè: (1)

1) *p* (205); 2) *pe* (59); 3) *pc* (7); 4) *po* (3); 5) *pβ* (3); 6) ps_1 (1); 7) *pce* (2); 8) *poβ* (4); 9) pes_1 (2); 10) *ped* (1); 11) *pco* (1); 12) *peo* (2); 13) *peβ* (1); 14) *pea* (2); 15) *poβζ* (1); 16) *peoβ* (5); 17) *peoμ* (1); 18) *peβλ* (1); 19) $pes_1 q_1$ (1); 20) *peov* (1); 21) *pceoβ* (1); 22) *peoβf* (2).

Si ha perciò:

1	combinazione	di 1	forma
5	combinazioni	» 2	forme
8	»	» 3	»
6	»	» 4	»
2	»	» 5	»

Dalle tabelle riportate risulta anche che

soltanto	1	forma si presenta	in 205	cristalli
»	2	forme si presentano	» 73	»
»	3	» »	» 15	»
»	4	» »	» 10	»
»	5	» »	» 3	»

Lo scheelite di Traversella da me studiata ha, perciò, una gran tendenza a formare combinazioni semplicissime. I cristalli, infatti, che possie-

(1) In parentesi è posto il numero dei cristalli nei quali fu osservata la combinazione.

dono più di tre forme non costituiscono che il 4,20 % dei cristalli nei quali si determinò la combinazione. Questo comportamento è notevole e diverso da quello di altri minerali per i quali esistono statistiche di questo genere. Dal classico lavoro del prof. Strüver (1) sulla pirite di Brosso e Traversella, risulta che in questi giacimenti il 45,4 % dei cristalli studiati presenta quattro forme semplici.

La scheelite di Traversella si comporta sotto questo aspetto diversamente anche da altri giacimenti di questo minerale. È probabile che ciò sia causato dalle condizioni di formazione dei cristalli di Traversella. È noto che generalmente nella scheelite domina }101{, mentre a Traversella ed in poche altre località (2) l'ottaedro più sviluppato è }111{. È possibile che le cause che hanno determinato il predominio di }111{ abbiano agito in modo da rendere difficile la formazione di altre forme (3).

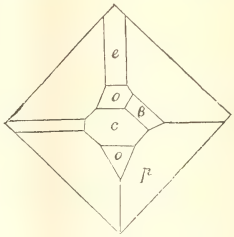


Fig. 1.

Accennerò brevemente alle caratteristiche delle diverse forme da me osservate. Per }111{ non ho che da riferirmi a quanto ha scritto Colomba.

}101{ ha quasi sempre facce piccole, precisamente come ha osservato Colomba. Devo aggingere che nel mio materiale sono una vera rarità i cristalli nei quali }101{ ha tutte le sue otto facce: in generale non ne presenta che un numero limitato (sovente anche soltanto una o due).

}113{ ha facce di variabile grandezza, sempre, però, più piccole di quelle di }111{. Solo di rado si hanno ad un' estremità dell' asse *c* le quattro facce di questa forma richieste dalla simmetria della classe cristallina, spesso se ne hanno solo due (113) e ($\bar{1}\bar{1}3$), sovente anche una soltanto (fig. 1).

(1) *Studi sulla mineralogia italiana. Pirite del Piemonte e dell'Elba.* Memorie R. Acc. delle Scienze di Torino, 1869. D'altronde le regolarità osservate dallo Strüver e dal Sella (Relazione sulla Memoria ora citata) nella pirite non hanno valore generale come ha fatto notare il prof. Strüver (Memorie R. Acc. dei Lincei, 1886 (4ª), III, 223).

(2) Non solo al Sempione, come ricorda Colomba, ma anche al Monte Mulat, (vedi Cathrein, *Ueber einige Mineralvorkommen bei Predazzo* ecc. Zeitsch. f. Kryst. 1883, *8*, 220).

(3) La statistica da me eseguita sulle forme dell'anglesite di Traversella, permette

}112{ era stata notata dal Bauer, ma Colomba l'ha esclusa, benchè avesse realmente notato delle forme che per la loro posizione si avvicinavano al simbolo }112{. Io ho trovato questa forma in un solo cristallo, con facce abbastanza grandi, che hanno permesso una misura discreta, cosicchè la presenza di questa forma a Traversella è da considerarsi come accertata.
(111) : (112) = 17°54′ mis. 17°57 ½′ calc. (con le mie costanti: ved. appresso).

}102{ è raramente unito solo ad }111{, più frequentemente anche a }101{, ed in questo caso le sue facce sono spesso più grandi di }101{. È notevole che sovente mentre }101{ ha pochissime facce, nello stesso cristallo }102{ le presenta tutte.

}001{ ha facce ora piane, ora scabre, ma quasi sempre pochissimo splendenti. Potrebbe darsi che in una parte dei cristalli nei quali fu osservata questa forma si abbia a che fare con facce naturali di sfaldatura.

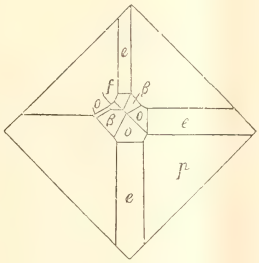


Fig. 2.

}131{ è molto raro, ed in tre dei quattro cristalli nei quali fu trovato aveva una sola faccia: nel quarto aveva due facce soltanto, abbastanza grandi, ma scabre e senza splendore.

}114{ è stato osservato da me in due cristalli incompleti ed in due che presentavano la comb. 22. Ambedue questi ultimi erano terminati ad una sola estremità ed avevano l'aspetto della fig. 2: }101{ aveva due grandi

---

di discutere il metodo adoperato da Hermann (nella anglesite: Zeitsch. f. Kryst. 1904, XXXIX, 463) e da Hubrecht (nella cerussite: ibidem, 1905, XL, 147) per stabilire la diffusione delle forme cristalline di un minerale, in base al numero delle combinazioni nelle quali le forme semplici stesse si presentano. Che questo metodo sia inesatto, risulta chiaramente dai numeri surriportati per la scheelite di Traversella. Non darò che un esempio. }113{ fu trovato in 8 delle 22 combinazioni osservate: secondo Hermann la sua frequenza sarebbe espressa da 36,4 %, mentre la frequenza vera di questa forma non è che all'incirca 6 %, perchè su 310 cristalli fu osservata soltanto in 18.

facce adiacenti, ed una terza molto più piccola: }102{ possedeva, invece, le sue quattro facce. Di }113{ sono presenti due facce, una sola di }114{. Secondo Colomba, nella scheelite di Traversella costantemente quando è presente }102{ a questa è associata }113{, mentre quando è presente }205{ ad essa è associata }114{. I fatti ricordati in questo lavoro stabiliscono che queste osservazioni non hanno valore generale.

}105{ era stata ricordata dal Bauer per Traversella, ma Colomba l'ha esclusa, come ha fatto per }112{. Io ho trovato questa forma con facce piccole, ma abbastanza splendenti, che hanno dato una discreta misura:

$$(101):(105) = 40^\circ \text{ ca mis. } 39^\circ 47\tfrac{1}{2}' \text{ calc.}$$

}120{, trovato già da Colomba, si presentò con una piccola faccia un po' arrotondata nel cristallo della fig. 3, così che io non ritenevo questa forma

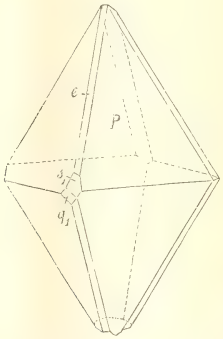


Fig. 3.

come sicura per Traversella, ma le ricerche di Colombà hanno tolto ogni dubbio sull'esistenza di questo prisma nella scheelite di Traversella.

Nuova per Traversella sarebbe }416{, scoperta da Bauer in alcuni cristalli di Riesengrund. Fu osservata in un solo cristallo incompleto, con una faccia abbastanza grande, ma scabra e pochissimo splendente. Misure approssimative dettero il seguente risultato:

$$(111):(416) = 32^\circ \text{ ca mis. } 31^\circ 26\tfrac{1}{2}' \text{ calc.}$$
$$(1\bar{1}1):(416) = 51 \text{ " " } 51\ \ 6 \text{ " "}$$

Non considero questa forma come certa per Traversella.

E veniamo alle forme nuove. }227{ fu osservata in un cristallo (fig. 4), con una faccia abbastanza grande, splendente, che dette buone misure.

$$(\bar{1}\bar{1}1) : (\bar{2}\bar{2}7) = 33°36' \text{ mis. } 33°29' \text{ calc.}$$
$$(111) : (\bar{2}\bar{2}7) = 96\ 31 \quad \text{»} \quad 96\ 49 \quad \text{»}$$

}338{ fu trovato in due cristalli: uno era rotto e in esso }338{ presentava una faccia grandissima e splendente, nell'altro (comb. 17), {101{, }102{

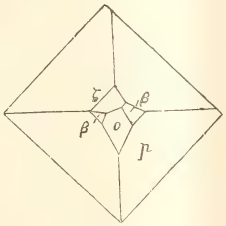


Fig 4.

e }338{ avevano tutte solo una faccia (all'estremità esistente del cristallo).

$$(111) : (338) = \left.\begin{array}{l} 26°23' \text{ nel primo cristallo} \\ 26\ 30 \text{ ca » secondo »} \end{array}\right\} \text{mis. } 26°9' \text{ calc.}$$

}507{ fu osservata in un cristallo quasi incoloro, incompleto, nel quale si riconobbero, inoltre le forme }111{, }101{, }113{. Il nuovo ottaedro aveva una faccia piccola, ma piana e splendente:

$$(101) : (507) = 9°2' \text{ mis. } 9°17\tfrac{1}{2}' \text{ calc.}$$

}407{, ugualmente nuova per la scheelite, è da considerarsi come incerta: si trovò con una piccola faccia splendente, nel primo cristallo che dette }338{:

$$(101) : (407) = 15°58' \text{ mis. } 15°40\tfrac{1}{2}' \text{ calc.}$$

Le nuove forme, e così pure alcune delle già note per questo giacimento (per es. {114}, hanno un carattere singolare per il fatto che esse si presentano con una sola faccia, che sostituisce, in certo modo, una faccia di una delle forme più comuni (}102{ o }113{), dalla quale non sono per posizione, molto lontane, senza, però, che possano considerarsi come facce vicinali. Ho creduto, perciò, interessante di stabilire, col metodo di V. Goldschmidt [1], se queste forme nuove hanno un posto normale nella serie delle

[1] *Ueber Entwickelung der Krystallformen.* 1. Theil, Zeitsch. f. Kryst. 1897, XXVIII, 1; 2. Theil, ibid., pag. 414. Devo ringraziare vivamente il prof. Goldschmidt per l'aiuto datomi in questa discussione.

forme note della scheelite appartenenti alle zone [$\bar{1}10$] e [010]. La discussione, che non riporto qui per brevità, dimostra che le nuove forme trovano facilmente il loro posto in queste due zone.

Di angoli veramente precisi io non ne ho potuto misurare che quattro, in cristalli debolmente giallicci, che, come potei stabilire, non contengono che una quantità piccolissima di molibdeno. Essi sono i seguenti:
$(111):(1\bar{1}1) = 79°50\frac{1}{2} - 79°49'$; $(101):(111) = 39°53'$; $(111):(11\bar{1}) = 49°32'$
Questi angoli sono alquanto diversi da quelli che si calcolano dalle costanti stabilite dal Traube [1] per la scheelite senza molibdeno. Li trovai però confermati da misure eseguite su cristalli artificiali, preparati molti anni fa dal prof. Cossa, e che si possono considerare come praticamente privi di molibdeno. Stabilii perciò le costanti $a : c = 1 : 1,5268$, che io ritengo migliori di quelle di Traube per il $Ca\,WO_4$ puro [2]. Colomba ha trovato per c valori più elevati, e ciò è d'accordo col più elevato tenore in $Mo\,O_3$ dei suoi cristalli. Che, infatti, $Mo\,O_3$ innalzi il valore di c è ormai indiscutibilmente dimostrato dalle ricerche di Hjortdahl e mie sui molibdati e wolframati di Ca, Sr, Ba [3]. È, però, anche verissimo quanto dice il Colomba, che, cioè, nei cristalli naturali di scheelite si hanno variazioni angolari indipendenti dalla composizione: io stesso ho notato il fatto già da tempo per altri minerali [4].

Gli importanti studî di Novarese [5] su Brosso e Traversella hanno condotto al risultato che questi giacimenti metalliferi devono la loro origine alle soluzioni ed alle emanazioni metallifere che si svolsero in relazione con la massa dioritica ben nota. Bonacossa è di avviso che i giacimenti di Brosso sieno stati originati da un'attività termale. L'azione delle emanazioni e delle soluzioni sulle rocce con carbonati (dolomite e calcare) della regione può benissimo, io credo, spiegare l'origine della scheelite di Traversella.

Ho pensato di eseguire qualche esperienza per tentar di riprodurre la scheelite per via umida, poichè finora si è, per lo più, seguita per questo minerale la via secca (Manross, Geuther e Forsberg, Cossa, Michel ecc.). Haushofer ottenne cristalli di $Ca\,WO_4$ prismatici, spesso cubiformi e gemi-

(1) *Ueber den Molybdängehalt des Scheelits u. s. w.* Neues Jahrb. f. Min. Geol. u. s. w. Beil., Bd. VII, 232.

(2) Queste costanti furono da me pubblicate già lo scorso anno: *Beiträge zur Krystallographischen Kenntniss einiger anorganischer Verbindungen.* Zeitsch. f. Kryst. 1905, XLI, 61-62.

(3) Cfr. F. Zambonini, *Ueber die Drusenmineralien des Syenits der Gegend von Biella.* Zeitsch. f. Kryst. XL, specialmente pagg. 233 e 237.

(4) *Die Erzlagerstätten von Brosso und Traversella in Piemont.* Zeitsch. f. praktische Geol., 1902, pag. 179.

(5) *Monografia sulle miniere di Brosso* di V. Sclopis e A. Bonacossa. Torino, 1900.

nati, mescolando una soluzione di sali di calcio con una di wolframati alcalini: la produzione di questi cristalli non è, però, facile. De Schulten [1] ha ottenuto cristalli ottaedrici aggiungendo lentissimamente ad una soluzione diluita di $Ca\,Cl_2$ leggermente acida per HCl a bagno maria, una di $Na_2\,WO_4$, $2\,H_2\,O$.

Mescolando a freddo soluzioni molto diluite di $Na_2\,WO_4$, $2\,H_2\,O$ e $Ca\,Cl_2$ non si ottengono che precipitati apparentemente amorfi, nei quali non si vedono che raramente dei cristallini piccolissimi, mal formati. Lasciando il precipitato per tre mesi in contatto del liquido dal quale si è deposto, si ottengono graziosi prismi pseudo-cubici di circa $^1/_{160}$ mm. raramente $^1/_{80}$ mm. Questi prismi sono spesso disposti in certo numero uno dietro l'altro, con gli assi *c* sulla stessa linea.

Migliori risultati ottenni coi metodi di Drevermann e di Macé. Col metodo di Drevermann feci una serie di esperienze, ponendo le solite soluzioni saline in due cilindri di vetro che furono collocati in un vaso più grande che si riempì d'acqua. $Ca\,WO_4$ si formò sopra tutto nel cilindro contenente il tungstato sodico. I cristalli ottenuti erano prismetti allungati secondo *c*, terminati da un ottaedro inverso rispetto al prisma, spessissimo geminati a ginocchio e a croce. Ponendo nei due cilindri i sali solidi invece delle soluzioni, col che si veniva a rendere più lenta la diffusione, si ottennero piccoli prismi per lo più allungati secondo *c*, ma assai raramente geminati e di più soltanto a croce.

Col metodo di Macé si ottenne dopo due mesi, nel filo che univa le due soluzioni saline una massa cristallina, composta di $Ca\,WO_4$ e $Na_2\,WO_4$, $2\,H_2\,O$. I cristalli di $Ca\,WO_4$ sono quasi sempre pseudocubici, raramente allungati, mai geminati. Presentano di solito un prisma quadrato e la base, di rado l'altro prisma, molto più piccolo. Dimensioni variabilissime (fino 0,1 mm. benchè molto di rado).

Da queste esperienze risulta che l'abito dei cristalli di wolframato di calcio è assai fortemente influenzato dalle condizioni di formazione: le esperienze eseguite non possono, inoltre, corrispondere alle condizioni nelle quali si formarono in natura i cristalli di scheelite perchè questi non hanno, finora, mai presentato abito prismatico.

[1] Bull. soc. franç. de minéralogie, 1903, XXVI, 112.

Fisica. — *Variazioni magnetiche prodotte nel ferro colla torsione* (1). Nota di F. Piola ed L. Tieri, presentata dal Corrispondente Sella.

Lo studio delle modificazioni magnetiche prodotte colla torsione nel ferro incomincia col Matteucci nel 1847 e viene proseguito più tardi col Wertheim, con E. Becquerel, col Wiedemann, con lord Kelvin e poi ancora col Wiedemann. Gli sperimentatori che seguirono in questo campo o si occuparono di prefereza del nickel, come fra altri il Nagaoka (2), il Banti (3), il Cantone (4), o fissarono la loro attenzione sul fenomeno inverso, ossia sulle modificazioni nella torsione prodotte dalla magnetizzazione.

L'Ewing (5), nel 1900, riassumendo lo stato delle conoscenze sull'argomento, osservava che l'effetto della torsione e detorsione in un filo di ferro, soggetto ad un campo magnetico longitudinale, è di *diminuire* la sua magnetizzazione. Tale effetto, egli dice, può essere distinto in due: l'uno iniziale, *irreversibile*, dipendente dalla storia del filo, l'altro di regime, *ciclico*. Quest'ultimo effetto egli lo considera come indipendente dalla storia del filo e quale sia per l'effetto *irreversibile* la dipendenza dalla storia egli non dice, e se pur il Cantone (6) nel 1904 accennò a stabilire — quasi incidentalmente — qualche cosa in proposito, nessuno, per quanto a noi risulta, studiò l'argomento, sistematicamente, nei vari particolari.

La ricerca che abbiamo intrapresa è rivolta a portare un contributo alla conoscenza delle relazioni esistenti fra le variazioni magnetiche prodotte in un filo di ferro dalla torsione e la storia del filo stesso.

Nella presente Nota ci limitiamo a comunicare i risultati ottenuti per stati magnetici ai quali si giunga mercè processi magnetici simmetrici: ci riserviamo di completare le esperienze relative a stati magnetici qualsiasi, ma fin d'ora ci pare di poter asserire che esiste un grande accordo fra i risultati da noi ottenuti per la trazione e quelli ai quali è giunto l'Ascoli (7) per l'urto.

Il metodo seguito nella ricerca è il seguente:

(1) Lavoro essguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.
(2) Phil. Mag., 27, pag. 117.
(3) Acc. Lincei, Memorie, vol. 7, 1°-3, 1891.
(4) Nuovo Cimento, s. 4, t. 5 pagg. 110 e 267.
(5) *Magnetic Induction in Iron*, 1900, pag. 231.
(6) Rend. Ist. Lomb. 1904, pag. 435.
(7) Nuovo Cimento, s. 5, t. 3, pag. 5.

Un filo di ferro viene ciclizzato magneticamente fra due valori del campo magnetico, uguali e di segno contrario. Raggiunta la ciclizzazione, in un determinato punto del ciclo viene arrestata la variazione del campo magnetico, ed il filo viene torto e detorto, nei due sensi, di uguali angoli. Ripetendo i cicli elastici, sempre nello stesso modo e fra gli stessi estremi, si trova che le successive variazioni del momento magnetico vanno diminuendo fino a che si arriva ad un valore limite di questo: la variazione complessiva sarà l'effetto *irreversibile* dell' Ewing.

Raggiunto il limite si registrano, pei diffenti angoli, i valori dei momenti magnetici: tali valori daranno l'effetto *ciclico*.

Ciò fatto si fa variare il campo magnetico, proseguendo il ciclo magnetico precedentemente arrestato, e si ripete tale ciclo fino a che l'effetto della torsione sia completamente scomparso, il che si ottiene facilmente quando il campo magnetico è ampio [1].

Arrestatici in un punto, differente dal precedente, si ripetono in questo le operazioni elastiche e si notano i due effetti, e così di seguito. In tal modo si è certi di sottoporre il filo alle torsioni e detorsioni sempre in condizioni ben definite.

Le esperienze furono fatte sopra differenti fili di ferro dolce ricotto, tutti tolti dalla stessa matassa, e del diametro di mm. 0,5.

Ciascun filo ha la lunghezza di cm. 39,8, ossia di circa 800 diametri e quindi con un *fattore smagnetizzante* trascurabile. È mantenuto verticale, nell' interno di un rocchetto del diametro esterno di cm. 0,7, lungo cm. 47, formato da 4 strati di filo di rame del diametro di cm. 0,02 a nudo ed avente complessivamente 141,1 spire per cm. La corrente circolante del rocchetto è data da 3 accumulatori ed è misurata mediante un galvanometro opportunamente tarato.

Il filo di ferro è saldato a 2 pezzi di ottone, l' uno fissato superiormente e l'altro portante un peso di kg. 2,720, ossia kg. 1385 per cm^2, ed un indice scorrevole sopra un cerchio graduato.

Le torsioni e detorsioni vengono compiute, in generale, fra $\pm 180°$ ossia fra $\pm 4° 30'$ per cm. di lunghezza del filo.

Quando non passa corrente il filo si trova soggetto alla componente verticale del campo magnetico terrestre: di questa si tiene conto pel computo dei vari campi ai quali si assoggetta il filo.

I momenti magnetici sono misurati in unità arbitrarie con un magnetometro astatico a riflessione, l'ago inferiore del quale si trova alla stessa

[1] Per es. con $H = \pm 7,3$ basta un solo ciclo magnetico per distruggere l'effetto delle torsioni per quanto numerose. Con campi più ristretti occorrono parecchi cicli fino a che con $H = \pm 1,7$ non sempre si riesce nell' intento nemmeno con magnetizzazioni alternate decrescenti.

altezza dell'estremo superiore del filo in esame e col suo centro alla distanza di cm. 10 da quello.

Un magnete permanente orizzontale, spostatile orizzontalmente, permette di variare, entro limiti molto estesi, la sensibilità dello strumento. Un filo di ferro, verticale, pure spostabile, compensa l'azione del filo in esame

L'azione del rocchetto sul magnetometro si constata essere trascurabile, anche nelle condizioni più sfavorevoli e perciò non si compensa; in ogni modo essa non viene ad influire sulla misura degli effetti dovuti alla torsione, poichè durante la produzione di tali effetti la corrente nel rocchetto è costante.

I cicli magnetici, fatti percorrere ai fili, furono parecchi ed i risultati ottenuti sempre perfettamente concordanti. Per brevità qui ci limitiamo a riportare i dati relativi solo a 2 di tali cicli.

Risultati sperimentali.

Effetto irreversibile. — Le tavole I e II, e le figg. 1 e 2 che ad esse si riferiscono, sono relative a 2 differenti cicli magnetici compiuti rispettivamente fra i campi $\pm 7{,}30$ e $\pm 2{,}5$ e dànno gli effetti irreversibili della torsione e detorsione fra $\pm 180°$. Nella 1ª colonna di ciascuna tavola si trovano le lettere che indicano i punti delle figure ai quali i dati si riferiscono.

Nella 2ª è indicato il campo magnetico corrispondente ai punti stessi ed al quale si intende, come si è detto, di essere arrivati, avendo percorso il ciclo sempre nello stesso senso e dopo aver fatto scomparire gli effetti delle operazioni precedenti.

Nella 3ª è indicata la lettura al magnetometro prima di iniziare le torsioni e nelle seguenti le letture fatte dopo quel numero di cicli elastici che è indicato in testa alla colonna stessa.

Nella penultima è la lettura finale I_n del magnetometro e nell'ultima la differenza limite $\Delta I = I - I_n$ la quale misurerà l'effetto finale *irreversibile.*

Si osserva che, raggiunto il limite del momento magnetico, si hanno sempre, con successivi cicli elastici, delle lievi oscillazioni nelle letture magnetometriche: tale fatto permette di giudicare quando l'effetto sia compiuto.

Nelle figure i punti limiti raggiunti colla ciclizzazione elastica sono indicati colle stesse lettere dei punti iniziali del ciclo magnetico, ma minuscole.

Dall'esame delle tavole e delle figure risulta evidente quanto segue:

1.° L'effetto *irreversibile* della torsione non è sempre di diminuire la magnetizzazione, come generalmente è ammesso, ma può essere anche di au-

mentarla o di invertirla. Esso è collegato alla storia del filo in modo molto semplice, quando lo stato magnetico si sia ottenuto con un processo magnetico simmetrico.

Tav. I.

Ciclo 1°. — H = ± 7,3.

Punto	Campo C.G.S.	INDICAZIONI DEL MAGNETOMETRO													Δ I
		I iniziale	9	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	I_n finale	
A	0,37	25,2	17,8	17,7	17,6	17,5	17,5	17,3	17,4	..	..	..	..	17,5	— 7,7
B	— 0,17	24,1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	4,4	..	4,4	— 19,7
C	— 0,99	20,1	— 9,0	— 9,6	— 9,6	— 9,8	— 9,9	— 9,8	..	..	..	..	..	— 9,8	— 29,9
D	— 1,13	18,2	— 10,5	— 10,8	— 10,9	— 11,0	..	..	..	..	..	..	..	— 11,0	— 29,2
E	— 1,58	6,0	— 12,8	— 13,0	— 13,2	— 13,1	..	..	..	..	..	..	..	— 13,1	— 19,1
F	— 3,29	— 14,7	— 17,6	— 17,5	— 17,4	— 17,6	..	..	..	..	..	..	..	— 17,5	— 2,8
G	— 44,8	— 17,3	— 18,9	— 18,9	— 19,0	..	..	..	..	..	..	..	..	— 19,0	— 1,7
H	— 7,23	— 20,1	— 21,0	— 20,8	— 20,7	..	..	..	..	..	..	..	..	— 20,8	— 0,7
	— 4,48	— 19,8	— 19,6	— 19,8	..	..	..	..	..	..	..	..	..	— 19,7	0,1
K	— 3,29	— 19,2	— 18,4	— 18,4	..	..	..	..	..	..	..	..	..	— 18,4	0,8
L	— 1,53	— 17,9	— 15,1	— 15,0	— 15,0	..	..	..	..	..	..	..	..	— 15,0	2,9
	— 1,13	— 17,2	— 13,9	— 13,9	..	..	..	..	..	..	..	..	..	— 13,9	3,3
	— 0,99	— 17,1	— 13,3	— 13,2	— 13,3	..	..	..	..	..	..	..	..	— 13,3	3,8
	— 0,17	— 15,6	— 8,5	— 8,4	— 8,4	..	..	..	..	..	..	..	..	— 8,4	7,2
M	0,37	— 14,2	0,6	1,6	2,1	2,6	2,9	3,1	3,3	3,5	3,8	3,9	4,0	4,0	18,2
	0,91	— 12,0	15,3	15,9	16,2	16,4	16,5	16,7	16,8	16,8	..	..	..	16,8	28,8
N	1,13	— 11,2	18,4	18,7	18,8	19,0	19,1	19,1	..	..	..	..	..	19,1	30,3
P	1,71	1,2	22,8	22,9	23,0	23,0	23,2	..	..	..	..	..	..	23,2	22
	1,81	4,2	23,3	23,3	23,4	..	..	..	..	..	..	..	..	23,4	19,2
Q	2,27	16,6	25,2	25,2	25,3	25,2	..	..	..	..	..	..	..	25,2	8,6
R	4,03	26,3	28,3	28,7	28,4	..	..	..	..	..	..	..	..	28,4	2,1
S	7,37	30,3	31,0	31,0	..	..	..	..	..	..	..	..	..	31,0	0,7
T	4,03	29,0	28,6	28,5	28,6	..	..	..	..	..	..	..	..	28,5	— 0,5
	1,87	27,5	24,9	24,9	..	..	..	..	..	..	..	..	..	24,9	— 2,6
V	1,13	26,5	22,5	22,5	..	..	..	..	..	..	..	..	..	22,5	— 4,0
	0,91	25,9	21,6	21,5	21,5	..	..	..	..	..	..	..	..	21,5	— 4,4

Tav. II.

Ciclo 2°. — H = ± 2,5.

Punto	Campo C.G.S.	INDICAZIONI DEL MAGNETOMETRO											Δ I
		I iniziale	1	2	3	4	5	10	15	20	50	55	I_n finale	
A	0,37	18,7	14,8	14,6	14,8	14,7	14,7	..	..	..	..	..	14,7	— 4,0
B	— 0,46	14,8	3,5	— 0,5	— 2,3	— 3,6	— 4,2	— 5,2	— 6,4	— 6,8	— 9,0	— 9,0	— 9,0	— 23,8
C	— 1,33	0,0	— 12,2	— 12,9	— 13,2	— 13,2	— 13,5	— 13,7	— 13,8	..	..	..	— 13,8	— 13,8
E	— 2,31	— 12,0	— 16,4	— 16,9	— 16,8	— 16,9	— 16,9	..	..	..	..	..	— 16,9	— 4,9
F	— 1,33	— 11,9	— 13,7	— 14,0	— 13,8	— 14,0	— 14,1	..	..	..	..	..	— 14,0	— 2,1
H	0,37	— 8,5	— 2,2	— 0,9	0,0	0,5	0,9	2,4	3,5	..	..	..	5,2	13,7
K	1,20	— 1,0	15,6	18,0	18,9	19,3	19,5	20,0	20,2	20,3	..	..	20,5	21,5
L	1,66	11,1	18,9	22,0	22,2	22,3	22,4	22,6	..	..	..	..	22,8	11,7
M	2,07	17,8	23,7	24,0	24,2	24,3	24,4	24,6	24,6	..	..	..	24,6	6,8
N	2,61	21,1	25,4	25,8	25,8	25,9	25,8	..	..	..	..	..	25,8	4,7
P	1,66	20,9	22,7	23,0	23,2	23,2	23,2	..	..	..	..	..	23,2	2,3

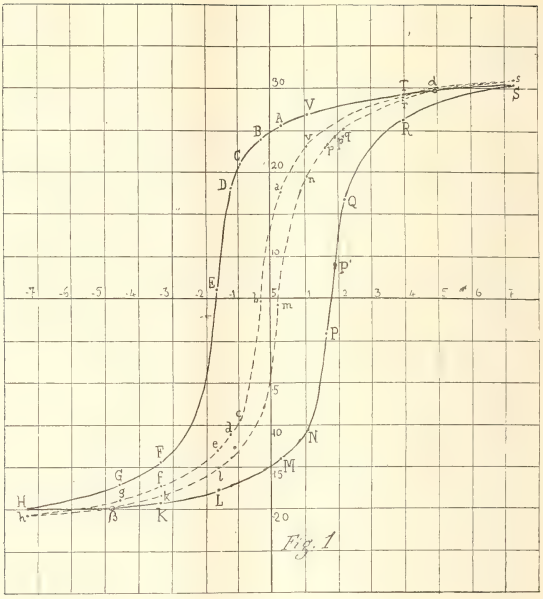

30
20
10
5
10
15
20
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
A
B
C
D
E
F
G
H
K
L
M
N
P
P'
Q
R
S
T
V
a
b
c
d
e
f
g
h
k
l
m
n
p
q
r
s

Fig. 1

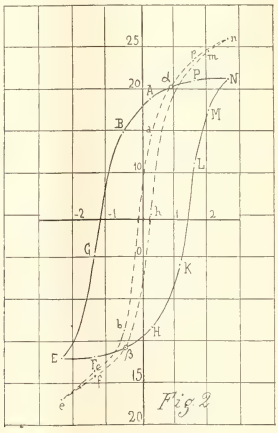

25
20
10
15
20
-2
-1
1
2
A
B
C
D
E
F
G
H
K
L
M
N
P
a
b
c
d
e
f
g
h
m
n
p

Fig. 2

Infatti si ha:

Diminuzione pei punti degli archi . .	$\alpha\beta$, βM	pel 1° ciclo ed analogamente pel 2°.
Inversione " " . .	BE, MP	
Aumento " " . .	EHβ, P'Sα	

2.° Esistono in ogni ciclo magnetico due punti α e β, che chiameremo *neutri*, l'uno nel campo discendente e l'altro nell'ascendente, nei quali una determinata torsione non produce alcun effetto, come i punti analoghi trovati dall'Ascoli per l'urto.

La posizione di tali punti è tanto più prossima ai vertici del ciclo quanto più ampio è il ciclo stesso. La loro distanza dai vertici dipende anche, ma non molto, il che possiamo dire per altre esperienze che ora qui non si riportano, dall'ampiezza della torsione, aumentando coll'ampiezza stessa.

I punti *neutri*, pel processo magnetico pel quale sono definiti, godono per la torsione, della stessa proprietà dei *punti del Villari* per la trazione.

3.° L'aumento che subisce la magnetizzazione nei vertici del ciclo è tanto più grande quanto più ristretto è il ciclo magnetico, quasi che la torsione tendesse a produrre nei vertici stessi una magnetizzazione indipendente dal campo.

4.° L'effetto limite della torsione e detorsione è di modificare il ciclo di isteresi magnetica diminuendone l'area ed aumentandone l'altezza, in modo analogo a quello che fanno tutte le azioni meccaniche o d'altra specie durante la magnetizzazione, e ciò indipendentemente dalla dissipazione di energia che esse provocano. Il ciclo modificato lo chiameremo *ciclo limite*.

5.° A raggiungere il valore limite del momento magnetico occorrono cicli elastici in numero differente secondo i differenti punti del ciclo magnetico, ed in generale numero tanto maggiore quanto più grande è la variazione totale ΔI da ottenere.

La legge secondo la quale le variazioni magnetiche si seguono col seguirsi dei cicli elastici, sarà oggetto di altra Nota.

Effetto ciclico. — La tavola III raccoglie i dati relativi all'effetto *ciclico* in varî punti del 1° e 2° ciclo magnetico, mantenendo sempre le torsioni e detorsioni fra gli stessi estremi. Pel 2° ciclo diamo le indicazioni magnetiche corrispondenti alle torsioni nulle e di $\pm$ 180°; pel 1° diamo anche quelle relative ad angoli intermedî.

Le lettere della 1ª colonna si riferiscono ai punti limiti definiti colle lettere stesse nelle figg. 1 e 2.

Le figg. 3, 4 e 5 rappresentano i diagrammi corrispondenti rispettivamente agli effetti ciclici nei punti *l*, *m*, *r* appartenenti al 1° ciclo (vedi tav. III).

Dall'esame della tav. III e delle figg. 1, 2, 3, 4 e 5 risulta manifesto che l'effetto ciclico:

Tav. III.

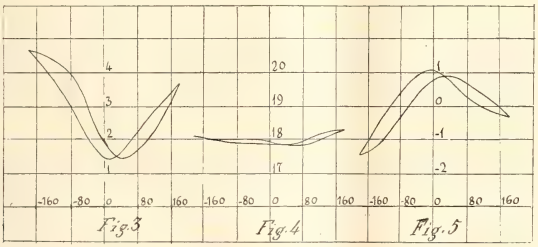
Punto	1° Ciclo																					2° Ciclo				
	LETTURE MAGNETOMETRICHE PER TORSIONI DI																									
	0°	40°	80°	120°	160°	180°	160	120	80	40	0	— 40	— 80	— 12	— 160	— 180	— 160	— 120	— 80	— 40	0	0	180	0	— 180	0
a	16,3	16,6	16,5	16,2	15,7	15,6	15,5	15,5	15,8	16,3	16,7	16,6	16,1	15,8	15,3	15,0	15,1	15,3	15,5	15,7	16,2	14,7	13,2	14,[illegible]	12,9	14,6
b	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	— 9,0	— 8,0	— 9,[illegible]	— 6,7	— 8,9
c	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	— 13,8	— 13,8	— 14,[illegible]	— 11,4	— 13,8
d	— 8,7	— 9,4	— 9,2	— 8,6	— 7,7	— 7,2	— 7,5	— 8,0	— 8,5	— 9,2	— 9,3	— 8,7	— 7,9	— 7,1	— 6,5	— 6,3	— 6,3	— 6,5	— 7,0	— 7,9	— 8,7	..	..	..	..	..
e	— 10,6	— 11,3	— 11,2	— 10,6	— 9,8	— 9,3	— 9,5	— 10,0	— 10,6	— 11,5	— 11,3	— 10,7	— 9,8	— 9,1	— 8,4	— 3,2	— 8,2	— 8,4	— 9,0	— 9,9	— 10,7	— 16,9	— 16,2	— 17,[illegible]	— 14,3	— 16,9
f	— 14,7	— 15,3	— 15,3	— 14,6	— 13,8	— 13,2	— 13,5	— 14,0	— 14,8	— 15,3	— 15,2	— 14,7	— 13,8	— 12,9	— 12,4	— 12,1	— 12,0	— 12,4	— 12,9	— 13,8	— 14,6	— 14,0	— 13,4	— 15,[illegible]	— 11,6	— 14,1
h	— 17,7	— 18,0	— 18,0	— 17,7	— 16,9	— 16,6	— 16,7	— 17,3	— 17,6	— 18,1	— 18,0	— 17,5	— 16,9	— 16,1	— 15,6	— 15,4	— 15,5	— 15,7	— 16,3	— 16,9	— 17,7	..	..	..	..	..
k	— 0,7	— 1,2	— 1,1	— 0,5	0,3	0,8	0,6	0,1	— 0,6	— 1,2	— 1,2	— 0,6	0,3	1,1	1,7	2,0	1,9	1,7	1,1	0,2	— 0,7	20,5	19,5	21,[illegible]	17,5	20,5
l	2,0	1,5	1,7	2,3	3,1	3,7	3,4	2,9	2,2	1,6	1,5	2,1	3,0	3,8	4,4	4,7	4,6	4,4	4,0	3,0	2,0	22,8	21,9	23,[illegible]	20,2	22,8
m	17,8	17,9	17,9	18,0	18,2	18,3	18,3	18,2	17,9	17,9	18,0	18,0	18,0	18,0	18,1	18,1	18,1	18,1	17,9	17,9	17,9	24,6	23,6	22,[illegible]	22,2	24,5
n	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	25,8	25,0	26,[illegible]	25,5	25,8
p	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	23,2	22,3	24,[illegible]	20,7	23,2
p'	18,5	18,9	18,8	18,6	16,0	17,7	17,7	17,9	18,3	18,8	19,1	18,7	18,2	17,5	16,9	16,6	16,7	16,9	17,2	17,8	18,5	..	..	..	..	..
r	0,8	0,9	0,7	0,4	0,0	— 0,3	— 0,2	0,0	0,3	0,8	1,1	0,9	0,4	— 0,2	— 1,0	— 1,4	— 1,3	— 1,0	— 0,3	0,4	0,8	..	..	..	..	..
s	14,1	14,3	14,4	14,2	14,0	13,7	13,7	13,9	14,1	14,3	14,4	14,2	14,0	13,6	12,9	12,6	12,7	13,1	13,4	13,7	14,1	..	..	..	..	..
t	11,8	12,1	12,0	11,9	11,4	10,9	11,1	11,3	11,6	12,1	12,2	12,0	11,6	11,0	10,3	9,9	10,0	10,3	10,7	11,3	11,8	..	..	..	..	..

N. B. — I numeri della 1ª colonna di questa tavola non coincidono con quelli della penultima colonna della tav. I, perchè le due tavole si riferiscono a due serie differenti di misure.

6.° Dipende dalla magnetizzazione limite, raggiunta coll'effetto *irreversibile*, ed è tanto maggiore quanto maggiore è questa e, sensibilmente, si annulla con questa.

7.° Consiste sempre in una diminuzione, in valore assoluto, della magnetizzazione limite.

8.° I cicli elastici fra ± 180° non riescono simmetrici rispetto all'asse delle magnetizzazioni, ma hanno il ramo corrispondente alla torsione positiva (dalla quale si comincia sempre a torcere) più corto dell'altro. Essi sono sempre percorsi nel solito modo, ossia col ramo di ritorno più lontano dall'asse delle torsioni di quello che non sia il ramo di andata.



Da misure che verranno riferite in altra Nota risulta pure che:

9.° Variando l'ampiezza delle torsioni, partendo sempre da punti del ciclo magnetico, raggiunto il punto limite, si hanno effetti ciclici differenti secondo i differenti casi.

10.° Per torsioni sufficientemente ampie il ciclo elastico di un filo di ferro invece di essere percorso nel solito senso, è percorso in senso contrario presentando la *isteresi negativa*, come, in certe condizioni, il nickel.

11.° Esiste un'ampiezza di torsione per la quale l'area del ciclo elastico sensibilmente sparisce, come era stato già argomentato dal Cantone [1] pel nickel.

Volendo renderci ragione della disimmetria presentata dai cicli elastici, pensando che essa provenisse da una disimmetria del filo, abbiamo spostato lo zero delle torsioni. Difatti, con uno spostamento di + 42° pel ciclo del punto *f* abbiamo ottenuto l'intento. Ma la simmetria, raggiunta per una certa ampiezza di torsione, non era mantenuta per ampiezze differenti e, per ampiezze molto grandi, quando l'isteresi riusciva negativa, le lunghezze dei rami venivano invertite, presentando la curva aspetto analogo a quella data dal Nagaoka pel nickel. La causa del fenomeno doveva quindi trovarsi in altro.

[1] Nuovo Cimento, S. 4, t. 5, pag. 290.

È da notare, come s'è detto, che le torsioni venivano sempre iniziate nel senso positivo, cioè nel senso nel quale, con ampiezza di $\pm 180°$, il ramo del ciclo riusciva più corto. Tenendo conto della isteresi elastica, detta F la forza necessaria a produrre la torsione di $+\varphi°$, per produrre la torsione di $-\varphi°$ occorreva, evidentemente, una forza $-F'$ tale da essere, in valore assoluto, $F' \gtrless F$ secodo il segno della isteresi. Ossia si impiegava forza maggiore a produrre ramo più lungo e quindi maggiore variazione magnetica.

La causa della disimmetria è da ricercarsi quindi nel fatto, già assodato dal Cantone, che l'*effetto magnetico dipende non dalle deformazioni ma dalle forze che le producono.*

Chimica. — *Decomposizione elettrolitica di acidi organici bicarbossilici. Acido adipico* [1]. Nota del dott. B. Lino Vanzetti, presentata dal Socio G. Koerner.

La decomposizione elettrolitica degli acidi organici bicarbossilici della serie alifatica e dei loro sali in soluzione, può dar luogo ad un certo numero di reazioni più o meno complesse, che in parte però si possono prevedere, quando si tenga conto dei risultati che l'esperienza ha fornito nello studio dei fenomeni analoghi che si hanno nella decomposizione di acidi organici appartenenti ad altre serie. È certo però che si tratta di reazioni di ordine piuttosto complesso, sia perchè gli elementi che vi concorrono, per il fatto stesso della elettrolisi, si scindono alla lor volta in gruppi di varia natura e di varia capacità di reazione, sia perchè differenze, apparentemente trascurabili, nel modo di condurre l'esperimento, possono trarre a risultati diversi nei vari casi.

Lo studio della dinamica chimica di questi processi urta subito contro la difficoltà di stabilire le concentrazioni dei vari elementi che vi concorrono, al momento della reazione nei vari punti della massa reagente e viene ancora complicata dalla formazione di sistemi eterogenei tra le varie fasi, già esistenti in seno alla miscela reagente, o formatesi durante il processo elettrochimico.

Inoltre, i derivati di questa serie organica tranne i primi tre termini, sono di preparazione piuttosto lunga e laboriosa, il che impedisce di sperimentare su quantità rilevanti, in modo da poter seguire successivamente, ed in varie condizioni, le singole fasi della reazione, scindendone a tempo i prodotti intermedi.

[1] R.ª. Scuola Sup. di Agricoltura. Labor. di Chim. organica. Milano.

In una comunicazione precedente [1] ho già esposto come lo studio della decomposizione elettrolitica del quarto termine della serie bicarbossilica, l'*acido glutarico*, mi abbia condotto alla separazione di un idrocarburo non saturo, già sfuggito alle ricerche di Reboul Bourgoin [2], i quali pure avevano sperimentato in condizioni perfettamente analoghe a quelle da me allora descritte. Questo idrocarburo era il propilene ordinario proveniente dalla decomposizione dell'anione complesso glutarico: $— \overline{OOC} . CH_2 . CH_2 . CH_2 . \overline{COO} —$, che giunto all'elettrodo positivo si scarica e si trova così pronto a reagire per virtù di quelle due valenze libere che gliene risultano e che provocano in esso la ricerca di un assetto molecolare più stabile. La prima reazione che ne segue è dunque una parziale demolizione del complesso, con la separazione dei due gruppi COO, che vanno a formare due molecole di anidride carbonica libera, mentre resta l'aggruppamento bivalente $— CH_2 . CH_2 . CH_2 —$ instabilissimo e capace di iniziare per suo conto ed immediatamente una nuova reazione. Purchè esso almeno in parte arrivi a sottrarsi alla ossidazione, che è l'azione caratteristica dello spazio anodico, si troverà subito nella possibilità di saturare reciprocamente le sue valenze, o chiudendosi ad anello trimetilenico, o formando una doppia legatura e convertendosi in derivato olefinico.

$$— CH_2 . CH_2 . CH_2 — \longrightarrow CH_2 : CH . CH_3 ;$$

ne risulterebbe così il passaggio di un atomo di idrogeno, da uno ad un altro degli atomi di carbonio vicini. Che ciò avvenga di preferenza ad una chiusura dell'anello trimetilenico è verosimile, data la considerevole tensione in cui verrebbero a trovarsi le valenze degli atomi di carbonio unendosi tra di loro ad anello. Ed invero tutti i tentativi fatti per isolare questo idrocarburo diedero risultato negativo.

Restava a vedersi come si sarebbero comportati gli acidi omologhi superiori, nei quali, data la maggior lunghezza della catena metilenica, acquistava maggior probabilità la chiusura dell'anello carbonico, con formazione dell'idrocarburo ciclico. La migliore disposizione ad una tale chiusura dovrebbe dimostrarla il derivato pentametilenico: acido pimelico; disgraziatamente la preparazione di quantità rilevanti di questo prodotto puro, con i metodi finora accessibili riesce lunga e dispendiosa; rivolsi perciò da prima l'attenzione ai suoi due omologhi prossimi, l'acido adipico e l'acido suberico.

Decomposizione elettrolitica dell'acido adipico. — L'acido fu preparato per via elettrolitica secondo il metodo di C. Brown e Walker leggermente modificato [3], venne poi trasformato, previa purificazione, in sale bipotassico

[1] R. Acc. Lincei, vol. XIII, 2° sem. 1904, fasc. 2°.
[2] C. R. 84, pag. 1395.
[3] R. Acc. Lincei, vol. XII, 2° sem. 1903, fasc. 5°.

di cui si fece una soluzione piuttosto concentrata (ca. 27 %). Tale soluzione fu poi sottoposta ad elettrolisi in condizioni analoghe a quelle già descritte per l'acido glutarico. Era prevedibile che l'acido adipico avrebbe resistito meglio alla decomposizione, per la sua maggiore stabilità che lo fa rassomigliare nel comportamento agli acidi inorganici; avrebbe cioè avuto il sopravvento il fenomeno della riabilitazione della molecola acida all'anodo, con la conseguente separazione di ossigeno molecolare, in quantità corrispondente, o quasi, all'idrogeno liberato al catodo. Si constata però, che anche l'acido adipico, o i prodotti che si formano per la depolarizzazione del suo anione, presentano ancora una certa sensibilità all'azione dell'ossigeno anodico, così da provocare altre reazioni secondarie, sulla cui natura noi non possiamo pronunciarci ancora con sicurezza.

Alcune prove fatte per trovare le condizioni di miglior rendimento, variando i fattori della reazione, indicarono però subito che la formazione di idrocarburo non saturo aveva luogo e che il rendimento aumentava col crescere della concentrazione e della densità di corrente, a patto che la temperatura non si innalzasse di troppo, (a ciò si può provvedere facilmente, tenendo immersa la cellula nella quale si compie la reazione, in una miscela frigorifera di ghiaccio e sale). Così si constata che, mentre la densità di corrente salisce da 0.18 a 0.25-0.3-0.4-1.0, restando press'a poco costante la temperatura, la quantità di idrocarburi non saturi formatisi, da 0.6 % della miscela gasosa, salisce a 0.8, 1.0, 1.3, 1.8 %.

Per poter raccogliere una maggior quantità di gas, si prepararono 50 gr. della soluzione al 27 % di adipato bipotassico e si elettrolizzò per alcune ore, impiegando una densità di corrente di circa 0.6 e mantenendo la temperatura sotto 30°. Il gas che si svolgeva bolla a bolla, dopo averlo spogliato della CO_2 che l'accompagnava, era condotto direttamente in un apparecchino per l'assorbimento, contenente bromo liquido e costituito da una serie di numerose piccole bolle disposte in modo da costringere il gas a mescolarsi intimamente con i vapori dell'alogeno, durante il passaggio a traverso; seguiva poi un refrigerante a serpentino immerso in miscela frigorifera, per trattenere il meglio possibile i prodotti della bromurazione, in vista delle piccole quantità che si sarebbero potute isolare. Il gas non assorbito, dopo lavato con soluzione di KOH, si raccoglieva in gasometro. Dopo raccolti così ca. 6 litri di gas, la soluzione si sostituiva con altrettanta nuova, perchè protraendo la elettrolisi nello stesso liquido, una troppo profonda alterazione incominciava a rendersi manifesta. Il prodotto della bromurazione liquido, separato dall'alogeno, lavato, essiccato fu sottoposto ad analisi.

La determinazione del punto di ebollizione diede, che, l'intervallo entro il quale il liquido passa, per reiterate distillazioni, è tra 156° e 167°, dalla prima all'ultima goccia (term. nel vap.), mentre solo una leggera traccia carboniosa rimane nel fondo del palloncino. Appariva subito evidente, che il

liquido era costituito da una mescolanza di due o più prodotti e più probabilmente dei due isomeri butileni bibromurati 2-3, 1-2 i cui punti di ebullizione sono risp. 158° e 165°-6°.

La determinazione di bromo diede:

$$72.58\ \% \quad , \quad [\text{teor. } 74.07 \text{ per } (CH_2)_4\,Br_2].$$

Il peso specifico era: 1.805 a 18.5°, mentre quello dei due prodotti sumenzionati è rispett. di 1.80 e 1.82. Quanto al terzo termine possibile, il bibromoderivato 1-4, il cui punto di ebullizione è molto più elevato (189°), si poteva tutt'al più sospettare che l'idrocarburo da cui dovrebbe derivarsi, il ciclotetrano, fosse rimasto nella massa gasosa non assorbita dal bromo, giacchè la sua indifferenza verso l'alogeno dovrebb'essere ancora maggiore che quella del suo omologo inferiore, il trimetilene o ciclopropane.

L'analisi del gas dopo il primo assorbimento indicava ancora la presenza di una piccola quantità di idrocarburo residuo. Fatto passare tutto ancora una volta per il bromo, si potè così separare una piccola quantità di prodotto bromurato solido giallo chiaro, che diventava oleoso in contatto dell'aria, ma che per la piccola quantità si sottrasse all'indagine analitica. Per analoga ragione si dovette rinunciare anche alla separazione dei costituenti la miscela dei prodotti bromurati, sopra descritta.

Il gas che rimane nel gasometro dopo quest'ultimo passaggio a traverso il bromo, è affatto spoglio di idrocarburi, e non contiene più che idrogeno, ossigeno e tracce di ossido di carbonio.

La sua composizione all'uscita della cellula elettrolitica era, in media, la seguente:

CO_2	25 %
idrocarburi non saturi	1.5
ossigeno	12
ossido di carbonio	1.5
idrogeno	60

e varia a poco a poco, col procedere della reazione, a scapito del rendimento in idrocarburo.

Il rapporto tra ossigeno ed idrogeno rivela già la intensità del processo anodico di ossidazione, il quale vien reso manifesto anche dalla presenza di ossido di carbonio. Inoltre il liquido assume potere riducente per la formazione di sostanze a gruppo aldeidico, la cui origine si può interpretare anche ammettendo una azione diretta dell'ossigeno sull'idrocarburo non saturo o sul resto dell'anione depolarizzato:

$$CH_3.CH_2.\underbrace{CH:CH_2}_{O} \longrightarrow CH_3.CH_2.CH_2.CHO$$

$$\underbrace{CH_2.CH_2.CH_2.CH_2}_{O} \longrightarrow CH_3.CH_2.CH_2.CHO$$

Da quanto è sopra esposto risulta quindi che la decomposizione dell'acido adipico per azione della corrente elettrica, in soluzione del suo sale bipotassico, è più profonda che non si sia ammesso finora, ciò è reso evidente dalla grande quantità di anidride carbonica che si separa all'anodo. Resta anche constatato che questa decomposizione può avvenire con la separazione di idrocarburi non saturi (butileni); la spiegazione più semplice, che si presenta alla mente, sarebbe data da una reazione *primaria*, che avrebbe per oggetto l'anione, il quale depositata la carica all'elettrodo. dando luogo alla formazione del complesso instabile: $— OOC . CH_2 . CH_2 . CH_2 . CH_2 . COO —$, dopo aver subito una parziale demolizione per la perdita dei due gruppi COO, metterebbe in libertà il gruppo bivalente $— CH_2 . CH_2 . CH_2 . CH_2 —$, il quale può divenire stabile, solo con la formazione di un assetto molecolare, che risponda alle esigenze della teoria di valenza. Delle tre forme possibili, in questo caso, resta esclusa quella ciclica

$$\begin{array}{c} CH_2 — CH_2 \\ | \qquad\quad | \\ CH_2 — CH_2 \end{array}$$

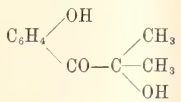
e compaiono invece le due altre: $CH_3 . CH_2 CH : CH_2$ e $CH_3 . CH : CH . CH_3$. Si avrebbe dunque anche in questo caso un trasporto di atomi di idrogeno, per la formazione della doppia legatura. Il rendimento è molto basso. Forse con l'aggiunta di un depolarizzatore anodico adatto, sul quale si potesse riversare l'azione dell'ossigeno all'anodo, si arriverà ad ottenere una maggiore quantità di idrocarburo; questa sarebbe inoltre la migliore dimostrazione, che la formazione sua non è che il risultato di una reazione primaria, anzichè il prodotto di reazione più complesse.

Lo studio della decomposizione elettrolitica dell'acido suberico, già iniziata, porterà, spero, maggior luce anche su questo fatto, sul quale vertono tutt'ora opinioni contradittorie.

Quanto all'odore speciale etereo, che caratterizza i prodotti della reazione nel liquido elettrolisato, si spiega abbastanza facilmente, se si tien conto delle reazioni secondarie (formazione di alcoli ecc.), che accompagnano il fenomeno della decomposizione elettrolitica, e che danno luogo a forma zione di sali eterei, tra i quali troviamo di frequente quelli di acidi non saturi.

Chimica. — *Azione del cloroformio e idrato sodico sui fenoli in soluzione nell'acetone* [1]. Nota di GUIDO BARGELLINI, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

In un brevetto tedesco del luglio 1894, Link [2] descrisse un prodotto ottenuto riscaldando a b. m. per 5-6 ore una soluzione di fenolo nell'acetone insieme con cloroformio e idrato sodico (o potassico). Si forma così un composto di formula $C_{10}H_{12}O_3$ che Link riguardò come *ossiisopropil- ossifenilchetone* (opp. *ossiisobutiril- fenolo*)



Considerando questo prodotto, la cui formula però non era stata dimostrata in alcuna maniera nè da Link nè da altri, mi parve utile rivolgere l'attenzione su questa reazione per vedere se si potesse, con opportune modificazioni, applicarne il principio per avere un metodo generale di preparazione dei chetoni. Non mi sembrò quindi privo di interesse ripreparare dapprima questo composto, studiarlo poi per fissare la maniera di ottenerlo con buona rendita e purificarlo, e stabilire infine la posizione della catena laterale rispetto all'ossidrile fenico. Io potei infatti ripreparlo secondo le indicazioni del brevetto ed averlo con proprietà identiche a quelle del composto descritto da Link. Naturalmente, trovandosi in esso, secondo la formula di Link, due dei gruppi della chimica organica che più si prestano per dare derivati caratteristici, cioè l'ossidrile fenico e il carbonile chetonico, volli prepararne qualcuno. Ma, per quanti tentativi abbia fatto, io non potei ottenere nè l'acetilderivato, nè il benzoilderivato, nè l'etere metilico. Era quindi da escludersi che questo prodotto contenesse un ossidrile fenico. D'altra parte osservai che esso non reagisce affatto nè coll'idrossilammina, nè colla semicarbazide, nè colla fenilidrazina, ciò che fa evidentemente cadere l'ipotesi che esso sia un chetone. Mi si presentava dunque il problema di dover studiare di nuovo la costituzione di questo composto, la cui analisi elementare conduceva alla formula $C_{10}H_{12}O_3$. La questione fu risolta colla osservazione da me fatta che esso si scioglie nelle soluzioni dei carbonati alcalini e riprecipita da queste per aggiunta di acido cloridrico. Esso contiene dunque un carbossile.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
[2] Link, B. 28, R. 665 — D. R. P. 80986.

Esclusa così la presenza dell'ossidrile fenico e del carbonile chetonico e provata l'esistenza di un carbossile, la formula strutturale più probabile per questo composto $C_{10}H_{12}O_3$, era quella di un etere fenico dell'acido α- ossiisobutirrico

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C < \begin{matrix} O—C_6H_5 \\ COOH \end{matrix}$$

Un composto di questa formula di costituzione era stato preparato nel 1900 da Bischoff (1) saponificando l'etere etilico corrispondente (che egli aveva ottenuto riscaldando fenato sodico secco e etere etilico dell'acido α- bromoisobutirrico). Le proprietà dell'acido preparato da Bischoff da una parte e quelle del composto preparato da Link e da me dall'altra parte, infatti, coincidono perfettamente.

Io preparai inoltre l'etere etilico del prodotto di Link, per mezzo dell'alcool etilico e acido cloridrico ed osservai che è completamente identico all'etere etilico dell'acido α- fenossiisobutirrico di Bischoff.

Infine, distillando il prodotto che avevo ripreparato secondo le indicazioni di Link, ottenni una mescolanza di fenolo e acido metacrilico: decomposizione simile a quella che Bischoff descrisse per il suo acido α- fenossiisobutirrico.

Resta dunque in tal modo stabilita sicuramente l'identità del prodotto che si può ottenere da fenolo, cloroformio, idrato sodico e acetone, coll'acido α- fenossiisobutirrico di Bischoff.

Ancora i due prodotti che Link ottenne per azione del cloroformio, idrato sodico e acetone sull'α- e sul β- naftolo, e che io ho potuto ripreparare, sono identici agli acidi α- e β- nafto- α- ossiisobutirrici che Bischoff (2) ebbe saponificando i corrispondenti eteri etilici (ottenuti riscaldando i naftolati sodici coll'etere etilico dell'acido α- bromoisobutirrico).

Per essere ancora più sicuro, studiai anche l'azione del cloroformio, idrato sodico e acetone sull'*o*- e sul *p*- cresolo e sul timolo: ottenni così dei prodotti che sono perfettamente identici a quelli che Bischoff preparò dall'etere dell'acido α- bromoisobutirrico e i sali sodici dei cresoli (3) e del timolo (4).

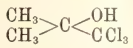
Non resta quindi alcun dubbio che per azione del cloroformio e idrato sodico sui fenoli in soluzione nell'acetone, si formano i corrispondenti eteri fenici dell'acido α- ossiisobutirrico. I pretesi chetoni di Link devono quindi essere radiati dai trattati di chimica (5).

(1) Bischoff, B. 33, 933.
(2) Bischoff, B. 33, 1386.
(3) Bischoff, B. 33, 1252, 1259.
(4) Bischoff, B. 33, 1273.
(5) Beilstein, Handbuch, III Suppl., pagg. 120, 143.

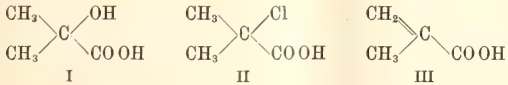
È da notarsi il fatto che in queste reazioni non si formano aldeidi, le quali invece si hanno normalmente quando si fa agire cloroformio e idrato sodico sui fenoli in soluzione acquosa o alcoolica. In questo caso, veramente, ci si sarebbe potuto aspettare p. es. dal fenolo la formazione di ossibenzalacetoni ($HO-C_6H_4-CH=CH-CO-CH_3$) che avrebbero avuto origine per azione dell'idrato sodico eccedente sull'acetone e le aldeidi *o*- e *p*- ossibenzoica formatesi prima. Ma nè di aldeidi, nè di composti non saturi (ossibenzalacetoni) ho potuto riscontrare traccia fra i prodotti della reazione.

Rimane ora a spiegare il meccanismo della reazione.

Si sa dai lavori di Willgerodt [1] che per azione dell'idrato potassico solido sopra una mescolanza di acetone e cloroformio, si forma il cosidetto acetoncloroformio



Willgerodt e Schiff [2] dimostrarono in seguito che l'acetoncloroformio, con soluzione acquosa alcoolica di idrato potassico, dà origine ad acido α- ossiisobutirrico (formula I), mentre più tardi Ostropjatow [3] trattando a freddo l'acetoncloroformio con soluzione di idrato potassico al 10 %, disse di aver ottenuto in piccola quantità acido α- cloroisobutirrico (formula II), colla potassa solida invece in prevalenza acido metacrilico (formula III)



Essendo questi i fatti noti fino ad ora, vediamo come si possa interpretare la reazione fra cloroformio, acetone, idrato sodico e fenolo che ci porta ad avere come prodotto finale l'acido α- fenossiisobutirrico.

Se si può ammettere che nella prima fase della reazione si formi acetoncloroformio (tanto più che, secondo Link, si può usare nella reazione l'acetoncloroformio invece del cloroformio) può restare il dubbio se nella seconda fase si formi acido α- ossiisobutirrico oppure acido α- cloroisobutirrico o acido metacrilico. Il fatto che, facendo agire insieme soltanto cloroformio, acetone e idrato sodico nelle condizioni identiche a quelle della reazione col fenolo, io ho potuto ottenere dell'acido α- ossiisobutirrico, dà un alto grado di probabilità all'ipotesi che nella seconda fase si formi acido α- ossiisobutirrico il quale poi reagisce nella terza fase col fenolo dando l'acido α- fenossiisobutirrico. Non posso però escludere che nella seconda fase

(1) Willgerodt, B. 14, 2451.
(2) Willgerodt e Schiff, J. für pr. Ch. (2) 41, 519.
(3) Ostropjatow, B. 29, R. 908.

si formi anche dell'acido α- cloroisobutirrico o dell'acido metacrilico. Ma, avendo io potuto ottenere con buona rendita dell'acido α- fenossiisobutirrico, riscaldando 5-6 ore a b. m. una soluzione di fenolo e acido α- ossiisobutirrico nell'acetone in presenza di idrato sodico, mi pare più verisimile ammettere che l'acetoncloroformio formatosi dapprima subisca, per azione dell'idrato sodico in presenza di acetone, la trasformazione in acido α- ossiisobutirrico e questo poi col fenolo dia origine all'acido α- fenossiisobutirrico che è il prodotto finale della reazione.

Siccome può forse meravigliare un poco questa formazione di un etere fenico per azione di un fenolo sopra un ossiacido in presenza di idrato sodico, ho cominciato delle ricerche con altri ossiacidi per vedere se questa maniera di preparazione possa avere un'applicazione generale per ottenere gli eteri fenici degli ossiacidi. Ma non ho per ora raccolto materiale sufficiente per decidere la questione che sarà per parte mia oggetto di ulteriori ricerche.

Deve infine fare osservare che Link disse di avere ottenuto il composto $C_{10}H_{12}O_3$ (e gli altri dai naftoli) non solo usando il cloroformio, ma ancora usando il bromoformio, il cloralio, il bromalio, l'acetoncloroformio, l'acetonbromoformio e anche il CCl_4 e il CBr_4. Ora, se è provato che dall'acetoncloroformio oppure dall'acetone e cloroformio semplicemente, si può, nelle condizioni della reazione descritta, avere dell'acido α- ossiisobutirrico, ed è facile quindi pensare che il medesimo possa formarsi anche dal bromoformio, dal cloralio, dal bromalio e dall'acetoncloroformio, ciò non era affatto provato riguardo al CCl_4 e al CBr_4. Si sa soltanto che Willgerodt [1] da acetone e CCl_4 ottenne un composto di addizione che non fece oggetto di studî speciali. Senza entrare in merito alla formula strutturale di questo prodotto di addizione, io volli vedere se nelle medesime condizioni della reazione descritta, si può ottenere acido α- ossiisobutirrico da acetone, CCl_4 e idrato sodico: ciò che l'esperienza mi ha confermato. Quindi anche nel caso del CCl_4 (e per analogia anche col CBr_4) si può ammettere che la reazione che ci porta all'acido α- fenossiisobutirrico, avvenga in tre fasi: nella prima si forma il prodotto di addizione che, nella seconda fase, è trasformato in acido α- ossiisobutirrico, il quale infine si unisce col fenolo per dare l'acido α- fenossiisobutirrico.

Parte sperimentale.

Acido α- fenossiisobutirrico. — In un pallone munito di refrigerante a ricadere sciolsi gr. 30 di fenolo in cc. 300 di acetone e aggiunsi poi gr. 70 di idrato sodico in piccoli pezzi. In questa mescolanza, scaldata a b. m. versai a poco a poco nel corso di un'ora circa, gr. 50 di cloroformio. Ad ogni aggiunta di cloroformio si nota viva reazione. Il liquido si colora in giallo-rosso sempre

[1] Willgerodt, B. 14, 2451.

più intenso. Dopo 5-6 ore di riscaldamento a b. m. separai per distillazione l'acetone eccedente e sciolsi nell'acqua il residuo secco. Aggiungendo acido cloridrico alla soluzione acquosa che ha forte reazione alcalina, si separò un olio rosso. Questo venne estratto con etere: svaporato l'etere, il residuo oleoso fu sciolto in molta acqua e fatto bollire con carbone animale. Dalla soluzione filtrata si separò per raffreddamento il prodotto in aghetti bianchi che, dopo alcune cristallizzazioni nell'acqua calda raggiunsero il punto di fusione costante 98°-99°. Rendita: gr. 20 di prodotto puro.

Tale sostanza la potei ancora preparare usando il CCl_4 invece del $CHCl_3$. In tal caso però si ha rendita minore e prodotto più impuro.

Il medesimo prodotto lo potei ottenere ancora scaldando a b. m. per 5-6 ore gr. 20 di fenolo con gr. 22 di acido α-ossiisobutirrico Kahlbaum, gr. 20 di idrato sodico e cc. 300 di acetone. Distillai poi l'acetone eccedente, sciolsi nell'acqua il residuo secco, aggiunsi acido cloridrico ed estrassi con etere l'olio rosso formatosi. Questo fu sciolto nell'acqua e fatto bollire con carbone animale: dal liquido filtrato si depositarono aghetti bianchi che dopo alcune cristallizzazioni nell'acqua calda si fusero costantemente a 98°-99°.

Il prodotto puro, seccato nel vuoto sul $CaCl_2$ fino a peso costante, dette all'analisi i seguenti risultati:

Gr. 0,3088 di sostanza dettero gr. 0,7528 di CO_2 e gr. 0,189 di H_2O.

Donde per cento:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{12}O_3$
C	66,48	66,66
H	6,80	6,66

Quest'acido α-fenossiisobutirrico si scioglie facilmente nell'alcool, etere, acido acetico, benzolo, cloroformio. È abbastanza facilmente solubile nell'acqua calda, poco nell'acqua fredda. È un po' volatile col vapore d'acqua. Meglio che nell'acqua, si scioglie nelle soluzioni degli idrati alcalini: da queste soluzioni viene riprecipitato dall'acido cloridrico ma non dall'anidride carbonica. Si scioglie facilmente anche nelle soluzioni dei carbonati alcalini.

La sua soluzione acquosa dà con soluzione di cloruro ferrico un precipitato giallastro fioccoso.

Preparai il suo *sale di bario* disciogliendo l'acido puro nella soluzione calda di idrato di bario, eliminando poi dalla soluzione l'eccesso di bario per mezzo del CO_2 e svaporando a secco a b. m. il liquido filtrato. Il residuo secco fu ripreso con acqua calda: per raffreddamento si depositò il sale di bario ben cristallizzato: per concentrazione delle acque madri se ne separò una nuova quantità. Questo sale fu fatto cristallizzare di nuovo nell'acqua calda, poi seccato nel vuoto sul $CaCl_2$ fino a peso costante e infine analizzato. Riscaldato a 100°, non perse di peso: a temperatura più alta se ne andò l'acqua di cristallizzazione: la costanza di peso fu raggiunta a 140°-150°.

1) Gr. 0,3312 di sale di bario del prodotto ottenuto dal $CHCl_3$ persero per riscaldamento a 140°-150° gr. 0,0122 e dettero poi gr. 0,1492 di $BaSO_4$.

2) Gr. 0,6542 di sale di bario del prodotto ottenuto dal CCl_4 persero per riscaldamento a 140°-150° gr. 0,023 e dettero poi gr. 0,295 di $BaSO_4$.

3) 0,143 di sale di bario del prodotto ottenuto dall'acido α- ossiisobutirrico dettero gr. 0,0644 di $BaSO_4$.

Donde per cento:

	Trovato			Calcolato per
	I	II	III	$(C_{10}H_{11}O_2)^2Ba + H_2O$
H_2O	3,68	3,51	—	3,50
Ba	26,52	26,54	26,51	26,76

Dalla soluzione acquosa di questo sale di bario per aggiunta di acido cloridrico ottenni di nuovo l'acido α-fenossiisobutirrico che, dopo una cristallizzazione nell'acqua calda, presentò il punto di fusione 98°-99°.

Aggiungendo una soluzione di nitrato d'argento alla soluzione del sale di bario, si ottiene il corrispondente *sale di argento* come precipitato bianco: si scioglie un poco nell'acqua calda da cui per raffreddamento cristallizza in bellissimi aghi bianchi che anneriscono alla luce.

Dall'acido α-fenossiisobutirrico che preparai nella maniera sopra descritta, potei ottenere facilmente il corrispondente *etere etilico* facendo passare per alcune ore una corrente di acido cloridrico gassoso nella sua soluzione alcoolica. È un liquido scolorato di odore gradevole che bolle a 160°-165° alla pressione di 7 mm., come riporta Bischoff per il composto che ottenne riscaldando il fenato sodico coll'etere etilico dell'acido α-bromoisobutirrico.

Per avere una nuova prova dell'identità del prodotto da me preparato coll'acido α-fenossiisobutirrico di Bischoff, lo riscaldai in un palloncino a distillazione frazionata. Fra 160° e 200° distillò un liquido dal quale potei separare, per mezzo del carbonato di calcio, fenolo ed acido metacrilico, operando secondo le indicazioni di Bischoff.

Partendo dal concetto che il prodotto dell'azione del cloroformio e idrato sodico sul fenolo in soluzione nell'acetone fosse un ossichetone, come ammise Link, io feci numerosi tentativi per avere derivati caratteristici dell'ossidrile fenico e del carbonile chetonico: ma non potei ottenere nè l'*acetilderivato*, facendolo bollire più ore con anidrice acetica e acetato sodico, nè il *benzoilderivato* per azione del cloruro di benzoile. Neppure potei prepararne l'*etere metilico* per mezzo del solfato dimetilico. Egualmente senza risultato riuscirono le ricerche fatte colla fenilidrazina, col cloridrato d'idrossilammina e col cloridrato di semicarbazide per ottenere il *fenilidrazone*, l'*ossima* e il *semicarbazone* corrispondenti.

Acido α-naftol- α-ossiisobutirrico. — Ad una mescolanza di gr. 50 di α-naftolo, cc. 500 di acetone e gr. 80-90 di idrato sodico, scaldata a b. m. in un pallone munito di refrigerante a ricadere, versai poco a poco nel corso di un'ora circa, gr. 50 di cloroformio. Anche qui, come nella reazione descritta per il fenolo, si ha viva reazione ad ogni aggiunta del cloroformio, mentre il liquido si colora in bleu-verde.

Dopo 5-6 ore di riscaldamento si distilla l'acetone eccedente e si scioglie nell'acqua il residuo secco. Aggiungendo acido cloridrico a questa soluzione alcalina verde si ha un olio rosso che viene estratto con etere. Scacciato l'etere per distillazione, si scioglie il residuo in molta acqua calda e si fa bollire con carbone animale. Il prodotto che si deposita per raffreddamento, dopo alcune cristallizzazioni nell'alcool diluito, raggiunse il punto di fusione costante 130°-131° (Link, 127°-128, Bischoff, 130°-131°).

Si scioglie pochissimo nell'acqua fredda, un poco di più nell'acqua calda: è facilmente solubile nei comuni solventi organici.

Il *sale di bario* preparato nella maniera che ho descritta sopra per il sale di bario dell'acido α-fenossiisobutirrico, è bianco ben cristallizzato. Seccato a 100° fino a costanza di peso, dette all'analisi i seguenti risultati.

Gr. 0,624 di sostanza dettero gr. 0,2364 di $BaSO_4$.

Donde per cento

	Trovato	Calcolato per $(C_{14}H_{13}O_3)^2Ba + H_2O$
Ba	22,30	22,39

Dalla soluzione di questo sale di bario il nitrato d'argento fa precipitare il corrispondente *sale di argento* bianco che annerisce alla luce.

Per aggiunta di acido cloridrico alla soluzione del sale di bario si precipita l'acido α-naftol-α-ossiisobutirrico fusibile a 130°.

Acido β-naftol-α-ossiisobutirrico. — Preparai quest'acido nella maniera che ho descritta sopra per l'α-naftolo. Cristallizzato nell'alcool diluito, si presenta in forma di foglie bianche fusibili a 123°. È pochissimo solubile nell'acqua anche bollente, di più nell'alcool, etere, benzolo, cloroformio.

Il *sale di bario*, preparato nel modo sopra descritto, è bianco cristallizzato in aghetti. Seccato a 100° fino a costanza di peso, dette all'analisi i seguenti risultati.

Gr. 0,5792 di sostanza dettero gr. 0,2192 di $BaSO_4$.

Donde per cento

	Trovato	Calcolato per $(C_{14}H_{13}O_3)^2Ba + H_2O$
Ba	22,27	22,39

Aggiungendo soluzione di nitrato d'argento alla sua soluzione acquosa, si precipita il *sale di argento* bianco che annerisce alla luce.

Dalla soluzione acquosa del sale di bario, l'acido cloridrico fa riprecipitare l'acido in fiocchi bianchi.

Acido p-cresol- α-ossiisobutirrico — Facendo reagire insieme nella maniera già descritta per il fenolo, gr. 20 di *p*-cresolo con 200 cc. di acetone, gr. 45 di idrato sodico e gr. 30 di cloroformio, ottenni un prodotto che fatto cristallizzare più volte nel benzolo e ligroina, raggiunse il punto di fusione costante 71°-72°.

Ne preparai col solito metodo il *sale di bario* che cristallizza nell'acqua in bellissimi aghi bianchi. Seccato a 100° fino a costanza di peso dette all'analisi i seguenti risultati.

Gr. 0,632 di sostanza dettero gr. 0,273 di $BaSO_4$.

Donde per cento

	Trovato	Calcolato per $(C_{11}H_{13}O_3)^2Ba + H_2O$
Ba	25,42	25,37

Aggiungendo acido cloridrico alla sua soluzione acquosa, si riottiene l'acido che è poco solubile nell'acqua.

Acido o-cresol- α-ossiisobutirrico. — Il prodotto che potei preparare per azione del cloroformio e idrato sodico sull'*o*-cresolo in soluzione nell'acetone, si fonde a 75°-76°, come quello che Bischoff ottenne dall'acido α-bromoisobutirrico.

Acido timol- α-ossiisobutirrico. — Facendo reagire cloroformio e idrato sodico sul timolo in soluzione nell'acetone, nella maniera descritta, giunsi ad avere un prodotto cristallino fusibile costantemente a 69°-70°, come quello di Bischoff.

Su questa, come sulla precedente sostanza, stimai inutile fermarmi di più.

Azione dell'idrato sodico sul cloroformio in soluzione nell'acetone.

In una mescolanza di gr. 60 di idrato sodico e cc. 300 di acetone, scaldata a b. m. in un pallone munito di refrigerante a ricadere, versai poco a poco nel corso di circa un'ora, gr. 40 di cloroformio. Ad ogni aggiunta di cloroformio si nota viva reazione. Seguitai a scaldare per altre 4-5 ore il liquido che poco per volta divenne giallo-rosso. Distillai l'eccesso dell'acetone e sciolsi nell'acqua il residuo solido. Siccome si sentiva manifestamente l'odore caratteristico simile alla canfora dell'acetoncloroformio, approfittai della sua facile volatilità col vapor d'acqua per eliminarlo. Al liquido alcalino aggiunsi poi acido cloridrico ed estrassi con etere. Svaporando l'etere si depositò una sostanza cristallina che, sublimata, presenta il punto di fusione 78°-79°, come l'acido α-ossiisobutirrico. Inoltre, come l'acido α-ossiisobutirrico, bolle a 212° e il liquido che distilla si condensa in bellissimi aghi bianchi. Per identificarlo in modo anche più sicuro, lo trasformai

nel caratteristico *sale di calcio* che cristallizza in cubi facilmente solubili nell'acqua e insolubili nell'alcool, il quale anzi lo fa precipitare dalle sue soluzioni acquose concentrate.

Per *azione dell'idrato sodico sul tetracloruro di carbonio in soluzione nell'acetone* ottenni, operando nelle medesime condizioni, lo stesso acido α-ossi-isobutirrico fusibile a 78°-79°.

Fisiologia. — *Proinvertasi e reversibilità dell'invertasi nei Mucor* (1). Nota di E. Pantanelli, presentata dal Socio R. Pirotta.

La continuazione dello studio del processo di secrezione degli enzimi, per il quale avevo già dovuto stabilire (2), che il substrato influenza diversamente la produzione intracellulare, la secrezione e l'azione dell'enzima, mi ha portato a scoprire altri due fatti importanti, la cui conoscenza è indispensabile per lo studio della secrezione, e cioè l'esistenza di una proinvertasi o zimogeno dell'invertasi nelle cellule di *Mucor Stalonifer* e *Mucedo*, la quale viene *secreta come tale* e si trasforma poi lentamente nel liquido esterno in invertasi attiva, e la relativamente grande facilità con cui l'invertasi passa da l'idrolisi del saccarosio a la ricostituzione di un disaccaride partendo da lo zucchero invertito.

Tanto la proinvertasi come la reversione dell'invertasi faranno l'oggetto di lavori speciali; qui riporto solo alcuni dati principali, riferentesi specialmente a ciò che è necessario sapere di questi fenomeni prima di applicarsi a lo studio della secrezione dell'enzima.

L'esistenza di un zimogeno per un enzima così facilmente diffusibile, qual'è l'invertasi, era finora ignota (3); il solo Röhmann (4) ne suppone la presenza in certi organismi che non lasciano esosmire l'invertasi finchè la cellula è intatta. Per le cellule vegetali si conoscono in generale meno proenzimi, che per le cellule animali (5).

Eppure l'esistenza di questo zimogeno è facile a dimostrarsi. Esempio:

Una coperta bene sviluppata di *Mucor Mucedo*, cresciuta sul solito (6) liquido nutritizio, dopo lavaggio isotonico fu asciugata dolcemente fra carta

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia del R. Istituto Botanico di Roma.

(2) I. *Meccanismo di secrezione degli enzimi.* Annali di Botanica, vol. II, pag. 113 (1905); II. *Influenza di colloidi su la produzione, secrezione ed azione dell'invertasi.* Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (5), vol. XIV, 1° sem., pag. 377 (1906).

(3) Vedi i riassunti di Czapek, *Biochemie der Pflanzen*, vol. I, pag. 276 (1904) e Oppenheimer, *Die Fermente u. ihre Wirkungen.* II Aufl., pag. 250 (1904).

(4) Ber. d. chem. Ges., Bd. XXVII, pag. 3251 (1894).

(5) Czapek, loc. cit., pag. 80.

(6) Pantanelli, loc. cit., I (1905), pag. 120.

bibula e pesava fresca 18,5708 g. Fu allora divisa in due porzioni, di cui una (A), pesante 10,2034 g., fu maciullata con aggiunta di pura sabbia quarzosa, cloroformio ed acqua; 10 cmc. della poltiglia così ottenuta neutralizzavano 0,2 cmc. $^1/_{10}$ norm. NaOH. L'altra porzione (B) pesante 8,3674 g., fu pestata con sabbia quarzosa, cloroformio e soluzione 0,042 mol. di $Na_2 CO_3$ in quantità tale, che la poltiglia rimase sempre perfettamente neutra rispetto al lackmus, debolmente alcalina rispetto al methylorange. I seguenti valori di CuO — invertasi, determinati con la solita metodica in condizioni identiche, sono corretti di tutte le diluizioni e riportati ad 1 gr. di micelio fresco. Nella colonna « lorda » è indicata la quantità di zucchero riduttore (mg. CuO) formata in un'ora a 56°, nella colonna « acido » la quantità di hexosio formata nelle stesse condizioni dal solo acido eventualmente aggiunto; la sottrazione di questo valore dal primo dà l'invertasi netta. La poltiglia di B fu divisa in 5 porzioni, di cui B rimase com'era, e a Ba, Bb, Bc, Bd, furono aggiunti gli acidi nella proporzione indicata. Le poltiglie così preparate soggiornavano a 18,5°.

Composizione dei saggi d'inversione:

A. 10 cmc. poltiglia + 10 cmc. di 40 % saccarosio.
B. 10 cmc. poltiglia + 10 cmc. di 40 % saccarosio.
Ba. 5 cmc. poltiglia + 10 cmc. di 40 % saccarosio + 1 cmc. 0.132 norm. HCl + 4 cmc. acqua.
Bb. 5 cmc. poltiglia + 10 cmc. di 40 % saccarosio + 5 cmc. 0.132 norm. HCl + 4 cmc. acqua.
Bc. 5 cmc. poltiglia + 10 cmc. di 40 % saccarosio + 5 cmc. 0.0375 norm. $H^+ . H_2 PO_4^-$ (methylorange) (0.0863 norm. $H^+ H^+ . HPO_4^=$ (lackmus)).
Bd. 5 cmc. poltiglia + 10 cmc. di 40 % saccarosio + 5 cmc. 0.0398 norm. $CH_3 . COOH$.

Invertasi:

	Subito dopo la triturazione			Dopo 48 ore:		
	lorda	acido	netta	lorda	acido	netta
A.	127,5	—	127,5	360	—	360
B.	0	—	0	tracce	—	tracce
Ba.	1940	1632	308	2192	1632	560
Bb.	—	—	—	6089,6	4720	1369,6
Bc.	—	—	—	928	792	136
Bd.	—	—	—	816	130	686

In questa esperienza i preparati avevano soggiornato a l'aria in presenza di cloroformio, ma erano affatto privi di zucchero. Siccome è noto che gli enzimi si sciupano più facilmente se non sono « protetti » dal loro idrolito preferito, così ho fatto esperienze anche in presenza di saccarosio.

Esempio: Una coperta di *Mucor Mucedo*, coltivata parallelamente e in identiche condizioni della precedente, ma in presenza di 2,5 % silice colloidale, pesava fresca 24.1044 gr. Una porzione (A) di 14.4969 gr. fu pestata con acqua, un'altra (B) di 9.6075 gr. con soluzione 0.042 mol. Na_2CO_3, in modo che la poltiglia diventò esattamente neutra per il lackmus. Determinazioni, calcoli e composizione dei saggi come nel caso precedente:

	Invertasi: Subito dopo la triturazione			Dopo 48 ore:		
	lorda	acido	netta	lorda	acido	netta
A.	345	—	345	446	—	446
B.	0	—	0	tracce	—	tracce
Ba.	1960	1632	328	3232	1632	1600

Tolti questi saggi in B fu sciolto tanto saccarosio da formare una soluzione al 10 %. Dopo di che B fu diviso in 4 porzioni, di cui una (B) rimase qual'era, mentre a Bb, Bc, Bd furono mescolati acido cloridrico, fosforico, acetico nelle proporzioni indicate. Le poltiglie così preparate soggiornavano, con cloroformio, accanto a le precedenti, a la temperatura di 18,5°. Naturalmente un po' di saccarosio fu invertito anche a questa temperatura nel tempo trascorso fino a la presa dei saggi, ciò che è indicato nella colonna « hexosio iniziale ».

	Dopo 48 ore:			
	lorda	hexosio iniziale	acido	netta
B.	880	540	—	340
Bb.	6592	440	2860	1432
Bc.	776	568	792	— 584
Bd.	832	696	130	— 14

Dunque, in presenza di saccarosio accade non solo una notevole trasformazione di proinvertasi in invertasi anche in ambiente neutro, ma perfino a 18,5° si ha un'attività inversiva che non cede a quella verificantesi in ambiente acido, ciò che è reso possibile dal fatto che il saccarosio, come ha dimostrato Kullgren [1], sebbene pochissimo dissociato, dà però abbastanza ioni di H^+ per catalisare in misura sensibile la propria idrolisi. Molto probabilmente la « protezione » dell' idrolito sul suo enzima, di cui è piena la letteratura enzimologica, è dovuta a questa favorita trasformazione dello zimogeno in enzima attivo, mentre questo, come dobbiamo ammettere dal suo

[1] *Studien über die Inversion.* Zeitschr. f. physik. Chemie, XLI, pagg. 407-426 (1902).

modo di agire, diminuisce continuamente anche in presenza della sostanza « proteggente ». Su questo punto importante ho in corso esperienze.

Nell'esperimento su riportato, in ambiente acido l' invertasi intracellulare a 18,5° non lavorò gran che, e ciò perchè il suo optimum di acidità è estremamente basso. In presenza di acido acetico, e molto di più in acido fosforico, colpisce il fatto sorprendente, che mentre a 18,5° l'attività inversiva nella poltiglia fu abbastanza vivace, a 56 l'attività si revertì e da l' hexosio che già esisteva nel saggio e da quello a cui l'acido dava origine fabbricò uno zucchero non riduttore. Ciò sta in armonia con quanto vedremo fra poco su la reversibilità dell'enzima.

Io non posso qui riportare tutte le esperienze eseguite sul passaggio della proinvertasi intracellulare di *Mucor* in invertasi attiva. I risultati capitali finora assodati sono:

1) La proinvertasi intracellulare di *Mucor* passa extra vitam in invertasi attiva, forse per ossidazione lenta. Infatti l'aereazione favorisce il passaggio, il quale del resto si compie anche in assenza di ossigeno libero.

2) Il passaggio è catalisato da gli ioni di idrogeno. Infatti esso richiede la loro presenza, sebbene in quantità minuscole, e varia proporzionalmente a la costante di affinità dell'acido.

3) In ambiente neutro e più in ambiente leggermente alcalino l'enzima attivo si sciupa assai più presto che in ambiente acido, mentre la proinvertasi anche in ambiente alcalino si conserva per molto tempo. Infatti, mentre poltiglie inversive alcalificate perdono rapidamente l'attività idrolitica, la riacquistano lentamente se si restituisce loro anche dopo varî giorni una leggera acidità.

* * *

Importante è poi la comparsa di proinvertasi nel liquido culturale. L'uscita di zimogeno da le cellule di *Mucor*, paragonabile forse a la secrezione di succo pancreatico inattivo, non è costante in questi organismi, ma bensì varia a seconda delle condizioni interne od esterne, come avremo campo di vedere parlando della secrezione.

Ho stabilito la presenza di proinvertasi nei liquidi culturali misurando l'attività inversiva di questi liquidi appena tolti a la cultura e dopo alcuni giorni di dimora asettica. I seguenti numeri dànno un'idea dell'entità del fenomeno: Liquido di una cultura di *Mucor Mucedo* a 18,5° C., di 12 giorni. invertasi in 10 cmc. di liquido culturale : 230,3; dopo due giorni di dimora asettica a 18,5° : 248. Liquido di una cultura di 20 giorni: invertasi: 128; dopo due giorni a 18,5° : 204, e così via.

In determinate condizioni manca un tale aumento lento dell' invertasi estracellulare, ciò che è dovuto a tre cause: 1) l' invertasi secreta, special-

mente se il saccarosio presente è poco, si sciupa lentamente [1], ciò che maschera la secrezione di proinvertasi; 2) in certi casi manca realmente la secrezione di proinvertasi; 3) a l'azione inversiva subentra, in determinate condizioni, l'attività sintetica, ciò che maschera la secrezione e l'attivazione dello zimogeno e dell'enzima attivo.

Inoltre ho potuto stabilire, come vedremo nella Nota seguente, che accanto al proenzima le cellule secernono realmente anche dell'enzima attivo.

Debbo qui rinunciare ad ulteriori particolari; ricorderò solo che la trasformazione della proinvertasi secreta in invertasi si compie in modo analogo, ceteris paribus, a la trasformazione dello zimogeno intracellulare, solo che gli optimum di acidità sono più elevati.

*
* *

Dopo la scoperta di Croft Hill [2], secondo cui in soluzione al 40 % di glucosio per azione della maltasi di lievito si forma a lungo andare, a 25° C., un disaccaride, che secondo Emmerling [3] è isomaltosio, sono rapidamente aumentati i dati su le sintesi enzimatiche. Emmerling [4] trova che la maltasi di lievito ricompone l'amigdalina da glucosio e isonitrilglucoside dell'acido amigdalico, Kastle e Loevenhart [5] che le lipasi animali sintetizzano gli eteri grassi, Croft Hill [6] che la diastasi « Taka » forma maltosio da glucosio, Fischer ed Armstrong [7] che la lattasi riunisce glucosio e galattosio a formare lattosio, Cremer [8] che il succo spremuto di lievito condensa il fruttosio in glicogeno. Per molti enzimi però non riesciva la dimostrazione della sintesi, ed uno di questi pareva fosse l'invertasi, finchè Visser [9] ha provato, che anche l'invertasi esegue una lenta sintesi a 25° C., tale che dopo mesi non è ancora formato l'1 % di disaccaride, per altro in soluzioni piuttosto diluite. Con simile lentezza l'emulsina sintetizzava la salicina nelle esperienze di Visser. Questo autore ha anche sviluppato una teoria, con la quale si prevede la quantità di prodotti d'idrolisi che può

(1) Pantanelli, loc. cit., I, (1905), pag. 122; qui dati anteriori di Fernbach.

(2) Journ. of the chem. Society, vol. LXXXIII, pag. 534 (1898).

(3) Ber. chem. Ges., Bd. XXXIV. pag. 600 (1901); Croft Hill, ibidem, pagg. 1380 1384; Enunerling, ibidem, pagg. 2206-2207.

(4) Ber. chem. Ges., Bd. XXXIV, pag. 3810 (1901).

(5) Kastle e Loevenhart, Amer. chem. Journal, vol. XXIV, pag. 491 (1900). Ulteriore letteratura in Czapek, loc. cit., pagg. 79, 129. Cfr. Bodenstein, Bullettino del Congr. chim. intern. in Roma (1906).

(6) Proceed. chem. Society, vol. XVII, pag. 184 (1901).

(7) Fischer und Armstrong, Ber. chem. Ges., XXXV, pagg. 3144-3153 (1902); Armstrong, Chemical News., vol. LXXXVI, pagg. 166-167 (1902).

(8) Ber. chem. Ges., Bd. XXXII, pag. 2062 (1899).

(9) *Reaktionsgeschwindigkeit und chemisches Gleichgewicht* ecc., Zeitschr. f. physik. Chem., Bd. LII, pagg. 257-309 (1905).

essere risintetizzata a 25° C. in determinate condizioni, Non è questo il luogo per discutere la teoria di Visser, la quale, pur essendo più perfezionata di quelle di Henri e di Herzog, non tiene però conto di alcuni fattori importanti, quali la natura colloidale dell'enzima, le variazioni di concentrazione del solvente, le variazioni degli ioni di H^+ per la variazione dello zucchero invertito ecc.

In realtà la sintesi di un disaccaride non o poco riduttore da glucosio e fruttosio per opera dell' invertasi di *Mucor* è assai più cospicua di quanto indica Visser per l' invertasi di lievito. L'azione revertente dell'enzima di *Mucor* si fa sentire, quando lo zucchero invertito raggiunge press'a poco la concentrazione del saccarosio non ancora invertito, è assai più forte a temperatura elevata che a temperatura ordinaria, dove predomina, ceteris paribus, l'idrolisi. Ciò può produrre notevoli errori nella determinazione dell' invertina secondo il metodo di O' Sullivan, Fernbach e me, ed è appunto per questa via che io ho sco perto la reversione. Del resto anche in presenza di ioni H^+ (acidi diluiti, anche a freddo) senza l'enzima, si ha una reversione in soluzioni concentrate di zucchero invertito, come trovò E. Fischer [1]; si formano allora accanto ad isomaltosio delle « destrine di reversione » sostanze precipitabili con l'alcool, non riducenti.

La reversibilità dell' invertasi di *Mucor* non è un fenomeno costante, anche date le dette condizioni, in qualsiasi modo e momento di cultura, più tosto anch'essa, come l'emissione di proinvertasi, dipende da condizioni esterne ed interne ben determinate, come vedremo occupandoci della secrezione.

Mentre rimando ad un apposito lavoro per le particolarità su la reversibilità dell' invertasi in ambiente acido, debbo però già qui menzionare un altro fatto importante.

Se dopo una prova d' inversione ad una temperatura qualsiasi, si neutralizza l'acidità necessaria al buon funzionamento dell' invertina con un forte eccesso di alcali, l'enzima viene distrutto e la sua attività si arresta entro pochi minuti fino ad alcune ore, come mostrarono O' Sullivan e Tompson [2]. Ben altro succede se ci si limita a rendere il saggio *appena alcalino*. In questo caso l' invertasi non è subito annientata, anzi a bassa temperatura conserva la sua attività per varî giorni, per altro con una continua diminuzione.

Ciò che è più meraviglioso, è che essa ora non idrolizza più, bensì *sintetizza*, anzi la reversione in ambiente alcalino è più vivace, ceteris paribus, che in ambiente debolmente acido. È facile convincersi di questo fatto: se si lascia riposare un saggio d' idrolisi debolmente alcalificato, si trova entro

[1] Fischer, Ber. chem. Ges., XXIII, pag. 3687 (1890); XXVIII, pag. 3024 (1895); Wohl, XXIII, pag. 2084 (1890).

[2] O' Sullivan e Tompson, *Invertase*, Journ. chem. Soc., LVII, pag. 852 (1890).

7-8 ore una notevole diminuzione dello zucchero riduttore [1]. Siccome però l'enzima perde realmente a poco a poco la sua attività anche in ambiente alcalino, così la reversione diminuisce lentamente per cessare entro alcuni giorni.

Riporto alcuni dati per mostrare l'ampiezza di questi fenomeni. Una soluzione al 40 % di saccarosio fu idrolizzata per 30′ a bagno-maria con 2 cmc. da 0,1 norm. HCl, poi si neutralizzò esattamente, rispetto a methyl-orange, con NaOH 0,1 norm., si raffreddò rapidamente e ad ogni 10 cmc. del liquido furono aggiunti 10 cmc. del liquido invertasico.

Reversione a 55° C., in un'ora:

	Acidità	Zucchero riduttore			Zucchero revertito
	cmc. $^1/_{10}$ norm.	iniziale	finale	revertito	in % dell'hexosio iniziale
Esp. I.	5,6	3776,1	3212	— 464,1	12,29 %
Esp. II.	3,8	3790	3080	— 710	18,74 »

Come si vede, si tratta di sintesi ben più vigorose di quelle osservate da Visser, ciò che è dovuto, come si vedrà meglio nel lavoro esteso, a tre cause: 1) la reversione in ambiente acido diventa considerevole solo a temperatura elevata; 2) la concentrazione totale dello zucchero (20 %) era nelle riferite esperienze superiore a quella adottata da Visser; 3) l'invertasi di *Mucor* tende a revertire assai più dell'invertasi di lievito.

Inoltre la reversione varia inversamente a l'acidità del mezzo e in ambiente alcalino cresce, entro certi limiti, proporzionalmente a la concentrazione degli ioni OH^-. Alcuni esempî: il liquido invertito fu preparato come sopra, poi fu aggiunta l'invertasi, indi alcalificato il miscuglio, che soggiornava asetticamente a 18,5°.

Reversione a 18,5° in ambiente alcalino:

	Alcalinità	Zucchero riduttore			Zucchero revertito
	cmc. $^1/_{10}$ norm.	iniziale	dopo 24 ore	revertito	% dell'hexosio iniziale
Esp. I.	13,0	3742,8	3440	— 302,8	8,091 %
			Dopo 48 ore		
Esp. II.	14,4	3776,1	3408	— 368,1	9,738 »
Esp. III.	16,2	3790	2880	— 910	24,01 »

[1] Lo studio di questi fenomeni col metodo polarimetrico è assai più inesatto che col metodo di determinazione gravimetrica. Infatti, oltre a gli errori prodotti da la presenza di sostanze estranee in esperienze come le mie, O' Sullivan e Tompson (loc. cit. pag. 865) hanno trovato, che il destrosio formantesi dal saccarosio è nei primi momenti birotante, per cui l'osservazione polarimetrica non indica esattamente la quantità di hexosio che si forma. Pur troppo a tutti gli autori, Henri, Herzog, Visser ecc., è sfuggito questo fatto.

Infine un esempio di inversione a 56° in ambiente acido (0,2 cmc. $^1/_{10}$ norm.), seguita, nello stesso saggio, da inversione a 18,5° in ambiente debolmente alcalino (0,2 cmc. $^1/_{10}$ norm.): zucchero invertito a 56° in un'ora in presenza di acido: 345; zucchero revertito in 24 ore a 18,5° in presenza di alcali: 260.

È da considerarsi, che mentre in ambiente acido l'enzima ha bisogno di una concentrazione dei prodotti d'idrolisi pari a quella dell'idrolito per compiere la sintesi, in ambiente alcalino reverte anche se la concentrazione del saccarosio è molto superiore a quella dello zucchero invertito.

Fisiologicamente, la facile reversibilità anche a bassa temperatura in ambiente alcalino ha un'importanza altissima, perchè il citoplasma è debolmente alcalino [1], mentre il succo cellulare ha reazione acida. A la comune temperatura si compiranno quindi le sintesi più facilmente nel citoplasma, e difatti le cellule giovani, dove più vivace è il lavorìo formativo, ne sono di regola totalmente ripiene. Nel succo dei vacuoli invece predomineranno a la temperatura ordinaria le scissioni. Infatti le cellule adulte, le cellule in autodigestione, sogliono avere grandi vacuoli circondati da un sottile straterello di protoplasma.

Patologia vegetale. — *Intorno alla peronospora della canapa.* Nota del dott. Vittorio Peglion, presentata dal Socio G. Ciamician.

La peronospora della canapa (*Peronospora cannabina*), è stata osservata per la prima volta in Isvizzera presso Steffisburgh e sommariamente descritta dall'Otth. Nel 1898, segnalandone la presenza nei canepai del Ferrarese, il chiaro prof. C. Massalongo dava un'accurata illustrazione dei caratteri morfologici del micelio e dei conidiofori del parassita e descriveva le deformazioni specifiche subite dalle foglioline di canapa peronosporate. I dati raccolti dal prof. Massalongo e dal prof. Aducco erano tali da far ritenere il parassita della canapa pochissimo diffuso ed affatto benigno. Nel materiale di studio raccolto in quelle circostanze non furono rinvenute altre fruttificazioni all'infuori delle conidiali, onde rimaneva ipotetico il modo di svernare del parassita.

Difatti, mentre non è punto raro rinvenire dal maggio in poi delle foglie di canapa contorte e deformate dalla peronospora in questione e di osservare le copiose fruttificazioni conidiche che ne ricoprono di un denso strato bruno-violaceo la pagina inferiore, le più accurate indagini praticate su queste foglie, anche serbate a lungo in camera umida, non rivelano formazioni neppure incipienti di fruttificazioni più evolute, di oospore. Le ripetute osservazioni compiute durante un quinquennio nei canepai del Ferrarese, confermano a tale

[1] Pfeffer, *Pflanzenphysiologie*, II Aufl., Bd. I, pag. 490 (1897).

riguardo le conclusioni cui era giunto il Massalongo, e nessuna lagnanza speciale dei pratici agricoltori era stata mossa verso questo parassita della canapa.

Tuttavia seguendo lo sviluppo dei canepai durante le prime fasi vegetative, non è difficile accorgersi che la peronospora della canapa può divenire un' entità parassitaria tutt'altro che trascurabile dal punto di vista pratico.

A questa conclusione sono giunto in seguito all' esame microscopico di alcune piantine di canapa, deperenti in seguito al cosidetto *incappucciamento*. Com'è noto, è questa una malattia dovuta al parassitismo del *Tylenchus devastator*: le piante recatemi in esame presentavano una strana associazione biologica, inquantochè nei tessuti ipertrofici, in seno ai quali formicolano le larve e gli adulti del nematode predetto, si notava eziandio un fitto reticolato di ife a decorso intercellulare, munite di austori che si addensavano nel midollo e terminavano in conidiofori sporgenti lungo il canale midollare. I caratteri del fungo corrispondono a quelli della *Peronospora cannabina*, come ho potuto accertarmi anche col paragone con esemplari originali.

Lo sviluppo dei conidiofori stessi lungo il canale midollare è così rigoglioso da conferire alla superficie di esso la colorazione caratteristica violacea tendente al brunastro. In alcuni esemplari il lume del canale è completamente ostruito.

Negli spazi intercellulari, esistenti tra gli elementi ipertrofici del midollo e dello pseudo-libro interno si formano le oospore o spore ibernanti del parassita: esse si rinvengono numerosissime se si assoggettino ad esame frammenti di stelo nel quale sia cessata la formazione di conidiofori. Basta all'uopo raschiare i tessuti predetti e dissociare in soluzione debole di potassa il materiale così asportato. Le oospore sono irregolarmente sferiche: la parete oogoniale è irregolarmente ispessita ed addossata all'oospora; le dimensioni di questi organi variano da 50 a 55 μ.

La scoperta delle oospore permette di completare il ciclo biologico della *Peronospora cannabina*, senza ricorrere all' ipotesi che la conservazione di questa specie sia affidata ai conidi o al micelio ibernante.

Le osservazioni sommarie compiute sinora e che mi propongo di proseguire, permettono inoltre di chiarire alcuni fatti che si verificano in pratica e sono tuttora misteriosi: come ho detto sino dall' inizio, le piante di canapa oggetto di questo studio erano deformate da *Tylenchus*, *incappucciate* per usare l' espressione corrente. Ora i pratici ben sanno che l'andamento della vegetazione delle piante incappucciate subisce delle variazioni notevoli: « non è raro il caso che le piantine malate sorrette da un complesso di condizioni favorevoli continuino a vivere e crescano, per poi ad un certo punto superare il male e svilupparsi quasi come non fossero mai state prima ammalate. Era questa una delle ragioni per cui prima poco spaventava l' incappuccia-

mento. Ma in quest'anno (1898) le piantine o hanno continuato a crescere stentatamente, deformi, o come è avvenuto per il maggior numero, non sono riescite a sopraffare il male e hanno dovuto soccombere in un tempo più o meno breve ». Così i prof. Aducco e Neppi nel loro studio sull'incappucciamento della canapa. Anche in altre riprese essi esprimono il dubbio se col nome volgare di incappucciamento non si indichino fenomeni di natura diversa.

Ho avuto la prova che realmente questo dubbio è giustificato dall'esame degli appezzamenti di canapa da cui provenivano le piante infette; raccolti numerosissimi esemplari di piantine incappucciate, alcune erano irrimediabilmente compromesse e mostravano concomitante ai *Tylenchus* la peronospora della canapa. Gli altri più o meno gravemente deformati dai nematodi, potevano considerarsi in condizioni non disperate e suscettibili di riaversi se corroborati da adeguate somministrazioni di concime a pronta azione (nitrato sodico). Le esperienze iniziate varranno o meno a confermare l'esattezza di queste asserzioni.

Ma quest'eventuale associazione biologica di un nematode con una peronospora apre l'adito a nuove ulteriori investigazioni circa le condizioni di sviluppo di quest'ultimo parassita. Le piante incappucciate subiscono profonde deviazioni morfo-biologiche: la differenziazione dei tessuti è intralciata, le neoformazioni sono costituite da tessuti iperplastici e da ipertrofie degli elementi cellulari.

Tenendo conto del comportamento di altre peronosporacee (*Cystopus candidus*, *Phythopht. omnivora*, etc.) le quali sono capaci di infettare le piante ospiti solo durante le prime fasi vegetative, non sembrebbe soverchiamente arrischiata l'ipotesi di ritenere la *P. cannabina*, dotata di attitudine parassitaria analogamente subordinata ad una data fase di sviluppo della canapa. In tal supposizione l'anzidetta associazione eventuale potrebbe concepirsi come un caso caratteristico di metabiosi, inquantochè sotto l'influenza del nematode i tessuti dell'ospite conserverebbero a lungo lo stato di recettività alla peronospora che cessa in breve tempo nelle piantine normali.

Ho iniziato delle prove di infezione delle piantine di canapa in germinazione, derivandomi da queste sommarie resultanze non pochi dubbi circa la probabile vera causa cui attribuire un fatto lamentato quasi ovunque sia intensivamente coltivata la canapa e contro cui la pratica è oggi impotente: ed è la perdita di molte piante che si verifica dalla nascita del canepaio alla prima roncatura. I vecchi coltivatori ricordano gli splendidi canepai che si ottenevano allorquando si praticavano semine in ragione di 20 chili di seme per Ha. Oggi, colle migliorate condizioni colturali, col razionale impiego di macchine seminatrici e concimi, pur raddoppiando il quantitativo di seme (40-50 chili per Ha), non sempre si riesce ad ottenere i canepai così fitti come si ritiene necessario per conciliare qualità

e quantità di prodotto. Tale è specificatamente la condizione di fatto del podere di Fossanova ove ho riscontrato le canapi peronosporate; ora, prescindendo pure dalle numerose fallanze di piante che possono dipendere da condizioni d'ambiente o da parassiti animali, non è chi non veda l'importanza di accertare se a questa perdita di piantine cui consegue il dannoso diradamento dei canepai, partecipi ed in quale misura anche la *P. cannabina*, nel qual caso si potrebbe provare ad ovviarvi, traendo profitto delle nozioni che si possiedono intorno alla difesa delle piante coltivate in genere dalle infezioni peronosporiche.

Mi riserbo di riferire a suo tempo intorno ai resultati delle esperienze ora iniziate intorno alla propagazione del parassita ed ai mezzi di difesa.

Il Presidente Blaserna, all'aprirsi della seduta, annuncia che assistono all'adunanza S. E. Don Gonzalo Esteva, Ministro degli Stati Uniti del Messico, e il prof. Achille Louchaire dell' Istituto di Francia e professore all' Università di Parigi. Ringrazia S. E. il Ministro Esteva di aver voluto assistere all'odierna seduta, in cui l'Accademia, per invito della Società di Geografia e di Statistica di Mexico, commemora il quarto centenario della morte di Cristoforo Colombo.

Il Socio Dalla Vedova legge una Commemorazione [1] di Cristoforo Colombo, occupandosi in particolar modo dei lavori di critica pubblicati di recente sul grande Navigatore. Egli pone in rilievo la figura di Cristoforo Colombo, mostrando quale sia il vero carattere de' suoi meriti, e quanta parte abbia avuto l' Italia nelle ulteriori scoperte di terre nuove.

Il Socio Mariotti aggiunge alcune parole per ricordare l'esistenza, in Genova, di due lettere di Cristoforo Colombo, le quali provano il di lui disinteresse e il desiderio che sempre egli ebbe di beneficare le classi disagiate.

[1] Questa Commemorazione sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 20 maggio 1906.

Bassani F. e Galdieri A. — Notizie sull'attuale eruzione del Vesuvio. Aprile 1906). Napoli, 1906. 8°.

Borthen L. — Die Blindenverhältnisse bei der Lepra. Klinische Studien. (Kön. Norweg. Frederiks Universität). Christiania, 1902. 8°.

Bureau central de l'Association géodésique internationale. Rapport sur les travaux du Bureau Central de l'Association géodésique internationale en 1905 et Programme des travaux pour l'exercice de 1906. Leyde, 1906. 4°.

Catalogue of 1772 Stars, chiefly comprised within the zone 85°-90° N. P. D. for the epoch 1900, deduced from observations made at the Radcliffe Observatory, Oxford, during years 1894-1903. Oxford, 1906. 8°.

Commission Royale pour la mesure d'un Arc de Méridien au Spitzberg. Missions Scientifiques ..... entreprises en 1899-1902. Mission Suédoise. Tomes I, II. Stockholm, 1903-06. 4°.

Guerrini G. — Sulla funzione dei muscoli degenerati. II^a Comunicazione (Tempo di eccitazione latente). Dallo *Sperimentale* (Archivio di Biologia normale e patologica. Anno LIX, fasc. VI). Napoli, 1905. 8°.

Guerrini G. — Ueber die Gleichgewichte zwischen Eiweisskörpern und Elektrolyten. II. Mitteilung. Ueber die Fällung des Eieralbumins durch Natriumsulfat. (Hoppe-Syler's Zeitschrift für Physiologische Chemie. Separat-Abdruch aus Band XLVIII. Heft 2. u. 3). Strassburg, 1906. 8°.

Guerrini G. — Sur la fonction des muscles dégénérés. II Communication. Temps d'excitation latente. (Arch. Italiennes de Biologie. t. XLV. fasc. 1). Turin, 1906. 8°.

Internationale Association der Akademien. Verbericht für die am 30. Mai 1906 zu Wien beginnende Zusammentretung des Ausschusses. Wien, 1906. 4°.

Klein C. — Studien über Meteoriten, vorgenommen auf Grund des Materials der Sammlung der Universität Berlin. (Abhandl. der K. Preuss. Akad. der Wissensch. vom Jahre 1906). Berlin, 1906. 4°.

Leonardi G. — Generi e specie di Diaspiti. Saggio di sistematica delle *Leucaspides*. (Annali della R. Scuola Sup. d'Agricoltura di Portici. Vol. VI). Portici, 1906. 8°.

Leonardi G. — Due nuove specie di Cocciniglie. (Laboratorio di Entomologia Agraria). Portici, 1906. 8°.

Pascal E. — Sul reciproco del teorema fondamentale relativo alle derivazioni covarianti. (Rend. del R. Istit. Lomb. di sc. e lett. Serie II, vol. XXXIX). Milano, 1906. 8°.

Rajna M. — Tavole per calcolare il nascere e tramontare della Luna a Bologna e per ridurre il nascere e tramontare del Sole e della Luna da Bologna a un altro luogo qualunque d'Italia. Bologna, 1905. 4°.

Rajna M. — Osservazioni meteorologiche dall'annata 1904 eseguite e calcolate dagli astronomi aggiunti R. Pirazzoli e A. Masini. Memoria presentata alla R. Acc. delle Scienze dell'Ist. di Bologna (Osserv. della R. Univ. di Bologna). Bologna, 1905. 4°.

Sorauer S. P. — Die mechanischen Wirkungen. (Sonderabd. aus den Bericht. der Deutsch. Botanichen Gesellschaft. B. XXIV, H. 1). Berlin, 1906. 8°.

Université de Louvain. 1425-1834-1905. Louvain, 1905. 8°.

Veronese G. — Il Vero nella Matematica.

Discorso inaugurale dell'anno scolastico 1905-1906. R. Univ. di Padova. Roma. 1906. 8°.

Zeitschrift für Pflanzenkrankheiten. Organ für die Gesamtinteressen des Pflanzenschutzes. XIV, XV. Stuttgart, 1904-1905. 8°.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE
DELLA UNIVERSITÀ DI KÖNIGSBERG.

ASSMANN H. — Versuche über den Wert des Aethylalkohols, insbesondere desalkalischen Alkohols als eines Desinfektionsmittels bei bakteriologischen Sektionen. Königsberg, 1905. 8°.

BARTEL M. — Das Adenom der Nase. Königsberg, 1905. 8°.

BERKHAN G. — Zur projektivischen Behandlung der Dreiecksgeometrie. Leipzig. 1905. 8°.

BIERSACK A. — Einwirkung von Silbernitrat auf halogensubstituierte Säuren und Ester in alkoholischer Lösung. Königsberg, 1904. 8°.

BOEHM C. — Klinische Beiträge zur Kenntnis der Pankreasnekrose. Tübingen, 1904. 8°.

COHN W. — Ueber die isolierte Ruptur der Symphysis ossium pubis. Tübingen, 1885. 8°.

DANGEL M. — Ueber die Unterbindung der Vena jugularis interna (Ein Fall von doppelseitiger Unterbindung). Königsberg, 1905. 8°.

DORNER G. — Experimentelle Beiträge zur Kenntnis der Hämolysine. (In Sonderheit: Ueber Erzeugung hämolytischer Sera mittels kleiner Dosen Erythrocyten und die Wirkungen von Aderlässen auf derart vorbehandelte Kaninchen). Königsberg, 1905. 8°.

FRIEDLAENDER A. — Persistenz des Wolff'schen Ganges beim Leguan. Mit 1 Tafel und 1 Textabbildung. Königsberg, 1905. 8°.

FRIEDRICH H. — Zur Kenntnis der Mandelsäure. Königsberg, 1904. 8°.

FROMM K. — Verkrümmung der Tibia durch Narbenzug. Königsberg, 1905. 8°.

GLAGE G. — F. E. Neumann's Methode zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit gut leitender Körper in Stab- und Ringform und ihre Durchführung an Eisen, Stahl, Kupfer, Silber, Blei, Zinn, Zink, Messing, Neusilber. Königsberg, 1905. 8°.

GOLDBERG J. — Ein Fall von Balkenmangel im menschlichen Grosshirn. Königsberg, 1905. 8°.

GRABOWSKY W. — Beiträge zur Feststellung der wahren Oberflächenspannung wässeriger Chloridlösungen (zwischen 10 und 30° C.) und zu ihrer physikalisch-chemischen Verwertung. Gräfenhainichen, 1904. 8°.

GRUNER O. — Beitrag zur Kenntnis der myasthenischen Paralyse. Vier Fälle (mit einem Sektionsbefunde). Königsberg, 1905. 8°.

HASSENSTEIN W. — Neue Bearbeitung von William Herschels Beobachtungen der inneren Saturnmonde (1789). Königsberg, 1905. 4°.

HEYMANN G. — Neue Distomen aus Cheloniern. Mit 1 Tafel und 2 Abbildungen im Text. Jena, 1905. 8°.

HOFFMANN C. — Ein Fall von totaler angeborener und bleibender Atrichie. Königsberg, 1905. 8°.

HURWITZ S. — Beitrag zur Lehre von den hämorrhagischen Erosionen des Magens. Königsberg, 1904. 8°.

KADGIEN A. — Untersuchungen über den Kalkgehalt ostpreussischer Bodenarten und seine Beziehungen zu einigen wichtigen Kulturpflanzen (unter spezieller Berücksichtigung litauischer und einiger masurischen Kreise. Königsberg, 1904. 8°.

Karlin M. M. — Die geschichtliche Entwicklung unserer Kenntnisse vom Baue des Gehörorganes. Königsberg, s. a. 8°.

Klein Wal. — Neue Distomen aus Rana hexadactyla. Mit 1 Tafel. Jena, 1905. 8°.

Klein Wil. — Die Operationsmethoden der Stirnhöhlenentzündungen, nebst Mitteilung von 13 nach Killian operierten Fällen. Königsberg, 1905. 8°.

Kob B. — Ueber die Behandlung der ischämischen Lähmungen des Vorderarms durch Resektion der Vorderarmknochen. Königsberg, 1905. 8°.

Kurz E. — Die Dünengestalten der Kurischen Nehrung. Königsberg, 1904. 8°.

Lack E. — Beitrag zur Lehre von der Hautdiphtherie. Königsberg, 1905. 8°.

Lohauss C. — Beiträge zur Anatomie der Laubblätter einiger Festucaceen-Gruppen. Königsberg, 1905. 4°.

Meyerowitz F. — Ueber Skoliose bei Halsrippen. Tübingen, 1905. 8°.

Moses H. — Beitrag zum Wesen der kongenital-syphilitischen « Tibia en lame de sabre ». Tübingen, 1904. 8°.

Neumann R. — Ueber ausgedehnte Mesenterialabreissungen bei Kontusion des Abdomens. Tübingen, 1904. 8°.

Nitz K. — Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Königsberg. 1905. 8°.

Pachnio F. — Ueber Dauerresultate der Colopexie bei hochgradigem Rectumprolaps. Tübingen, 1905. 8°.

Plenske G. — Ueber Phtalylhydroxylamin und Camphorylhydroxylamin. Königsberg, 1904. 8°.

Puppel R. — Die Tuberkulose der Parotis. Königsberg, 1905. 8°.

Reuter H. — Beiträge zur Praxis der Molekulargewichtsbestimmungen. Königsberg, 1905. 8°.

Richter G. — Ein Beitrag zur Kenntnis der Lungenrupturen. Tübingen, 1904. 8°.

Robsmann E. — Ueber retraperitoneale Cysten der Bauchhöhle. Königsberg, 1904. 8°.

Salecker P. — Ueber die Einwirkung einiger chemischer Einflüsse auf die Verdaulickeit des Proteins. Königsberg. 1904. 8°.

Scheffler K. — Beiträge zur Kenntnis der Alkylarsonsäuren. Königsberg, 1905. 8°.

Schimmelfennig S. — Ueber Blutgeschwülste in den oberen Luftwegen. Königsberg, 1904. 8°.

Schimschelewitz B. — Ueber die Einwirkung von Jod auf Kaliumchlorat, Natriumchlorat und Baryumchlorat. Königsberg, 1905. 8°.

Schlesiger H. — Zur Statistik der Eklampsie. Königsberg, 1905. 8°.

Schubert E. — Ein Beitrag zur Symptomatologie der Uterusmyome. Königsberg, 1905. 8°.

Schulz A. — Untersuchungen über die Wirkung von Eisenvitriol und schwefelsäurem Ammoniak sowie von Mischungen beider Salze als Unkrautvertilgungsmittel. Königsberg, 1904. 8°.

Schulz E. — Ein neuer Fall von Akromegalie mit Sektionsbefund. Königsberg, 1905. 8°.

Segal N. — Ueber Cataracta perinuclearis congenita. Königsberg, 1905. 8°.

Stires J. — Ueber die fractura radii typica. Ein Beitrag zur Therapie. Königsberg, s. a. 8°.

Tiesler G. — Tuberkulose und Schwangerschaft. Königsberg, 1905. 8°.

Tietz P. — Zur Qualitätsermittelung von Weizen, Gerste und Hafer. Königsberg, 1905. 8°.

Titius A. — Ueber eine eigenartige Form der jugendlichen Paralyse. Königsberg, 1905. 8°.

Türkheimer A. — Beitrag zur genaueren Kenntnis der Diphenylenglycolsäure und einiger ihrer Abkömmlinge. Die Tetraphenylenbernsteinsäure. Königsberg, 1904. 8°.

Urinsohn U. — Ueber die Einwirkung von Brom auf Paraoxybenzoesäure. Königsberg, 1905. 8°.

Winter C. — Ein Beitrag zur Kenntnis der sacrococcygealen Tumoren. Königsberg, 1905. 8°.

Witt W. — Beitrag zur Behandlung der Coxitis in vorgeschrittenen Fällen. Königsberg, 1904. 8°.

Wobbe P. — Die Behandlung des Brustkrebses mit besonderer Berücksichtigung ihrer geschichtlichen Entwickelung. Königsberg, 1905. 8°.

Wolosewicz J. E. (v.) — Die quantitative Bestimmung des Stickstoffs der Eiweisstoffe und deren Trennung von anderen stickstoffhaltigen Verbindungen der Nahrungs- und Futtermittel. Königsberg, 1905. 8°.

V. C.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XV. (1892-1906). Fasc. 10°. 1° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VI. Fasc. 1°-4°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Fasc. 1°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 maggio 1906.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Volterra. Nuovi studî sulle distorsioni dei solidi elastici . . . . . Pag. 519
Körner. Nuove ricerche intorno alle sostanze dette aromatiche a 6 atomi di carbonio . » 525
Id. e *Contardi.* Intorno alla sesta nitrobibromobenzina . . . . . » 526
Battelli. Resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza . . . . . » 529
Almansi. Sul principio dei lavori virtuali in rapporto all'attrito (pres. dal Socio *Volterra*). » 539
Bortolotti. Sopra una ricerca di limite (pres. dal Corrisp. *Cesàro*). . . . . » 545
Levi. Ricerche sulle funzioni derivate (pres. dal Socio *Segre*) . . . . . » 551
Zambonini. Appunti sulla scheelite di Traversella (pres. dal Socio *Strüver*) . . . . . » 558
Piola e *Tieri.* Variazioni magnetiche prodotte nel ferro colla torsione (pres. dal Corrisp. *Sella*). . . . . » 566
Vanzetti. Decomposizione elettrolitica di acidi organici bicarbossilici. Acido adipico (pres. dal Socio *Koerner*) . . . . . » 574
Bargellini. Azione del cloroformio e idrato sodico sui fenoli in soluzione nell'acetone (pres. dal Socio *Cannizzaro*) . . . . . » 579
Pantanelli. Proinvertasi e reversibilità dell'invertasi nei Mucor (pres. dal Socio *Pirotta*) . » 587
Peglion. Intorno alla peronospera della canapa (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . . » 594

Blaserna (Presidente). Informa la Classe che assistono alla seduta S. E. Don *Gonzalo Esteva* e il prof. *Achille Louchaire* . . . . . » 597
Dalla Vedova. Commemorazione di Cristoforo Colombo (*) . . . . . » »
Mariotti. Aggiunge alcune parole alla precedente Commemorazione . . . . . » »
BULLETTINO BIBLIOGRAFICO . . . . . » 598

(*) Questa Commemorazione sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. *Roma 2 giugno 1906.* **N. 11.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 giugno 1906.

Volume XV.° — Fascicolo 11°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 giugno 1906.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date.* Nota del Socio S. Pincherle.

Nel marzo del 1899 presentavo alla R. Accademia una Nota recante lo stesso titolo di questa, in cui dimostravo per altra via e generalizzavo il seguente teorema dato dall' Hurwitz [1]: « se due funzioni analitiche, uniformi regolari per il punto $x=\infty$, sono rappresentate in un intorno di quel punto rispettivamente da

$$\alpha(x)=\sum\frac{a_n}{x^{n+1}}\,,\quad \varphi(x)=\sum\frac{k_n}{x^{n+1}}\,, \tag{1}$$

« la serie

$$\psi(x)=\sum\left(a_n k_0+na_{n-1}k_1+\binom{n}{2}a_{n-2}k_2+\cdots+a_0k_n\right)\frac{1}{x^{n+1}} \tag{2}$$

« rappresenta una funzione i cui punti singolari sono i punti p_i+q_j, p_i essendo i punti singolari di $\alpha(x)$ e q_j quelli di $\beta(x)$ ». La dimostrazione era data dall' A. per il caso che p_i, q_j fossero poli di prim'ordine; quella da me data si applicava a punti singolari isolati qualunque, ammessa l' uniformità delle funzioni. Ora, nella presente Nota, mi propongo di mostrare:

1° come la proposizione possa valere per il caso di singolarità qualunque, costituite da punti, linee od aree;

[1] Comptes rendus de l'Académie des sciences, 6 février 1899.

2° come una seconda espressione, analoga a (2) per le sue proprietà, ma ben diversa di forma, valga a definire una funzione formata con due funzioni date e le cui singolarità sono legate nello stesso modo con quelle delle date;

3° come, dalle singolarità di una funzione definita da uno sviluppo

$$\sum c_n x_n$$

sia possibile, in molti casi, di dedurre immediatamente il luogo delle singolarità della funzione definita da

$$\sum c_n p_n(x) \tag{3}$$

essendo $p_n(x)$ un sistema determinato di funzioni analitiche.

1. Abbiansi due funzioni analitiche $\varphi(t)$, $\alpha(t)$ aventi singolarità qualsiansi: punti, linee od aree. Se le funzioni sono polidrome, siano fatti fra i luoghi di singolarità tali tagli da introdurre la monodromia: in tale caso, comprenderemo codesti tagli fra i luoghi di singolarità. Sia U l'insieme delle singolarità di $\varphi(t)$, V l'insieme di quelle di $\alpha(t)$; u indichi un punto generico di U, v un punto generico di V. Togliendo dal piano-sfera su cui si rappresenta la variabile t l'insieme di punti indicato con U, rimanga un'area U'; togliendo V, rimanga un'area V'; supporremo U' e V' connesse, e contenenti entrambe il punto $t = \infty$. Veniamo dunque a considerare due rami ad un valore $\varphi(t)$ ed $\alpha(t)$ di funzioni analitiche, regolari in U' e V' rispettivamente, compreso il punto $t = \infty$.

2. Tracciamo nel piano t una linea l chiusa, finita e semplice, che includa tutto l'insieme U: i punti di l appartengano tutti ad U'. Questa linea si può deformare con continuità fra i seguenti estremi: da una parte, un cerchio (R) di centro arbitrario, p. es. $t = 0$, e di raggio R grande a piacere; dall'altra, l'insieme delle linee (l_i) chiuse, semplici, circondanti le varie parti staccate U_i di U, e prossime al contorno di U_i tanto quanto si vuole; così, se U_i consta di un punto isolato, (l_i) sarà un cerchio avente per centro questo punto e raggio arbitrariamente piccolo. Indichiamo con U_l l'area inclusa dalla l, contorno compreso; con U'_l ciò che rimane dal piano t dopo tolta U_l; analogamente $U_{(l_i)}$ è l'insieme delle aree incluse dalle (l_i), contorni compresi, ed $U'_{(l_i)}$ ciò che rimane dopo tolto $U_{(l_i)}$ al piano t. Ad ogni punto u di U_l facciamo corrispondere il punto $u - v$, v essendo un punto generico di V; quando u descrive U_l, $u - v$ descrive un'area congruente: variando v in V, si ha un complesso di aree che indicheremo complessivamente con $(U - V)_l$. Sia infine W_l ciò che rimane dal piano t quando vi si tolga l'area $(U - V)_l$; analoga definizione per $W_{(l_i)}$.

Sia x un punto di W_l; allora il punto $x + v$ ci darà, per ogni v, un punto di U'_l; se infatti così non fosse, $x + v$ appartenendo ad U_l, x apparterrebbe ad $(U - V)_l$.

Se l va restringendosi e tendendo alle (l_i), W_l in corrispondenza andrà dilatandosi; cioè se x appartiene a W_l, esso appartiene ad ogni $W_{l'}$ dove l' è compresa fra l e le l_i, ed *a fortiori* appartiene a $W_{(l_i)}$.

3. Ciò posto, consideriamo l'espressione

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \varphi(t)\, \alpha(t - x)\, dt, \tag{4}$$

x essendo un punto arbitrariamente preso in una delle parti connesse che costituiscono W_l. Per tali determinazioni di x, la linea l non conterrà singolarità nè di $\varphi(t)$, nè di $\alpha(t - x)$ fra i suoi punti; l'espressione (4) rappresenta pertanto un ramo ad un valore di funzione analitica, e variando la linea (l) facendola tendere verso $W_{(l_i)}$, quel ramo di funzione analitica sarà rappresentato in un'area connessa sempre maggiore e tendente ad una delle parti connesse che costituiscono $W_{(l_i)}$. L'espressione della funzione analitica $\lambda(x)$ si può fare coincidere con

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_i \int_{(l_i)} \varphi(t)\, \alpha(t - x)\, dt. \tag{5}$$

Se accade che $W_{(l_i)}$ sia un'area connessa, la (5) rappresenterà in tutta $W_{(l_i)}$ una funzione analitica le cui singolarità o linee di discontinuità saranno esclusivamente nell'area $(U - V)_{(l_i)}$.

In particolare, se tanto l'insieme U delle singolarità di $\varphi(t)$ come quello V delle singolarità di $\alpha(t)$ constano di punti separati u_i e v_j rispettivamente, e le funzioni $\varphi(t)$ ed $\alpha(t)$ sono uniformi, la $\lambda(x)$ sarà uniforme, coi soli punti singolari $u_i - v_j$. Se le $\varphi(t)$ ed $\alpha(t)$ non sono uniformi, ma occorre tracciare dei tagli $u_i \dots u_h$, $v_j \dots v_k$ per stabilire la monodromia di un ramo di ciascuna di queste funzioni, anche $\lambda(x)$ sarà in generale uniforme, e ai tagli ora accennati corrisponderanno tagli $u_i - v_j \dots u_i - v_k$ e $u_i - v_j \dots u_h - v_j$.

4. Poichè tanto U′ che V′ contengono il punto all'infinito del piano-sfera, lo stesso sarà evidentemente di W_l; perciò, per $|x|$ abbastanza grande, la $\lambda(x)$ sarà sviluppabile in serie di potenze intere negative di x, mentre per $|t|$ abbastanza grande, si ha

$$\alpha(t) = \sum \frac{a_n}{t^{n+1}}, \quad \varphi(t) = \sum \frac{k_n}{t^{n+1}};$$

precisamente il primo di questi sviluppi vale per $|t| > r$, dove r è il massimo modulo dei punti v; il secondo per $|t| > r'$, essendo r' il massimo modulo dei punti u. Si prenda come linea l il cerchio (R), facendosi $R > r'$; indi si prenda

$$|x| > R + r.$$

Si avrà:

$$\alpha(t-x) = \sum \frac{a_n}{(t-x)^{n+1}}, \tag{6}$$

ed essendo $|t| > r'$, $|x| > \mathrm{R} + r > r' + r$, sarà $|t-x| > r$. Perciò la serie (6) si può sviluppare per le potenze decrescenti di x, dando lo sviluppo

$$\alpha(t-x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(a_0 t^\nu - \nu a_{\nu-1} t^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} a_{\nu-2} t^{\nu-2} - \cdots + (-1)^\nu a_\nu \right) \frac{1}{x^{\nu+1}}$$

assolutamente ed uniformemente convergente per tutti i punti t del cerchio R e sotto la posta condizione $|x| > \mathrm{R} + r$. Sostituendo in (4) e integrando termine a termine, si ottiene:

$$\lambda(x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_0 k_\nu - \nu a_1 k_{\nu-1} + \cdots + (-1)^\nu a_\nu k_0}{x^{\nu+1}}, \tag{7}$$

e questo sviluppo, valido per l'intorno di $x = \infty$, serve a definire mediante la continuazione analitica in tutta l'area $\mathrm{W}_{(l_0)}$, un ramo ad un valore di funzione analitica, le cui singolarità non possono trovarsi che nei punti di $(\mathrm{U} - \mathrm{V})_{(l_0)}$. Nel caso che le singolarità di $\alpha(t)$ e $\varphi(t)$ siano punti isolati, u_i e v_j rispettivamente, e le funzioni siano uniformi, la $\lambda(x)$ dà, colla continuazione analitica, una funzione pure uniforme e che può avere singolarità solo nei punti $u_i - v_j$: questo risultato contiene quello dell'Hurwitz come caso particolare.

5. Possiamo ora ottenere una formula che lega in modo analogo due funzioni date, in guisa cioè che le singolarità della funzione risultante dipendano colla stessa legge dianzi indicata da quelle delle funzioni componenti, mentre fra i coefficienti di questo nuovo sviluppo e quelli della (7) si presenta una correlazione notevole: quella stessa che ha luogo fra lo sviluppo binomiale per esponente intero positivo e quello per esponente intero negativo. A questo effetto, sia $\alpha(t)$ una funzione definita come precedentemente; sia $\varphi(t)$ una funzione o ramo di funzione analitica data regolare entro una stella U′ di vertice $t = 0$; $\varphi(t)$ ammetterà dunque, nell'intorno di $t = 0$, uno sviluppo

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k'_\nu t^\nu. \tag{8}$$

Indichiamo con U l'insieme dei punti posti al contorno o all'esterno della stella U′. Infine supponiamo che l'insieme V dei punti singolari v di $\alpha(t)$ sia tutto interno ad U′.

Descriviamo una linea l semplice, chiusa, tutta contenuta entro U′, circondante il punto $t = 0$ e racchiudente l'insieme V: sia U'_l l'area chiusa da l, U_l l'insieme dei punti esterni e sul contorno di l.

Per ogni punto u di U_l, costruiamo di ogni punto v di V il corrispondente punto $u - v$; l'insieme di questi punti costituirà un'area $U_l - V$, e tolta questa dal piano della variabile, resterà un'area W_l, in cui, per le ipotesi, è certamente contenuto il punto zero. Sia X_l la parte semplicemente connessa di W_l che contiene il punto zero; quando la linea l si deforma con continuità, avvicinandosi al contorno della stella U', si deformerà corrispondentemente, ampliandosi, anche l'area X_l, in guisa che se l è incluso in l_1, anche X_l fa parte di X_{l_1}. Fissiamo una posizione di l, sia ϱ la minima distanza di l dai punti di V, e descriviamo il cerchio (ϱ) di centro zero e raggio ϱ.

Ciò posto, consideriamo l'espressione

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \varphi(t)\, \alpha(t - x)\, dt. \tag{9}$$

Per la scelta della linea d'integrazione e per essere preso x entro W_l, le singolarità di $\alpha(t - x)$ sono i punti $t = x + v$, che cadono tutti entro U'_l. Al contorno l, $\varphi(t)$ ed $\alpha(t - x)$ sono prive di singolarità, e pertanto $\lambda(x)$ rappresenta entro X_l un ramo ad un valore di funzione analitica, continuabile analiticamente in tutta la stella X di vertice $x = 0$ cui tende X_l quando U'_l tende ad U'. Ma, fatto $|x| < \varrho$, si può sviluppare $\alpha(t - x)$ collo sviluppo di Taylor

$$\alpha(t - x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} x^\nu \alpha^{(\nu)}(t)$$

e questo convergerà uniformemente per tutti i valori di t su l e di x entro (ϱ). Si potrà quindi integrare termine a termine, e verrà così lo sviluppo di $\lambda(x)$ in serie di potenze di x, valido entro (ϱ):

$$\lambda(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^\nu \ , \ g_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2\pi i\, \nu!} \int_{(l)} \varphi(t)\, \alpha^{(\nu)}(t)\, dt. \tag{10}$$

La serie (10) è dedotta dalla (8) mediante un'operazione distributiva, appartenente al gruppo permutabile colla derivazione, nel modo stesso della (2), e la funzione analitica che essa definisce non può avere le sue singolarità fuori dei posti $u - v$. Se, in particolare, l'insieme delle singolarità U consta di un numero finito di aree semplicemente connesse finite, escludenti il punto $t = 0$, e più particolarmente ancora se consta di punti isolati, e se in U' e V', $\varphi(t)$ ed $\alpha(t)$ sono uniformi e $\varphi(\infty) = 0$, la $\lambda(x)$ sarà una funzione uniforme che coincide all'infuori del segno, con quella definita al § 3.

6. La formula che si è annunciata al principio del § 5 per porla in riscontro colla (2), si deduce facilmente dalla (10). Supponiamo che il mas-

simo modulo dei punti v sia inferiore al minimo modulo dei punti u. In tale caso si può descrivere una linea l chiusa, circondante il punto $t=0$ ed i punti v, e tutta posta entro la corona circolare in cui convergono ad un tempo gli sviluppi $\sum k'_\nu t^\nu$ di $\varphi(t)$ in serie di potenze intere positive e $\sum \frac{a_\nu}{t^{\nu+1}}$ di $\alpha(t)$ in serie di potenze intere negative. Il coefficiente g_ν [formula (10)] viene allora dato da

$$g_\nu = a_0 k'_\nu + (\nu+1) a_1 k'_{\nu+1} + \binom{\nu+2}{2} a_2 k'_{\nu+2} + \cdots,$$

e si ottiene in tale guisa la serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(a_0 k'_\nu + (\nu+1) a_1 k'_{\nu+1} + \cdots \right) x^\nu \tag{11}$$

come definizione di una funzione analitica che fa perfetto riscontro a quella definita dalla (7), con cui può anche coincidere come nel caso accennato alla fine del paragrafo precedente, e le cui singolarità non possono trovarsi che nei punti $u - v$.

Non mi sembra fuori di luogo di insistere sul riscontro che passa fra le successioni dei coefficienti degli sviluppi (7) e (11); esse si possono rappresentare simbolicamente con

$$(a+k)^\nu \quad , \quad (a+k)^{-\nu}$$

formate con le successioni date a_ν e k_ν sviluppando secondo la regola binomiale e sostituendo, secondo un'ovvia convenzione, gli indici agli esponenti, e fra simili successioni, in più di un caso, viene fatto di notare un manifesto parallelismo.

7. Consideriamo la funzione $\varphi(t)$, uniforme, regolare nell'intorno di $t=\infty$ e che, per $|t|>r$, ammetta lo sviluppo

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{t^{\nu+1}}. \tag{12}$$

Le singolarità di $\varphi(t)$ siano nei punti isolati $u_1, u_2, \ldots u_p$. Sia poi $\alpha(t, x)$ una funzione analitica delle due variabili t, x, regolare per tutte le coppie di valori delle variabili, ad eccezione di quelle che verificano una o più relazioni analitiche

$$\pi(t, x) = 0. \tag{13}$$

Si circondino i punti singolari u_i di $\varphi(t)$ mediante una linea finita l chiusa e semplice o composta di un numero finito di curve semplici chiuse non includentisi nè intersecantisi; indichiamo con U_l l'area (di uno o più

pezzi) racchiusa da l; sia $\overline{u}$ un punto generico di U_l o del contorno. Ad ogni punto $\overline{u}$, la relazione

$$\pi(\overline{u}, x) = 0 \tag{14}$$

fa corrispondere un sistema di punti x che, quando $\overline{u}$ descrive U_l ed il contorno, descrivono nel piano x un sistema di aree che indicheremo con V_l. Se la linea l si deforma, restringendosi, e tendendo ad un sistema di p cerchi (u_i) di centri u_i e di raggi piccoli a piacere, varieranno in corrispondenza le aree V_l, tendendo ad un sistema di aree V_i; sia X_l ciò che rimane dal piano x togliendovi V_l, X_i ciò che rimane togliendovi V_i; è chiaro che X_l è compreso in X_i, mentre da X_i sono esclusi, in generale con aree piccole a piacere, i punti radici delle equazioni

$$\pi(u_i, x) = 0\,, \quad (i = 1, 2, \ldots p)\,. \tag{15}$$

Consideriamo ora l'integrale, in cui l è percorsa nel senso positivo:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \varphi(t)\, \alpha(t, x)\, dt\,. \tag{16}$$

Per ogni punto x di X_l, non cade alcuna singolarità di $\alpha(t, x)$ sulla linea l nè nel campo U_l da essa racchiuso, poichè se $\overline{u}$ fosse una tale singolarità, x sarebbe radice della (14), cioè apparterrebbe a V_l. Perciò, per x in X_l, l'integrale (16) è uguale a

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{p}\int_{(u_i)} \varphi(t)\, \alpha(t, x)\, dt\,, \tag{17}$$

e se i punti radici delle (15) sono separati, $\lambda(x)$ è una funzione analitica, rappresentata da (16) entro X_l e da (17) entro tutto X_i.

Ciò posto, abbiasi per $\alpha(t, x)$ uno sviluppo in serie di potenze di t

$$\alpha(t, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(x)\, t^\nu\,; \tag{18}$$

le $\alpha_\nu(x)$ sono funzioni analitiche determinate ed il raggio di convergenza dello sviluppo è, in generale, funzione di x: ad un raggio di convergenza superiore ad un numero positivo c corrisponde un campo R_c nel piano x, e per $c' > c$, $R_{c'}$ è contenuto in R_c. Per un dato t, $|t| < c$ e per x in R_c, la serie (18) converge uniformemente [1].

[1] V. la mia Memoria: *Sui sistemi di funzioni analitiche.* Ann. di Mat., S. II, T. XII.

Ora, sia c il massimo modulo dei punti della linea l; si prenda x nel campo Z comune ad R_c e ad X_l; per tali valori di x si ha:

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \varphi(t)\,\alpha(t\,,x)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu(x)\int_{(l)} \varphi(t)\,t^\nu\,dt$$

e quindi

$$\lambda(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu\,\alpha_\nu(x)\,. \tag{19}$$

Entro il campo Z, la funzione $\lambda(x)$ è dunque rappresentata dallo sviluppo (19), convergente uniformemente; se ne conclude che « una serie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu\,\alpha_\nu(x)\,,$$

« dove le k_ν sono i coefficienti nello sviluppo (12) di una funzione uni-
« forme $\varphi(t)$ di cui le u_i sono i punti singolari, definisce una funzione i cui
« punti singolari sono soltanto le radici delle equazioni (15) ». Come caso particolare si ottiene facilmente una notevole proposizione che mi è stata cortesemente comunicata, di recente, per lettera, dal sig. dott. G. Faber di Carlsruhe: che cioè se le $\alpha_\nu(x)$ sono i polinomi di Legendre, i punti singolari della funzione definita da (19) sono soltanto quelli della forma

$$\frac{1}{2}\left(u_i + \frac{1}{u_i}\right).$$

Matematica. — *Sui simboli di Riemann nel Calcolo differenziale assoluto.* Nota del Corrispondente Ernesto Pascal.

Fisica. — *Su alcuni casi, apparentemente paradossali, di trasmissione dell'elettricità attraverso un gas.* Nota del Socio Augusto Righi.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti.* Nota di GIUSEPPE LAURICELLA, presentata dal Socio U. DINI.

La risoluzione del problema di Dirichlet in un campo finito col metodo di Fredholm [1], dipende dalla considerazione di un'equazione funzionale, la quale ammette sempre una soluzione, per il fatto che la corrispondente equazione omogenea non ne ammette alcuna. Similmente l'integrazione delle equazioni dell'isotropia elastica in un campo finito, nel caso di dati spostamenti in superficie, si può far dipendere dalla considerazione di un sistema di equazioni funzionali [2], il quale ammette sempre una soluzione, per il fatto che il corrispondente sistema omogeneo non ne ammette alcuna.

Volendo estendere il metodo di Fredholm alla risoluzione del problema di Dirichlet in un campo infinito, l'equazione funzionale, che per analogia bisogna considerare, è tale invece che la corrispondente equazione omogenea ammette già una soluzione evidente; sicchè l'equazione non omogenea almeno in generale non ne ammette alcuna. La medesima difficoltà si presenta, quando si voglia estendere il metodo, esposto nella mia citata Nota, al caso dei solidi elastici indefiniti.

Qui mi propongo di dimostrare che tanto il metodo di Fredholm per la risoluzione del problema di Dirichlet, quanto quello da me dato per l'integrazione delle equazioni della isotropia elastica, convenientemente adoperati, servono ancora nel caso dei campi infiniti.

In ciò che segue, indicherò con i simboli $(F)_1$, $(F)_2$ rispettivamente la citata Nota del sig. Fredholm e la sua Memoria degli Acta mathematica (t. 27): *Sur une classe d'équations fonctionnelles*; col simbolo (L) la mia citata Nota.

ART. I. — *Problema di Dirichlet in un campo infinito.*

1. Sia C una curva chiusa, la quale goda delle seguenti proprietà:

1° ammette la tangente determinata in ogni punto, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2° esiste una lunghezza D tale che, preso un punto s qualsiasi di C e considerate le due parallele alla normale in s e distanti da essa del seg-

[1] *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*, Oefversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900, n. 1, Stockholm.

[2] Vedi la mia Nota: *Sull'integrazione delle equazioni dell'equi...*, Rendic. della R. Acc. dei Lincei, aprile 1906.

mento D, la posizione C_D di C compresa tra queste parallele sia incontrata in un punto al più da qualunque altra parallela alla detta normale:

3° esiste un numero finito positivo a tale che, indicando con ϑ l'angolo che la normale n in s fa con la normale n_0 in un altro punto qualsiasi s_0 di C e indicando con r_0 la distanza ss_0, si abbia:

$$\vartheta < a r_0 .$$

Queste condizioni ci autorizzano a ritenere validi per la linea C i noti teoremi sugli *strati* e *doppi strati lineari*.

2. Sia $\psi(s)$ una funzione finita e continua dei punti di C, data ad arbitrio. Si consideri l'equazione funzionale:

$$\psi(s_0) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\varphi(s)\, ds , \tag{1}$$

con $\varphi(s)$ funzione incognita. Questa equazione è tale che la corrispondente equazione omogenea:

$$0 = \varphi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\varphi_1(s)\, ds \tag{1'}$$

ammette la soluzione evidente $\varphi_1(s) = 1$; di modo che il *determinante* D [1] dell'equazione (1) è nullo [2]; e quindi l'equazione (1) in generale non ammette soluzione alcuna [3].

Dimostriamo anzitutto che l'equazione (1)′ non ammette alcuna altra soluzione linearmente indipendente da quella già notata; ossia che *qualunque funzione* $\varphi_1(s)$ *finita e continua, la quale soddisfa alla* (1)′, *deve necessariamente essere costante.*

Infatti indichiamo con r il segmento che congiunge un punto (x, y) qualsiasi del piano con un punto variabile $s \equiv (\xi, \eta)$ di C; e consideriamo il *doppio strato lineare*:

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r}{dn}\varphi_1(s)\, ds .$$

Chiamando $p' \equiv (x, y)$ un punto del campo infinito σ' limitato da C; $p \equiv (x, y)$ un punto del campo finito σ; s_0 un punto di C, si ha, come è noto,

$$\lim_{p'=s_0} V(x, y) = \varphi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\varphi_1(s)\, ds ,$$

$$\lim_{p=s} V(x, y) = -\varphi_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\varphi_1(s)\, ds ;$$

(1) Questa è la denominazione introdotta dal sig. Fredholm nella $(F)_1$ pag. 41.
(2) Vedi $(F)_2$, pag. 375.
(3) Ibid., pag. 377.

e in virtù della (1)′:

$$(2) \qquad \lim_{p'=s_0} V(x, y) = 0 \quad , \quad \lim_{p=s_0} V(x, y) = -2\varphi_1(s_0).$$

Adunque la funzione armonica $V(x, y)$ è nulla nei punti di σ'; sicchè la $\frac{dV}{dn}$, calcolata dalla parte di σ', sarà nulla in tutti i punti di C, e, in forza di un noto teorema di Liapounoff, sarà $\frac{dV}{dn} = 0$ anche dalla parte di σ. Ne segue allora che la funzione $V(x, y)$ è costante in tutto il campo σ, e, in virtù della seconda delle (2), $\varphi_1(s) = \text{cost}$.

3. Premesso ciò, osserveremo che i risultati del Fredholm [1] ci dànno che *la condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione* (1) *ammetta una soluzione, è che, per la funzione data* $\psi(s)$, *si abbia*:

$$(3) \qquad \int_C \psi(s)\, \Psi_1(s)\, ds = 0\,,$$

dove $\Psi_1(s)$ *è una certa funzione finita e continua, che dipende dalla funzione* $\frac{d \lg r_0}{dn}$.

Supposto adunque che la $\psi(s)$ verifichi la (3) e che $\varphi(s)$ sia la corrispondente soluzione finita e continua della (1), si consideri il *doppio strato lineare*:

$$(4) \qquad V(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{d \lg r}{dn}\, \varphi(s)\, ds\,.$$

Si ha:

$$\lim_{p'=s_0} V(x, y) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{d \lg r_0}{dn}\, \varphi(s)\, ds = \psi(s_0)\,.$$

Quindi, *nel caso in cui la funzione arbitraria* $\psi(s)$ *verifica la* (3), *la corrispondente soluzione del problema di Dirichlet, per l'area infinita* σ', *si può rappresentare mediante la* (4).

4. Nel caso in cui la funzione data $\psi(s)$ non verifica la (3), indicando con r_0' il segmento variabile, che congiunge un punto fisso qualsiasi p interno a σ con un punto variabile s di C, si può determinare una costante A in modo che sia:

$$(3)' \qquad \int_C \{\psi(s) - A \log r_0'\}\, \Psi_1(s)\, ds = 0\,,$$

a meno che non si avesse:

$$\int_C \lg r_0' \,.\, \Psi_1(s)\, ds = 0\,.$$

[1] Vedi $(F)_2$, pag. 378.

Ma in questo caso, soddisfacendo la funzione $\log r'_0$ alla condizione (3), avremmo che la funzione armonica del campo σ', la quale nei punti di C coincide con la funzione $\log r'_0$, ossia la funzione $\log r'$, dove r' indica il segmento congiungente il punto fisso p col punto variabile p' del campo σ', dovrebbe, in virtù del risultato del § precedente, potersi rappresentare mediante un *doppio strato lineare*, ciò che, come è notorio, non è possibile. Quindi *il coefficiente di* A *nell'equazione* (3)′ *è sempre diverso da zero.*

Determinata adunque la costante A nel modo anzidetto, si consideri l'equazione funzionale:

$$(1)'' \qquad \psi(s_0) - \mathrm{A} \log r'_0(s_0) = \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{d \lg r_0}{dn} \varphi(s)\, ds .$$

Questa equazione, in virtù della (3)′, ammette una soluzione $\varphi(s)$, e la funzione:

$$(5) \qquad \mathrm{V}'(x, y) = \mathrm{A} \log r' + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{d \lg r}{dn} \varphi(s)\, ds ,$$

con essa costruita, ci dà:

$$\lim_{p'=s_0} \mathrm{V}'(x, y) = \mathrm{A} \log r'_0(s_0) + \varphi(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{d \lg r_0}{dn} \varphi(s)\, ds = \psi(s_0) .$$

Dunque, *nel caso in cui la funzione arbitraria* $\psi(s)$ *non verifica la condizione* (3), *la corrispondente soluzione del problema di Dirichlet, per l'area infinita* σ', *si può rappresentare mediante la* (5).

Art. II. — *Integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti.*

5. Riprendiamo qui le notazioni introdotte nella (L) e le condizioni ivi poste sulla natura della superficie σ; e aggiungiamo, ai risultati stabiliti nel § 1 della (L), i due segmenti:

1°. Supponiamo che u, v, w siano integrali delle equazioni (1) della (L) nello spazio indefinito S′, che a distanza infinita si annullino come l'inversa della distanza di un punto fisso dal punto variabile (x, y, z) e le loro derivate prime come il quadrato di questa inversa, e che nei punti di σ si abbia:

$$u = v = w = 0 .$$

Risulta immediatamente dalle (2), (3) della (L) per $k > -\frac{2}{3}$:

$$(\text{in tutto S}') \qquad u = v = w = 0 .$$

2°. Supponiamo che u, v, w siano integrali delle equazioni (1) della (L) nello spazio S, e che nei punti di σ si abbia:

$$\mathrm{X}_\sigma = \mathrm{Y}_\sigma = \mathrm{Z}_\sigma = 0 .$$

Risulta anche qui dalle (2), (3) della (L) per $k > -\frac{2}{3}$, indicando con a, b, c tre costanti arbitrarie,

$$\text{(in tutto S)} \qquad u = a \quad , \quad v = b \quad , \quad w = c.$$

6. Siano $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ tre funzioni finite e continue dei punti di σ, date ad arbitrio. Si consideri il sistema di equazioni funzionali [1]:

$$(6) \quad \begin{cases} -u(\alpha_0, \beta_0) = \varphi(\alpha_0, \beta_0) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \cdot \varphi(\alpha, \beta) + \\ \qquad + Y'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \cdot \psi(\alpha, \beta) + Z'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \cdot \chi(\alpha, \beta)\} \, d\sigma, \\ -v(\alpha_0, \beta_0) = \psi(\alpha_0, \beta_0) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \cdot \varphi(\alpha, \beta) + \cdots\} \, d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

con $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ funzioni incognite. Questo sistema di equazioni è tale che il corrispondente sistema omogeneo:

$$(6)' \quad \begin{cases} 0 = \varphi_1(\alpha_0, \beta_0) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \cdot \varphi_1(\alpha, \beta) + \\ \qquad + Y'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \cdot \psi_1(\alpha, \beta) + \cdots\} \, d\sigma, \\ 0 = \psi_1(\alpha_0, \beta_0) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X''_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \cdot \varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots\} \, d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ammette la soluzione evidente $\varphi_1(\alpha, \beta) = a$, $\psi_1(\alpha, \beta) = b$, $\chi_1(\alpha, \beta) = c$, con a, b, c costanti arbitrarie; di modo che il sistema (6) in generale non ammette soluzione alcuna [2].

Dimostriamo anzitutto che *qualunque soluzione delle* (6)′ *deve necessariamente essere costante.* Infatti formino le funzioni finite e continue $\varphi_1(\alpha, \beta)$, $\psi_1(\alpha, \beta)$, $\chi_1(\alpha, \beta)$ una soluzione del sistema (6)′. Si considerino le espressioni:

$$(7) \quad \begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X'_\sigma \cdot \varphi_1(\alpha, \beta) + Y'_\sigma \cdot \psi_1(\alpha, \beta) + Z'_\sigma \cdot \chi_1(\alpha, \beta)\} \, d\sigma, \\ \Psi_1(x, y, z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma \{X''_\sigma \cdot \varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots\} \, d\sigma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

(1) Cfr. le equazioni (11) della (L) e l'equazione (1) dell'Art. I.
(2) Vedi $(F)_2$, pag. 378, 379.

Posto $p_0 \equiv (\alpha_0, \beta_0)$, si ha, in virtù delle (8) della (L),

$$\lim_{p'=p_0} \Phi_1(x, y, z) = -\varphi_1(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0) \,.\, \varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots\}\, d\sigma,$$

. . . . . ;

$$\lim_{p=p_0} \Phi_1(x, y, z) = \quad \varphi_1(\alpha_0, \beta_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{X'_\sigma(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0) \,.\, \varphi_1(\alpha, \beta) + \cdots\}\, d\sigma,$$

. . . . . ;

e quindi, in forza delle (6)′,

$$(8) \quad \begin{cases} \lim\limits_{p'=p_0} \Phi_1(x, y, z) = 0 \;,\; \lim\limits_{p'=p_0} \Psi_1(x, y, z) = 0 \;,\; \lim\limits_{p'=p_0} X_1(x, y, z) = 0\,; \\ \lim\limits_{p=p_0} \Phi_1(x, y, z) = 2\varphi_1(\alpha_0, \beta_0) \;,\; \lim\limits_{p=p_0} \Psi_1(x, y, z) = 2\psi_1(\alpha_0, \beta_0)\,, \ldots \end{cases}$$

Adunque le funzioni $\Phi_1(x, y, z)$, $\Psi_1(x, y, z)$, $X_1(x, y, z)$, considerate come funzioni dei punti di S′, sono integrali delle equazioni (1) della (L) e nei punti di σ prendono valori nulli; sicchè, in forza del 1° risultato al § 5, si ha:

$$\text{(in tutto S')} \qquad \Phi_1(x, y, z) = \Psi_1(x, y, z) = X_1(x, y, z) = 0\,;$$

e quindi le corrispondenti espressioni (9) della (L):

$$P_1(x, y, z)_0 \quad , \quad Q_1(x, y, z)_0 \quad , \quad R_1(x, y, z)_0$$

saranno nulle qualunque sia il punto $p_0 \equiv (\alpha_0, \beta_0)$ di σ e qualunque sia il punto $p' \equiv (x, y, z)$ di S′. Avremo dunque:

$$\lim_{p'=p_0} P_1(x, y, z)_0 = \lim_{p'=p_0} Q_1(x, y, z)_0 = \lim_{p'=p_0} R_1(x, y, z)_0 = 0\,;$$

e, in virtù dell'ultimo teorema al § 3 della (L),

$$\lim_{p=p_0} P_1(x, y, z)_0 = \lim_{p=p_0} Q_1(x, y, z)_0 = \lim_{p=p_0} R_1(x, y, z)_0 = 0\,.$$

Queste espressioni rappresentano le X_σ, Y_σ, Z_σ, corrispondenti agli integrali (7) delle equazioni (1) della (L), considerati come funzioni dei punti (x, y, z) del campo finito S; per cui risulterà, in forza del 2° risultato al § 5,

$$\text{(in tutto S)} \qquad \Phi_1(x, y, z) = 2a \;,\; \Psi_1(x, y, z) = 2b \;,\; X_1(x, y, z) = 2c\,,$$

con a, b, c costanti arbitrarie; e quindi, in causa delle (8),

$$\varphi_1(\alpha\ \beta) = a\,,\ \psi_1(\alpha, \beta) = b\,,\ \chi_1(\alpha, \beta) = c\,.$$

Adunque le equazioni omogenee (6)′ non ammettono alcuna altra soluzione, all'infuori di quella già segnalata.

7. Premesso ciò, osserveremo che i risultati del Fredholm sulle equazioni funzionali ci dànno che *la condizione necessaria e sufficiente, affinchè il sistema di equazioni* (6) *ammetta una soluzione, è che le funzioni date* $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ *soddisfino alla condizione*:

$$(9) \quad \int_\sigma \{u(\alpha, \beta) \,.\, \Phi_1(\alpha, \beta) + v(\alpha, \beta)\, \Phi_1'(\alpha, \beta) + w(\alpha, \beta)\, \Phi_1''(\alpha, \beta)\}\, d\sigma = 0,$$

dove $\Phi_1(\alpha, \beta)$, $\Phi_1'(\alpha, \beta)$, $\Phi_1''(\alpha, \beta)$ *sono una terna di funzioni finite e continue, dipendenti dalle funzioni* $X_\sigma'(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0)$, $Y_\sigma'(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0), \ldots;$ $X_\sigma''(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0), \ldots$; $X_\sigma'''(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0), \ldots$.

Supposto adunque che le funzioni date $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ soddisfino alla condizione (9) e che $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ siano le corrispondenti funzioni finite e continue che soddisfano al sistema (6), si considerino le funzioni:

$$(10) \quad \begin{cases} u(x, y, z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \{X_\sigma' \,.\, \varphi(\alpha, \beta) + Y_\sigma' \,.\, \psi(\alpha, \beta) + Z_\sigma' \,.\, \chi(\alpha, \beta)\}\, d\sigma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Esse soddisfano alle equazioni (1) della (L) e ci dànno, in virtù delle (8) della (L) e delle equazioni (6),

$$\lim_{p'=p_0} u(x, y, z) = -\varphi(\alpha_0, \beta_0) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \{X_\sigma'(\alpha, \beta\,;\, \alpha_0, \beta_0)\, \varphi(\alpha, \beta) + \cdots\}\, d\sigma = u(\alpha_0, \beta_0),$$

$$\lim_{p'=p_0} v(x, y, z) = v(\alpha_0, \beta_0) \quad , \quad \lim_{p'=p_0} w(x, y, z) = w(\alpha_0, \beta_0).$$

Quindi *le funzioni* $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, *date dalle* (10), *rappresentano nel campo* S′ *per* $k > -\frac{2}{3}$ *gli integrali delle equazioni dell'equilibrio, corrispondenti ai valori arbitrariamente dati su* σ: $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$.

8. Nel caso in cui le funzioni date $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ non soddisfano alla condizione (9), indicando con r' il segmento variabile, che congiunge un punto fisso p qualsiasi dell'interno di S con i punti (x, y, z) del campo S′ (quelli (α, β) di σ inclusi), e ponendo:

$$u_1(x, y, z) = \frac{1}{r'} - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r'}{\partial x^2}, \quad v_1(x, y, z) = -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r'}{\partial x\, \partial y},$$

$$w_1(x, y, z) = -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r'}{\partial x\, \partial z},$$

si può determinare una costante A in modo che si abbia:

$$(11)\quad \int_\sigma \Big[\{u(\alpha,\beta) - \mathrm{A}\,.\,u_1(\alpha,\beta)\}\,\Psi_1(\alpha,\beta) + \{v(\alpha,\beta) - \mathrm{A}\,.\,v_1(\alpha,\beta)\}\,\Psi_1'(\alpha,\beta) + \\ + \{w(\alpha,\beta) - \mathrm{A}\,.\,w_1(\alpha,\beta)\}\,\Psi_1''(\alpha,\beta)\Big]\,d\sigma = 0\,,$$

a meno che non sia:

$$\int_\sigma \{u_1(\alpha,\beta)\,\Psi_1(\alpha,\beta) + v_1(\alpha,\beta)\,\Psi_1'(\alpha,\beta) + w_1(\alpha,\beta)\,\Psi_1''(\alpha,\beta)\}\,d\sigma = 0\,.$$

Ma in questo caso le funzioni $u_1(x,y,z)$, $v_1(x,y,z)$, $w_1(x,y,z)$, che nei punti del campo infinito S′ soddisfano alle equazioni dell'equilibrio, verificherebbero la condizione (9); e quindi dovrebbero potersi rappresentare per mezzo delle formole (10). Ora è facile vedere che ciò non è possibile; infatti basterà osservare che le funzioni rappresentabili mediante le (10) a distanza infinita divengono infinitesime come $\frac{1}{r^{\nu'}}$, mentre p. es. la $u_1(x,y,z)$ a distanza infinita, nei punti del piano normale all'asse delle x passante per p, diventa infinitesima come $\frac{1}{r'}$. Ne concludiamo che *il coefficiente di* A *nella equazione* (11) *è sempre diverso da zero.*

Determinata la costante A per mezzo della (11), e posto:

$$(12)\quad \begin{cases} \overline{u}(\alpha,\beta) = u(\alpha,\beta) - \mathrm{A}\,.\,u_1(\alpha,\beta)\,, \\ \overline{v}(\alpha,\beta) = v(\alpha,\beta) - \mathrm{A}\,.\,v_1(\alpha,\beta)\,, \\ \overline{w}(\alpha,\beta) = w(\alpha,\beta) - \mathrm{A}\,.\,w_1(\alpha,\beta)\,, \end{cases}$$

si considerino le equazioni funzionali:

$$(6)''\quad \begin{cases} -\overline{u}(\alpha_0,\beta_0) = \varphi(\alpha_0,\beta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{\mathrm{X}_\sigma'(\alpha,\beta\,;\,\alpha_0,\beta_0)\,.\,\varphi(\alpha,\beta) + \cdots\}\,d\sigma\,, \\ -\overline{v}(\alpha_0,\beta_0) = \psi(\alpha_0,\beta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{\mathrm{X}_\sigma''(\alpha,\beta\,;\,\alpha_0,\beta_0)\,.\,\varphi(\alpha,\beta) + \cdots\}\,d\sigma\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

In forza della (11) queste equazioni ammettono una soluzione $\varphi(\alpha,\beta)$, $\psi(\alpha,\beta)$, $\chi(\alpha,\beta)$; e posto:

$$(13)\quad \begin{cases} u(x,y,z) = \mathrm{A}\,.\,u_1(x,y,z) + \\ \qquad + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{\mathrm{X}_\sigma'\,.\,\varphi(\alpha,\beta) + \mathrm{Y}_\sigma'\,.\,\psi(\alpha,\beta) + \mathrm{Z}_\sigma'\,.\,\chi(\alpha,\beta)\}\,d\sigma\,, \\ v(x,y,z) = \mathrm{A}\,.\,v_1(x,y,z) + \\ \qquad + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \{\mathrm{X}_\sigma''\,.\,\varphi(\alpha,\beta) + \mathrm{Y}_\sigma''\,.\,\psi(\alpha,\beta) + \mathrm{Z}_\sigma''\,.\,\chi(\alpha,\beta)\}\,d\sigma\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{cases}$$

si avrà, in virtù delle (6)″, delle (12) e delle formole (8) della (L),

$$\lim_{p'=p_0} u(x, y, z) = \mathrm{A} \cdot u_1(\alpha_0, \beta_0) - \varphi(\alpha_0, \beta_0) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \{ X'_\sigma(\alpha, \beta; \alpha_0, \beta_0) \varphi(\alpha, \beta) + \cdots \} \, d\sigma = \mathrm{A} \cdot u_1(\alpha_0, \beta_0) + \bar{u}(\alpha_0, \beta_0) = u(\alpha_0, \beta_0),$$

$$\lim_{p'=p_0} v(x, y, z) = v(\alpha_0, \beta_0) \quad , \quad \lim_{p'=p_0} w(x, y, z) = w(\alpha_0, \beta_0).$$

Dunque *le funzioni* $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, *date dalle formole* (13), *per* $k > -\frac{2}{3}$ *rappresentano nei punti del campo infinito* S′ *gli integrali dell'equilibrio dei solidi elastici isotropi, corrispondenti ai valori arbitrariamente dati su* σ: $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$.

Meccanica. — *Sul problema derivato di Dirichlet, sul problema dell'elettrostatistica e sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità.* Nota di G. Lauricella, presentata dal Socio V. Volterra

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali.* Nota del prof. Marino Pannelli, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

In una precedente Nota [1] ho dimostrato l'esistenza di alcuni invarianti numerici di una varietà algebrica a tre dimensioni; in questa, studio il loro modo di comportarsi rispetto alle trasformazioni birazionali della varietà [2].

1. Si trasformi dunque birazionalmente la varietà W, supposta immersa in un iperspazio e priva di elementi singolari, in un'altra W′. In W si abbiano σ punti $T_h (h = 1, 2, 3, \ldots \sigma)$ e τ curve $R_k (k = 1, 2, 3, \ldots \tau)$ fondamentali per la trasformazione. Sia ϱ_k il genere di un curva R_k, λ_{hk} il numero dei suoi rami passanti per T_h ed i_k il suo grado di multiplicità per

[1] *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XV, 1° sem. 1906.

[2] Le dimostrazioni dei risultati qui esposti sono in alcuni punti forse troppo concise; ciò è dovuto soltanto alla ristrettezza dello spazio concessomi. Così non ho potuto riprodurre gli esempi esaminati per chiarire e confermare i risultati stessi.

una superficie generica del sistema trasformante la varietà W in W'. Riguardo a questi gradi di multiplicità può sempre supporsi che sia

$$i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq i_4 \geq \ldots \geq i_\tau .$$

In fine si indichi con d_k il numero totale dei punti d'appoggio di una curva R_k con tutte le altre curve fondamentali i cui gradi di multiplicità sono inferiori ad i_k; e con δ_k quello dei punti d'appoggio della medesima curva con tutte le successive.

Ad ogni curva fondamentale R_k di W corrisponde in W' una superficie R'_k contenente un fascio, di genere ϱ_k, costituito dalle curve razionali corrispondenti ai punti di R_k. Quindi il genere aritmetico di questa superficie è $-\varrho_k$. Inoltre il fascio anzidetto possiede d_k curve, ciascuna spezzantesi in due, aventi un punto comune, ed oltre queste non contiene nessun'altra curva dotata di un punto doppio. Perciò l'invariante di Castelnuovo-Enriques della medesima superficie R'_k è:

$$-8\varrho_k - d_k + 9 .$$

Ad ogni punto fondamentale T_h di W corrisponde in W' una superficie razionale T'_h, dotata di $\sum_k \lambda_{hk}$ curve eccezionali, corrispondenti ai punti infinitamente vicini a T_h e appartenenti ai rami delle curve R_k passanti per T_h. Quindi il genere aritmetico di questa superficie T'_h è O, e l'invariante di Castelnuovo-Enriques ad essa relativo è:

$$10 - \sum_k \lambda_{hk} .$$

Come è noto [1] la formazione degli invarianti numerici della varietà W per mezzo di un sistema $|S|$ di superficie S, è indipendente dalla scelta del sistema medesimo; perciò può supporsi che questo abbia una posizione generale rispetto agli elementi di W, che sono fondamentali per la trasformazione, come accade p. es. per il sistema delle sezioni spaziali. Se si indica con P il genere aritmetico di una superficie S di un sistema siffatto; con p il genere dell'intersezione di due qualsivogliano delle sue superficie: con n il numero dei punti comuni a tre delle superficie medesime; e se inoltre P', p', n' hanno gli analoghi significati rispetto agli enti corrispondenti del sistema $|S'|$ che in W' corrisponde ad $|S|$, si ha:

$$(1) \qquad P' = P \quad , \quad p' = p \quad , \quad n' = n .$$

Una superficie del sistema aggiunto ad $|S'|$ si compone di una superficie S'_a, corrispondente ad una superficie S_a del sistema $|S_a|$ aggiunto ad $|S|$; di

[1] Pannelli, loc. cit.

tutte le superficie R'_k, ciascuna contata una sola volta; e di tutte le superficie T'_h, ciascuna contata due volte [1].
Il sistema aggiunto ad $|S'|$ è dunque:

$$(2) \qquad |S'_a + \sum_k R'_k + 2\sum_h T'_h| .$$

2. Ciò premesso, si vuole in primo luogo dimostrare che Δ è un *invariante assoluto*.

A tale oggetto si ricordi che questo invariante formato per la varietà W, per mezzo del sistema $|S|$, è definito dalla formola:

$$8\Delta = 8P_a - \Omega_a - 8P + 2p - n - 15$$

dove P, p, n hanno i significati già loro attribuiti, ed inoltre P_a ed Ω_a sono il genere aritmetico e l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie S_a.

Quindi, se per formare l'invariante analogo Δ' della varietà W' si fa uso del sistema trasformato $|S'|$, si ha:

$$8\Delta' = 8P'_a - \Omega'_a - 8P' + 2p' - n' - 15$$

dove P', p', n' hanno ancora i significati già loro attribuiti, ed inoltre P'_a ed Ω'_a sono il genere aritmetico e l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie del sistema (2).

Dal confronto delle due formole precedenti, segue subito, tenendo conto delle (1), che l'*invarianza assoluta* di Δ rimane dimostrata, se si prova l'eguaglianza:

$$(3) \qquad 8P'_a - \Omega'_a = 8P_a - \Omega_a .$$

Ora per calcolare la prima di queste due differenze si applichi la formola [2]

$$(4) \quad 8P - \Omega = 8\sum P_i - \sum \Omega_i + 2\sum (F_i F_j F_l) + \sum (F_i F_i F_j) + 9(\nu - 1)$$

relativa alla somma di ν superficie F.

Nel caso attuale in cui questa somma è quella che costituisce una superficie del sistema (2), si ha dapprima:

$$\nu = 2\sigma + \tau + 1$$

epperò:

$$(5) \qquad 9(\nu - 1) = 18\sigma + 9\tau .$$

[1] Questa proprietà si dimostra come l'analoga sulle superficie; Enriques, *Intorno ai fondamenti della Geometria* ecc. n. 21. Atti dell'Acc. di Torino, vol. XXXVII.

[2] Pannelli, loc. cit., n. 1.

Inoltre:

a) Il genere aritmetico di una superficie S'_a è eguale a quello P_a della superficie corrispondente S_a; di più (n. 1) il genere aritmetico di una superficie R'_k è $-\varrho_k$, e quello di una T'_h è 0. Quindi:

$$\sum P_i = P_a - \sum_k \varrho_k . \tag{6}$$

b) Una superficie generica S_a non passa per nessun punto T_h, mentre incontra ogni curva R_k in α_k punti. Quindi la superficie corrispondente S'_a possiede $\sum_k \alpha_k$ curve eccezionali. Perciò, siccome si è già indicato con Ω_a l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie S_a, così quello della superficie S'_a è:

$$\Omega_a - \sum_k \alpha_k .$$

Gli invarianti analoghi delle superficie R'_k e T'_h sono già stati determinati (n. 1). Si ha dunque:

$$\sum \Omega_i = \Omega_a - \sum_k \alpha_k - 8\sum_k \varrho_k - \sum_k d_k + 9\tau + 20\sigma - 2\sum_{hk} \lambda_{hk} . \tag{7}$$

c) Si ha poi:

$$\begin{aligned}\sum(F_i F_j F_l) = {} & \sum(S'_a R'_k R'_{k'}) + 2\sum(S'_a T'_h T'_{h'}) + \sum(S'_a T'_h T'_h) + 2\sum(S'_a R'_k T'_h) \\ & + \sum(R'_k R'_{k'} R'_{k''}) + 2\sum(R'_k R'_{k'} T'_h) + 2\sum(R'_k T'_h T'_{h'}) + \sum(R'_k T'_h T'_h) \\ & + 2\sum(T'_h T'_{h'} T'_{k''}) + 2\sum(T'_h T'_h T'_{h'})\end{aligned}$$

dove gli indici k, k', k'' e h, h', h'' debbono variare da 1 sino a τ, o a σ, rispettivamente; ma nello stesso termine non possono prendere valori eguali.

Ora, una superficie generica S_a non passa per nessun punto T_h, nè per nessuno dei punti comuni a due curve R_k; perciò si ha intanto:

$$\sum(S'_a R'_k R'_{k'}) = \sum(S'_a T'_h T'_{h'}) = \sum(S'_a T'_h T'_h) = \sum(S'_a R'_k T'_h) = 0 .$$

Tre curve fondamentali R_k non hanno in generale punti comuni, e così due di esse non hanno punti comuni infinitamente vicini ad uno stesso punto fondamentale T_h; quindi in tale ipotesi, si ha ancora:

$$\sum(R'_k R'_{k'} R'_{k''}) = \sum(R'_k R'_{k'} T'_h) = 0 \text{ [1]}.$$

[1] Non è difficile vedere come si modificano queste e le altre formole, se l'ipotesi ora fatta non è verificata; ma le modificazioni, che si debbono introdurre, non alterano il risultato finale.

Le superficie corrispondenti a due punti fondamentali non si tagliano in linee variabili; epperò:

$$\sum(R'_k T'_h T'_{h'}) = \sum(T'_h T'_{h'} T'_{h''}) = \sum(T'_h T'_h T'_{h'}) = 0 .$$

Infine, una curva R_k ha λ_{hk} punti infinitamente vicini a T_h; e per conseguenza la superficie R'_k ha in comune con la superficie T'_h altrettante curve razionali, eccezionali tanto per l'una quanto per l'altra superficie. Considerate come appartenenti ad R'_k, il grado d'intersezione di ciascuna di esse con sè stessa è 0, e conseguentemente:

$$\sum(R'_k T'_h T'_h) = 0 .$$

Si ha dunque:

(8) $$\sum(F_i F_j F_l) = 0 .$$

d) Infine è:

$$\sum(F_i F_i F_j) = \sum(S'_a S'_a R'_k) + 2\sum(S'_a S'_a T'_h) + \sum(R'_k R'_k S'_a)$$
$$+ \sum(R'_k R'_k R'_k) + 2\sum(R'_k R'_k T'_h)$$
$$+ 2\Big[\sum(T'_h T'_h S'_a) + \sum(T'_h T'_h R'_k) + \sum(T'_h T'_h T'_{h'}) + \sum(T'_h T'_h T'_h)\Big] .$$

Ora, una curva generica $(S_a S_a)$ non si appoggia alle curve R_k, nè passa per i punti T_h; perciò si ha intanto:

$$\sum(S'_a S'_a R'_k) = \sum(S'_a S'_a T'_h) = 0 .$$

Agli α_k punti d'intersezione di una superficie S_a con una curva R_k corrispondono sulla superficie S'_a altrettante curve eccezionali, e il grado d'intersezione di ciascuna con sè stessa è -1. Quindi si ha ancora:

$$\sum(R'_k R'_k S'_a) = -\sum_k \alpha_k .$$

Ogni curva R_k viene incontrata in d_k punti complessivamente dalle curve $R_{k'}$, i cui gradi di multiplicità per le superficie del sistema trasformante la varietà W in W′ sono inferiori ad i_k. A ciascuno di questi punti corrisponde una curva composta da altre due, aventi un punto comune, una delle quali appartiene alle due superficie R'_k ed $R'_{k'}$. Il grado d'intersezione di questa componente con sè stessa, considerata sulla superficie R'_k, è -1, mentre, considerata sulla superficie $R'_{k'}$, è 0. Per conseguenza si trova:

$$\sum(R'_k R'_k R'_{k'}) = -\sum_k d_k .$$

In modo analogo, osservando che una superficie T'_h ha in comune λ_{hk} curve eccezionali con una superficie R'_k, si ottiene:

$$\sum(R'_k R'_k T'_h) = -\sum_{hk} \lambda_{hk}.$$

Inoltre, si è già trovato precedentemente (c):

$$\sum(T'_h T'_h S'_a) = \sum(T'_h T'_h R'_k) = \sum(T'_h T'_h T'_{h'}) = 0.$$

Le superficie S_1 del sistema $|S|$ passanti per un medesimo punto T_h formano un sistema $|S_1|$, contenuto in $|S|$, del grado $n-1$, cui corrisponde in W' un sistema costituito da superficie, ciascuna delle quali è la somma della superficie T'_h con una superficie S'_1 di un determinato sistema $|S'_1|$ del medesimo grado $n-1$ di $|S|$. Tre superficie $S'_1 + T'_h$ si debbono incontrare in n punti; epperò si ha l'eguaglianza:

$$(9) \qquad (S'_1 S'_1 S'_1) + 3(S'_1 S'_1 T'_h) + 3(S'_1 T'_h T'_h) + (T'_h T'_h T'_h) = n$$

nella quale, in virtù del grado del sistema $|S'_1|$, è intanto:

$$(S'_1 S'_1 S'_1) = n - 1.$$

Inoltre, poichè la curva $(S_1 S_1)$ ha un sol punto infinitamente vicino a T_h, si ha ancora:

$$(S'_1 S'_1 T'_h) = 1.$$

Infine, a T_h, che è un punto fondamentale per una superficie S_1, corrisponde sopra S'_1 una curva eccezionale, il cui grado d'intersezione con sè stessa è -1; quindi:

$$(S'_1 T'_h T'_h) = -1.$$

Con ciò l'eguaglianza (9) somministra

$$(T'_h T'_h T'_h) = 1$$

epperò si ha infine:

$$\sum(T'_h T'_h T'_h) = \sigma.$$

Dunque:

$$(10) \qquad \sum(F_i F_i F_j) = -\sum_k \alpha_k - \sum_k d_k - 2\sum_{hk} \lambda_{hk} + 2\sigma.$$

In tal modo sono noti i valori di tutti i termini della formola (4), quando essa si applichi per calcolare la differenza $8P'_a - \Omega'_a$, valori dati dalle (5), (6), (7), (8) e (10). Facendo le sostituzioni si trova che la formola

stessa (4) si riduce alla eguaglianza (3), la quale così rimane dimostrata, e quindi, come si è osservato in principio, si può concludere:

L'invariante Δ è un invariante assoluto.

3. Si passi ora a studiare il modo di comportarsi degli altri invarianti, rispetto alle trasformazioni birazionali della varietà.

Si ricordi dapprima, che fra Δ, $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$ hanno luogo le relazioni [1]:

$$8(\Delta^{(1)} - \Delta) = \Delta^{(2)} - 25 \quad \Delta^{(2)} - 1 = 4\Delta^{(3)}.$$

Se $\Delta_1^{(1)}$, $\Delta_1^{(2)}$, $\Delta_1^{(3)}$ sono gli stessi invarianti per la varietà trasformata W′. essendo Δ un invariante assoluto (n. 2), si ha analogamente:

$$8(\Delta_1^{(1)} - \Delta) = \Delta_1^{(2)} - 25 \quad , \quad \Delta_1^{(2)} - 1 = 4\Delta_1^{(3)}.$$

Da queste relazioni e dalle precedenti segue:

$$2(\Delta_1^{(1)} - \Delta^{(1)}) = \Delta_1^{(3)} - \Delta^{(3)}. \tag{11}$$

Ciò premesso, conviene anzitutto esaminare l'invariante $\Delta^{(3)}$ definito dalla formola [2]:

$$\Delta^{(3)} = n_a - 3\Omega + 6p - 4n - 3 \tag{12}$$

dove Ω è l'invariante di Castelnuovo-Enriques di una superficie del sistema $|S|$, p ed n hanno i significati già loro attribuiti ed n_a è il grado del sistema aggiunto $|S_a|$.

Quindi, facendo uso del sistema $|S'|$ corrispondente ad $|S|$, si cerchi l'espressione dell'invariante analogo $\Delta_1^{(3)}$, per la varietà W′, dedotta da W mediante una trasformazione birazionale, che abbia in W un sol punto fondamentale T.

In questa ipotesi, il sistema aggiunto ad $|S'|$ è $|S'_a + 2T'|$, il cui grado è:

$$(S'_a S'_a S'_a) + 6(S'_a S'_a T') + 12(S'_a T' T') + 8(T' T' T')$$

ossia:

$$n_a + 8$$

perchè il grado $(S'_a S'_a S'_a)$ del sistema $|S'_a|$ è eguale a quello, n_a, di $|S_a|$, e di più (n. 2, *c*) e *d*)) si ha:

$$(S'_a S'_a T') = (S'_a T' T') = 0 \quad , \quad (T' T' T') = 1.$$

Inoltre, l'invariante Ω' di Castelnuovo-Enriques di una superficie S′ è eguale a quello Ω di S, poichè, per le ipotesi fatte, sopra la superficie S′ non si hanno curve eccezionali. Quindi, tenendo presenti le relazioni (1) si trova:

$$\Delta_1^{(3)} = n_a + 8 - 3\Omega + 6p - 4n - 3$$

[1] Pannelli, loc. cit., n. 4 e 5.

[2] Pannelli, loc. cit., n. 5.

donde, per la (12), segue:

$$\Delta_1^{(3)} = \Delta^{(3)} + 8$$

epperò:

1°) In virtù della particolare trasformazione birazionale considerata l'invariante $\Delta^{(3)}$ di W aumenta di 8 unità.

Dalla relazione precedente e dalla (11) si deduce:

$$\Delta_1^{(1)} = \Delta^{(1)} + 4,$$

e quindi si ha ancora:

2°) In virtù della medesima trasformazione, l'invariante $\Delta^{(1)}$ di W aumenta di 4 unità.

L'invariante $\Delta^{(1)}$ di W è definito dalla formola [1]:

$$\Delta^{(1)} = P_a - P - \Omega + 3p - 2n - 3 \tag{13}$$

dove P_a è il genere aritmetico di una superficie S_a, e gli altri simboli hanno significati già stabiliti.

Quindi, facendo uso del sistema $|S'|$ corrispondente ad $|S|$, si calcoli l'invariante $\Delta_1^{(1)}$ della varietà W', dedotta da W mediante una trasformazione birazionale, che abbia in W un numero σ di punti fondamentali T_h.

In questa ipotesi, il sistema aggiunto ad $|S'|$ è $|S'_a + 2\sum_h T'_h|$, e il genere aritmetico di una sua superficie è [2]:

$$P_a + X \tag{14}$$

dove per lo scopo che qui si ha in mira, è inutile scrivere esplicitamente i termini contenuti in X.

Come nel caso precedente, è $\Omega' = \Omega$. Quindi tenendo presenti le relazioni (1), si trova:

$$\Delta_1^{(1)} = P_a + X - P - \Omega + 3p - 2n - 3$$

donde, per la (13), segue:

$$\Delta_1^{(1)} = \Delta^{(1)} + X.$$

D'altra parte, per la proprietà 2°), si ha:

$$\Delta_1^{(1)} = \Delta^{(1)} + 4\sigma,$$

Dal confronto di questa eguaglianza con la precedente, si deduce:

$$X = 4\sigma$$

e quindi, in virtù della (14), si conclude:

3°) Il genere aritmetico di una superficie $S'_a + 2\sum_h T'_h$ è $P_a + 4\sigma$.

(1) Pannelli, loc. cit., n. 4.
(2) Pannelli, loc. cit., n. 1.

4. Ciò stabilito, si consideri la trasformazione generale della varietà W in un'altra W', definita nel n. 1, e in questa ipotesi si calcoli l'invariante $\Delta_1^{(1)}$ di W', per mezzo del sistema $|S'|$.

Il sistema aggiunto ad $|S'|$ è il sistema (2), e il genere aritmetico di una sua superficie è eguale alla somma dei generi aritmetici delle due superficie $S'_a + 2\sum_h T'_h$ e $\sum_k R'_k$, aumentata del genere della intersezione delle superficie medesime.

a) Il modo di comportarsi delle superficie T'_h fra loro e rispetto alla superficie S'_a è indipendente dalla esistenza in W delle curve R_k, queste curve non avendo altro effetto, quando passano per i punti T_h, come qui si suppone, che di introdurre sulle superficie T'_h delle curve eccezionali, le quali non influiscono sul genere aritmetico della superficie $S'_a + 2\sum_h T'_h$. Quindi (n. 3, 3°)) questo genere aritmetico è $P_a + 4\sigma$.

b) Con un procedimento di ripetizione, si trova che il genere aritmetico della superficie $\sum_k R'_k$ è:

$$-\sum_k \varrho_k + \sum_{k=1}^{k=\tau-1} g(R'_k, R'_{k+1} + R'_{k+2} + \cdots + R'_\tau).$$

E poichè una curva R_k si appoggia complessivamente in δ_k punti a tutte le curve successive (n. 1), si ha:

$$g(R'_k, R'_{k+1} + R'_{k+2} + \cdots + R'_\tau) = -\delta_k + 1$$

donde:

$$\sum_{k=1}^{k=\tau-1} g(R'_k, R'_{k+1} + R'_{k+2} + \cdots + R'_\tau) = -\sum \delta_k + \tau - 1.$$

Quindi il genere aritmetico della superficie $\sum_k R'_k$ è:

$$-\sum_k \varrho_k - \sum_k \delta_k + \tau - 1 = -\varrho,$$

indicando con ϱ il genere della curva composta da tutte le curve fondamentali R_k.

c) L'intersezione delle due superficie $S'_a + 2\sum_h T'_h$ e $\sum_k R'_k$ si compone di $\tau + 2\sigma\tau$ curve, due qualunque delle quali non hanno punti comuni; quindi il suo genere è:

$$\sum_k g(S'_a R'_k) + 2\sum_{hk} g(T'_h R'_k) - \tau - 2\sigma\tau + 1.$$

Ora, poichè una curva R_k incontra una superficie S_a in α_k punti, si ha:

$$\sum_k g(S'_a R'_k) = -\sum_k \alpha_k + \tau.$$

Inoltre, siccome una curva R_k possiede in ogni T_h un punto multiplo secondo λ_{hk}, così si ha ancora:

$$\sum_{hk} g(T'_h R'_k) = -\sum_{hk} \lambda_{hk} + \sigma\tau = -\lambda + \sigma\tau$$

ove si chiami λ il numero totale dei rami delle curve R_k passanti per i punti T_h.

Così per il genere dell'intersezione delle due superficie $S'_a + 2\sum_h T'_h$ e $\sum_k R'_k$ si trova:

$$-\sum_k \alpha_k - 2\lambda + 1 .$$

Quindi, per quanto si è osservato in principio, il genere aritmetico di una superficie del sistema (2), è:

$$P_a + 4\sigma - \varrho - 2\lambda - \sum_k \alpha_k + 1 .$$

Se si dice β_k il numero delle intersezioni di una superficie S con una curva R_k, l'invariante di Castelnuovo-Enriques della superficie corrispondente S' è:

$$\Omega - \sum_k \beta_k .$$

Infine, i valori di P', p', n' sono dati dalle formole (1).

Così si hanno tutti gli elementi necessari per calcolare l'invariante $\Delta_1^{(1)}$, definito dalla formola (13) applicata al sistema $|S'|$ della varietà W'; quindi si trova:

$$\Delta_1^{(1)} = P_a + 4\sigma - \varrho - 2\lambda - \sum_k \alpha_k + 1 - P - \Omega + \sum_k \beta_k + 3p - 2n - 3$$

donde, tenendo presente la stessa formola (13) ed osservando che l'espressione:

$$\sum_k \alpha_k - \sum_k \beta_k$$

è il carattere d'immersione θ della curva composta da tutte le curve fondamentali R_k [1], segue:

$$\Delta_1^{(1)} = \Delta^{(1)} + 4\sigma - (\varrho + \theta + 2\lambda - 1).$$

[1] In virtù della proprietà fondamentale delle superficie aggiunte (Pannelli, loc. cit., n. 1, teor. IV), si ha:

$$|S_a - S| = |S'_a - S'|$$

donde, indicando con K una curva qualunque (semplice o composta) della varietà W segue

$$(KS_a) - (KS) = (KS'_a) - (KS')$$

il che dimostra che il numero

$$(KS_a) - (KS)$$

non dipende dalla scelta del sistema $|S|$, ma solo dalla curva K in quanto è data nella varietà W. Questo numero chiamasi *carattere d'immersione* della curva K nella varietà W.

Dunque:

Se la varietà W *si trasforma birazionalmente nella varietà* W', *l'invariante* $\Delta^{(1)}$ *di* W *aumenta del numero*:

$$[4\sigma - (\varrho + \theta + 2\lambda - 1)] - [4\sigma' - (\varrho' + \theta' + 2\lambda' - 1)]$$

dove σ *è il numero dei punti,* ϱ *il genere e* θ *il carattere d'immersione della curva composta dalle curve, che insieme a quei punti costituiscono in* W *gli elementi fondamentali della trasformazione e* λ *è il numero totale dei rami di queste curve passanti per i punti medesimi. Inoltre* σ', ϱ', θ' *e* λ' *hanno i medesimi significati rispetto agli elementi fondamentali di* W', *che sono semplici per questa varietà.*

Per mezzo delle relazioni che legano $\Delta^{(1)}$ agli altri invarianti $\Delta^{(2)}$, $\Delta^{(3)}$, $\Delta^{(4)}$ è facile, volendo, trovare le modificazioni che subiscono questi stessi invarianti nelle trasformazioni birazionali della varietà.

Matematica. — *Sur les fonctions dérivées.* Nota di Henri Lebesgue, presentata dal Socio C. Segre.

Fisica. — *Sopra un nuovo sistema di telegrafia senza filo.* Nota di Alessandro Artom, presentata dal Corrispondente G. Grassi.

Fisica. — *Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate e di onde hertziane.* Nota del prof. Riccardo Arnò, presentata dal Socio G. Colombo.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Contributo allo studio dell'isomorfismo fra il tellurio ed il selenio* [1]. Nota di Giovanni Pellini, presentata dal Corrispondente R. Nasini.

La posizione del tellurio nel gruppo sesto del sistema periodico, mentre è resa ragionevole dalle spiccate analogie di questo elemento con lo zolfo ed il selenio, è ostacolata dai caratteri principali che determinarono la posizione degli elementi nel sistema, il peso atomico e le relazioni di isomorfismo.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Padova.

Per ciò che si riferisce al peso atomico, noi abbiamo una serie di determinazioni concordanti nel valore di 127,6: valore troppo elevato in confronto a quello dello iodio che si trova nella stessa serie eterologa nel gruppo settimo. La differenza è piccola, e tanto più piccola dopo le ultime ricerche sul peso atomico dello iodio: per cui non è improbabile che si possa abbassare il valore spettante al tellurio, con lo studio più accurato dei suoi composti ed in special modo con il perfezionamento dei metodi analitici. Del resto, anche col peso atomico attuale, l'Ostwald (1) ed il Seubert (2) ritengono che non vi sia sufficiente ragione di separare un elemento dai suoi omologhi per piccole variazioni nel suo peso atomico, in modo analogo ai casi nichel-cobalto e argo-potassio: ed a maggior ragione quando un altro carattere peculiare per la determinazione del posto degli elementi nella classificazione, come l'isomorfismo, venga ad essere posto in tutta la sua evidenza anche per il tellurio: le ricerche sul peso atomico acquisterebbero una nuova e maggiore importanza.

Ora la questione dell'isomorfismo è rimasta pressochè insoluta, avendo gli studî compiuti in tale argomento portato un contributo troppo piccolo e troppo incerto.

Nella serie degli elementi isomorfogeni, il tellurio viene collocato tanto coi metalli del platino, quanto con lo zolfo ed il selenio (3). Per la prima serie stanno le argomentazioni del Retgers (4) fondate principalmente sulla somiglianza cristallina dell'osmiato potassico col tellurato potassico da una parte, e dall'altra sulla mancanza di somiglianza cristallina dei tellurati coi ferrati, manganati, solfati e seleniati. Inoltre il tellurio è come molti metalli della serie del platino esagonale-romboedrico: ed infine si hanno composti del tipo $R^{I}_{2}R^{IV}Cl_{6}$ che cristallizzano in ottaedri regolari, dove R^{IV} è Te, Pt, Sn, Si, ecc.

Invece la posizione del tellurio nella serie isomorfogena dello zolfo è sostenuta dal Muthmann (5) per l'isomorfismo del tellurio con la modificazione metallica del selenio (sistema esagonale), e l'isomorfismo del bromuro di selenio e potassio ed il cloruro di tellurio e potassio. Recentemente poi Norris e Mommers (6) hanno riscontrato l'isomorfismo fra cloruri e bromuri doppî di selenio e tellurio con la dimetilammina, mentre il composto analogo del platino non è isomorfo con quelli.

(1) Grundlinien der anorg. Chemie.

(2) Zeit. für anorg. Chemie, *33*. 246.

(3) A. Arzruni, *Die Beziehungen zwischen Krystallform und chem. Zusammensetzung*, pagg. 106 e 110; Graham-Otto, I Band.

(4) Zeit. für anorg. Chemie, *12*. 98.

(5) Zeit. Kryst., *17*. 357; Berichte, *26*. 1008.

(6) American chem. Journ., *23*. 486.

È evidente che le relazioni di isomorfismo fra selenio e tellurio sono assai poco spiccate, ed assai meno furono trovate con lo zolfo. Nè sarebbe ragionevole ritenere probabile una stretta analogia del tellurio coi suoi omologhi dato il suo peso atomico elevato: col crescere del peso atomico le relazioni di isomorfismo si fanno, per regola generale, meno spiccate; e ciò in accordo colla variazione dei caratteri chimici e fisici che sono tanto diversi fra selenio e tellurio ed ancor più fra tellurio e zolfo.

Per cui lo studio di Norris e Mommers sui cloruri e bromuri doppî di selenio e tellurio con la dimetilammina, ci rappresenta finora la prova più attendibile delle relazioni di isomorfismo del tellurio col selenio: benchè si tratti di composti isomorfogeni molto complessi, dove i caratteri individuali degli elementi sono mascherati dai gruppi che vi sono uniti; e benchè i citati autori si siano limitati ad osservare sotto il campo del microscopio la formazione di cristalli misti col metodo di Retgers, basato sulla colorazione assunta da cristalli di miscela fra componente colorato e componente incoloro: per cui non si può stabilire se si tratta di vero isomorfismo o di isodimorfismo. Notevole poi il fatto della mancanza di miscibilità col composto corrispondente del platino.

Una maggior somma di dati stanno invece a provare la mancanza di isomorfismo fra solfo, selenio e tellurio. Finora non si è avuto un solo caso di isomorfismo fra solfati o seleniati coi tellurati. Lo studio deve essere limitato ai tellurati alcalini, gli unici solubili nell'acqua. Essi differenziano dai solfati e seleniati per la loro scarsa solubilità, per la forma cristallina e per il contenuto in acqua di cristallizzazione. Lo studio sui tellurati è ancora incompleto specie per ciò che riguarda i tellurati di ammonio e di litio, e non è perciò esclusa la possibilità di rinvenire una forma la quale stia in relazione isomorfa coi seleniati e solfati. Finora gli studî del Retgers (1) dello Staudenmayer (2), del Norris (3) diedero risultati negativi.

Il Retgers si è servito del metodo microscopico, ed ha dimostrato come il manganato potassico ed il ferrato potassico diano miscela isomorfa coi solfati, seleniati, cromati, volframati, molibdati, mentre ciò non avviene col tellurato potassico. Alle prove negative del Retgers si aggiungono quelle dello Staudenmayer, il quale ritenendo che il metodo del Retgers non possa prestarsi ad una affermazione decisiva, ha istituito una serie di esperienze in grande. Però facendo cristallizzare alla temperatura ambiente soluzioni di solfato-cromato-molibdato-volframato potassico con aggiunta di tellurato potassico, non ha ottenuto nessuna formazione di cristalli misti. Così pure Norris e Kingmann, ritenendo che il piccolo contenuto in acqua di cristal-

(1) Zeit. für phys. Chemie, *8*. 70; *10*. 529.
(2) Zeit. für anorg. Chemie, *10*. 217.
(3) American chem. Journal, *26*. 318.

lizzazione del tellurato acido di rubidio ($RbHTeO_4 + {}^1/_2 H_2O$) non costituisce un ostacolo rilevante alla possibile formazione di cristalli misti col seleniato acido di rubidio ($RbHSeO_4$) hanno sottoposto a lenta cristallizzazione alla temperatura ordinaria quantità equimolecolari dei due sali senza poter stabilire in modo decisivo una qualsiasi relazione di isomorfismo. Le prove dei citati autori non ci rendono però conto della incapacità assoluta dei tellurati a dare miscele isomorfe coi solfati, seleniati, ecc., poichè non furono provate tutte quelle condizioni fisiche che permettono l'esplicazione dell'isomorfismo nei casi in cui la posizione degli elementi nel sistema periodico lo renda assai meno evidente e più difficile ad ottenersi.

Il Retgers [1] sempre col metodo microscopico riscontrò isomorfismo fra l'osmiato potassico ed il tellurato potassico. E specialmente per questo fatto a cui aggiunge la grandezza del peso atomico e la mancanza di isomorfismo nelle forme tipiche del gruppo sesto, si ritiene autorizzato a collocare il tellurio nell'ottavo gruppo col rutenio e l'osmio. Si noti che il tellurato potassico cristallizza comunemente con cinque molecole di acqua e solo in condizioni speciali con due molecole. Ed è precisamente quest'ultima forma ($K_2TeO_4 + 2H_2O$) che si mostra isomorfa coll'osmiato potassico ($K_2OsO_4 + 2H_2O$). Il sistema periodico ci insegna come l'identità della forma di combinazione sia accompagnata da relazioni di isomorfismo; ciò che si verifica per elementi i quali hanno una posizione ben determinata e diversa nella classificazione. E qui appunto si tratta di uno di questi casi, causato dall'uguale contenuto di acqua di cristallizzazione. Del resto perchè il rutenato potassico ($K_2RuO_4 + H_2O$) esperimentato dal Retgers [2] non è isomorfo con l'osmiato corrispondente? Eppure rutenio ed osmio stanno fra loro in serie omologa. Questa mancanza deve attribuirsi al contenuto diverso in acqua di cristallizzazione dei due sali, da cui dipende anche la mancanza di isomorfismo dei rutenati coi solfati e seleniati. Invece la constatazione di isomorfia fra solfati e seleniati coi tellurati avrebbe ben altra importanza: poichè malgrado l'osservazione che l'isomorfismo si possa attribuire alla stessa forma di combinazione è però in questo caso la forma più elevata e limite del gruppo sesto.

In favore dell'isomorfismo del tellurio con lo zolfo ed il selenio stanno le ricerche del Muthmann.

I doppî alogenati del tellurio e selenio col potassio e l'ammonio cristallizzano in ottaedri regolari [3]: ma questo fatto non può avere grande importanza, poichè sali doppî regolari della stessa composizione li danno anche elementi com silicio, piombo, stagno, platino che non sono isomorfi fra loro [4].

(1) Zeit. für phys. Chemie, *10*. 533.
(2) Zeit. für phys. Chemie, *10*. 538.
(3) Berichte chem. Gesell., *26*. 1008.
(4) Retgers, Zeit. für phys. Chemie, *12*. 595.

Il Muthmann [1] si fonda anche sulla riscontrata isomorfia del tellurio con la modificazione romboedrica del selenio, ma secondo il Retgers [2] ciò non è una prova convincente di isomorfismo, poichè la maggior parte degli elementi cristallizzano monometrici od esagonali e possono cristallizzare inoltre in romboedri prossimi al cubo come è il caso del selenio e tellurio. Il Muthmann cita inoltre come esempio di isomorfia fra selenio e tellurio il rinvenimento frequente in natura di tellurio elementare mescolato a selenio, come nei cristalli di tellurio di Faczebaya che contengono 5,8 % di selenio corrispondenti cristallograficamente a quelli di selenio da lui studiati, e come nei cristalli di tellurio dell'Honduras contenenti il 29,31 % di selenio.

Il Retgers però afferma che a causa della mancanza di trasparenza dei cristalli, la prova chimica non è indizio sufficiente di miscuglio isomorfo e potrebbe anche trattarsi di semplici miscugli meccanici: occorrerebbe dimostrare che le proprietà fisiche (prove di corrosione) sono una funzione della variazione di composizione chimica. Le ricerche da lui istituite sulla formazione di cristalli misti di zolfo e tellurio depositantesi dalla soluzione unica dei due elementi nel ioduro di metilene, hanno dato risultati negativi [3]. Entrambi gli elementi cristallizzano separati. Però riguardo a queste prove di solubilità nel ioduro di metilene anche le conclusioni del Retgers sono errate, perchè tanto il Muthmann [4] quanto recentemente il Gutbier [5] hanno dimostrato che la solubilità del tellurio nel ioduro di metilene dipende per lo meno in massima parte da una combinazione chimica fra iodio e tellurio, e non può avere che pochissima importanza nella ricerca dell'isomorfismo data la piccolissima solubilità (gr. 0,1 di tellurio in 100 gr. di ioduro di metilene).

Infine si vorrebbe riconoscere una relazione di isomorfismo fra tellurio, selenio e zolfo dal fatto che i tellururi, seleniuri, solfuri di piombo [6] ed argento (Ag_2Te-$PbTe$-Ag_2Se-$PbSe$-Ag_2S-PbS) cristallizzano tutti regolari: ma in causa della troppa semplicità della forma di combinazione è anche naturale che essi si presentino in forme semplici monometriche: potrebbe trattarsi di puro isogonismo per il fatto che sono monometrici: delle esperienze di corrosione su questi cristalli porterebbero certamente una maggior luce in proposito. Tuttavia il trovarsi questi minerali spesso mescolati ha un certo valore e ci rammenta una analogia di formazione.

Gli studî sulla tetradimite (Bi_2Te_3) costituiscono un argomento in favore dell'isomorfismo fra tellurio e solfo. Il Groth [7] pone in serie isomorfa

(1) Zeit. Kryst., *17*. 357.
(2) Zeit. für phys. Chemie, *9*. 399; Zeit. für anorg. Chemie, *12*. 103.
(3) Zeit. für phys. Chemie, *12*. 593.
(4) Zeit. für anorg. Chem. *10*. 218.
(5) Zeit. für anorg. Chemie, *32*. 42.
(6) Zeit. für phys. Chemie, *14*. pag. 17 e *16*. 654.
(7) *Tabellar. Uebersicht der Mineralien*, 1889, pagg. 14-16.

l'arsenico, l'antimonio, il bismuto, il tellurio, la tetradimite che cristallizzano in romboedri simili al cubo. Egli ritiene che la tetradimite sia un miscuglio isomorfo di bismuto e tellurio piuttosto che una combinazione chimica avente relazione isomorfa con i solfuri di arsenico, antimonio, bismuto. Il Retgers (1) combatte queste opinioni: perchè bismuto e tellurio si comportano chimicamente in modo diverso: perchè l'analisi delle tetradimiti più pure ci dimostra la presenza degli elementi in rapporti stechiometrici definiti: perchè pur avendo il composto Bi_2Te_3 lo stesso sistema cristallino del tellurio e bismuto ne diversifica notevolmente per i rapporti assiali. Ritiene poi dubbio l'aggruppamento delle tetradimiti col gruppo As_2S_3, Sb_2S_3, Bi_2S_3 a causa della semplice forma cristallina che spesso si verifica in natura, senza che altri criterî fisici abbiano ad avvalorare l'ipotesi di una isomorfia. Per la tetradimite sembra oramai fuori di dubbio che si tratti di un vero composto, come lo comprova anche lo studio recente chimico fisico del Mönkemeyer (2). Notevoli sono le analisi di Muthmann e Schoder (3) su alcune tetradimiti le quali dimostrano come lo solfo si possa sostituire in rapporti variabili al tellurio senza variazioni nell'abito cristallino: il che parla in favore di una spiccata relazione di isomorfismo dei due elementi.

Nell'affrontare l'intricato e complesso problema, io mi sono proposto lo studio delle più svariate forme di combinazioni del selenio e tellurio per mettere in evidenza qualunque analogia possibile fra loro. I metodi di ricerca seguiti per la prima volta in questo studio, sono fondati sulla applicazione della regola delle fasi, come quella che ha la maggior probabilità di condurci a risultati esaurienti e decisivi.

Parte sperimentale.

Solubilità di cristalli misti di bromotellururo di fenile e bromoseleniuro di fenile.

Uno studio cristallografico su queste due sostanze preparate per la prima volta da Kraft e Lions (4) venne fatto dal dott. Billows (5) dell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Padova. Da esso risulta che il dibromotellururo di fenile $[(C_6H_5)_2TeBr_2]$ è dimorfo: dal solfuro di carbonio cristallizza nel sistema dimetrico, dal benzolo cristallizza nel sistema triclino: i cristalli di color giallo-solfo si mantengono inalterati e lucenti all'aria se ottenuti dal solfuro di carbonio; si alterano nella massa e divengono opachi all'aria se

(1) Zeit. für phys. Chemie, *16*. 610 e Zeit. für anorg. *12*. 103.
(2) Zeit. für anorg. Chemie, *46*. 415.
(3) Zeit. für Kryst. *17*.
(4) Ber. chem. Gesell., *27* 1768.
(5) Rivista di mineralogia e cristallografia italiana, vol. *28*., pag. 33.

ottenuti dal benzolo. Invece il dibromoseleniuro di fenile $[(C_6H_5)_2SeBr_2]$ tanto dal solfuro di carbonio come dal benzolo si presenta in forme del sistema trimetrico. Gli individui cristallini sono rossi e si mantengono lucenti all'aria. Sembrerebbe perciò che anche in composti complessi selenio e tellurio non fossero isomorfogeni: ma diverse prove preliminari di formazione di cristalli misti hanno dimostrato come si possano ottenere cristalli a colorazione intermedia fra quella del composto del tellurio (giallo) e quella del composto del selenio (rosso): cristalli i quali all'analisi risultano contenere entrambi gli elementi.

Ho perciò studiato la curva completa di solubilità dei cristalli misti dei due composti nel benzolo.

Le soluzioni sature a freddo dei rispettivi composti vennero mescolate fra loro in differenti rapporti e poscia lasciate evaporare spontaneamente a temperatura costante di 21° gradi in un termostato. Le soluzioni erano poste in bevute a collo stretto chiuse con un tampone di ovatta leggermente compresso per impedire una evaporazione troppo rapida del solvente. Il tutto veniva agitato frequentemente. Dopo parecchi giorni venne determinato il rapporto dei componenti su parte delle soluzioni: i cristalli depostisi in piccola quantità vennero separati, lavati dapprima con un po' di benzolo, poi con alcool, etere, asciugati ed analizzati.

Il metodo di analisi era il seguente: i cristalli della fase solida e quelli ottenuti per evaporazione della soluzione venivano ossidati con acido nitrico in tubo chiuso. Il prodotto di ossidazione era ripreso parecchie volte a bagnomaria con acido cloridrico (con aggiunta di cloruro sodico per impedire perdite di cloruro di selenio) fino a che cessato lo sviluppo di cloro, l'acido selenico e tellurico fossero ridotti ad acido selenioso e telluroso. Poscia, dalla soluzione acquosa cloridrica si separava il selenio con solfato di idrazina in presenza di tartrato acido di ammonio [1]: nel liquido filtrato si precipitava il tellurio allo stato di solfuro con corrente di H_2S: il solfuro insieme al filtro su cui veniva raccolto si trattava con acido nitrico fumante: scacciato l'acido nitrico si riprendeva con 10 cm^3 di acido solforico concentrato a caldo fino a scomparsa della colorazione rossa dipendente da formazione di ossisolfuro di tellurio $TeSO_3$. Si aggiungevano poi circa 250 cm^3 di soluzione satura a freddo di tartrato acido ammonico, e da questo bagno il tellurio veniva deposto elettroliticamente con l'impiego del catodo rotante [2]. Il mio metodo di analisi fornisce risultati esattissimi.

Dalle quantità di tellurio e selenio ottenute, si risaliva alla quantità dei singoli composti organici nei cristalli misti e nella soluzione.

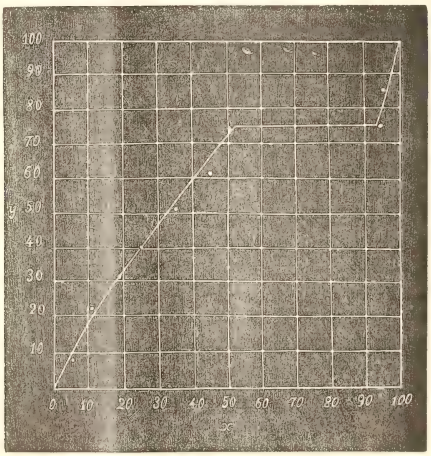
[1] Pellini, *Separazione del selenio dal tellurio*. Gazz. chim. italiana, 1905, a. 514.

[2] Pellini, *Determinazione quantitativa del tellurio per elettrolisi*. Gazz. chim. ital., 1903, a. 515.

Nella tabella che segue sono riportati i risultati.

Numero delle esperienze	1 litro di soluzione contiene: gr. $(C_6H_5)\,Te\,Br_2$	gr. $(C_6H_5)_2\,Se\,Br_2$	milligrammo-molecole $(C_6H_5)_2\,TeBr_2$ c_1	milligrammo-molecole $(C_6H_5)\,Se\,Br_2$ c_2	$c_1 + c_2$	$y = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$	Molecole % $(C_6H_5)_2\,Se\,Br_2$ nei cristalli misti x
1	18.614	—	42.15	—	42.15	0	0
2	17.400	1.448	39.40	3.65	43.05	8.47	4.91
3	16.152	4.172	36.57	10 61	47.18	22.48	10.51
4	15.030	6.210	34.04	15.80	49.84	31.70	18.21
5	13.320	8.148	30.16	20.72	50 88	40.72	24.98
6	11.940	11 420	27.03	29.05	56.08	51.80	34.94
7	10.224	14.608	23.15	37.16	60.31	61.61	44.89
8	7.544	19.876	17.08	50.56	67.64	74.74	51.18
9	6.780	18.984	15 35	48.29	63.64	75.87	94 25
10	3.184	17.392	7.25	44.24	51.45	85 98	95.82
11	—	18.984	—	48.29	48.29	100	100

Mediante i dati di questa tabella esprimendo graficamente i rapporti fra x e y si ottiene la figura qui disegnata:



La figura è completamente analoga a quella data dal tipo 4° di Roozeboom [1].

[1] Zeit. für phys. Chemie, *8*. 525.

La serie di cristalli misti presenta una lacuna fra 51,18 — ± 94,25. La soluzione, la quale dà luogo ai cristalli misti limite, contiene più composto selenico che composto tellurico ed ha il valore di 75,3 %.

La prima specie di cristalli misti (0-51,18 % di composto selenico) appartiene al sistema triclino, cioè al tipo del tellurio-composto: la seconda serie di cristalli misti assai più limitata (94,25-100 %) appartiene al sistema trimetrico, cioè al tipo del selenio-composto.

Si è dunque, nelle condizioni di temperatura da me sperimentata, in presenza di un caso assai netto di isodimorfismo.

In composti complessi il tellurio è isodimorfo col selenio.

Chimica. — *Contributo allo studio dell'isomorfismo fra il tellurio ed il selenio.* Nota di Giovanni Pellini, presentata dal Corrispondente R. Nasini.

Chimica. — *Contributo allo studio dell'isomorfismo fra selenio e tellurio.* Nota dei dott. Giovanni Pellini e Giovanni Vio, presentata dal Corrispondente R. Nasini.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sulle reazioni di doppia decomposizione fra alcooli ed eteri composti.* Nota di G. Bruni e A. Contardi, presentata dal Socio G. Körner.

Il fatto che quando sopra un etere composto si faccia agire un alcool diverso da quello da cui deriva l'etere, si ha in certi casi una reazione di doppio scambio secondo lo schema:

$$R_1 A + R_2 OH \rightleftarrows R_1 OH + R_2 A$$

(R_1 e R_2 rappresentano due radicali alchilici e A un radicale acido) è noto già da moltissimo tempo.

Le prime osservazioni degne di nota su questo argomento si debbono a Friedel e Crafts [1]. Questi autori scaldando per 40 ore a 240° una miscela di acetato amilico ed alcool etilico, osservarono la formazione di una considerevole quantità di acetato etilico. Inversamente per riscaldamento di un mi-

[1] Bull. Soc. chim., *2*, 103 (1864); Lieb. Ann., *133*, 208 (1864).

scuglio di benzoato etilico ed alcool amilico si forma benzoato amilico. Essi conclusero quindi che « questo scambio procede in modo invertibile nel senso « che il radicale con peso equivalente maggiore sposta l'altro e viene a sua « volta spostato da questo ».

Queste osservazioni rimasero isolate per quasi venti anni fino alle ricerche di G. Bertoni [1] sui nitriti alchilici che costituiscono senza dubbio il gruppo più importante e relativamente completo di lavori su questo argomento. Questo autore, richiamando le osservazioni di Friedel e Crafts, osserva assai giustamente come quando si voglia rendere il più possibile completa una reazione di questo genere, convenga eliminare man mano che si forma uno dei nuovi prodotti affinchè esso non agisca a sua volta contro la formazione di nuove quantità.

Basandosi su questo principio, egli fece agire sul nitrito d'amile varii alcooli a numero d'atomi di carbonio inferiore all'amilico ed osservò sempre abbondante formazione del nitrito corrispondente che egli lasciava distillare. Come era da aspettarsi, osservò che la reazione avveniva più facilmente ed in modo più completo per l'alcool metilico, indi per l'etilico e così via, in relazione alla decrescente volatilità dei nitriti relativi.

Abbiamo in seguito una estesa ricerca di T. Purdie [2] il quale però fa agire gli alcooli sugli eteri composti in presenza di piccole quantità di alchilato sodico o di certi sali quali carbonati alcalini e cloruro di zinco, ed in quasi tutti i casi osserva uno scambio. È chiaro però che qui il fenomeno risulta meno netto e si presta a varie interpretazioni, tanto che il Purdie seguendo le idee di Claisen ammette che la reazione avvenga previa addizione di una molecola di alchilato sodico all'etere già presente. Peters [3] applicò poi il metodo di Purdie agli eteri acetacetici; egli notò che partendo dall'etere etilico lo scambio si ha tanto con alcool metilico, quanto con alcooli superiori, fatto da cui risulta senz'altro evidente la natura invertibile della reazione. Verosimilmente però, mentre la presenza dell'alchilato sodico facilita la reazione, essa non è necessaria; infatti più tardi Cohn [4] trovò che scaldando a 130° per quattro ore un miscuglio equimolecolare di mentolo e di etere acetacetico, distilla la quantità pressochè teorica di alcool etilico e il resto della massa è costituito sostanzialmente da acetato mentilico.

Veniamo ora alle ricerche di Gattermann e Ritschke [5] sugli eteri del p. azossifenolo. Essi trovarono che riducendo con soluzioni di soda caustica in alcool etilico o metilico, p. nitro anisolo o p. nitrofenetolo si ottiene sempre un miscuglio di tre corpi e cioè il p. azossianisolo, il p. azossifenetolo e

(1) Gazz. chim. ital, *12*, 435 (1882); *14*, 23 (1884).
(2) Journ. chem. Soc. *51*, 627 (1887); Berichte, *20*, 1554 (1887).
(3) Lieb. Ann., *257*, 353 (1890).
(4) Monatsh. f. Ch., *21*, 200 (1900).
(5) Berichte, *23*, 1738 (1890).

l'etere misto metiletilico. Qui si può ripetere quanto si disse a proposito delle ricerche di Purdie; gli autori però osservarono che anche prima che cominci la riduzione, gli stessi eteri del nitrofenolo subiscono lo scambio, e che trattando ripetutamente con poco alcool, l'azossianisolo passa in soluzione l'etere metiletilico. Questo fatto che la doppia decomposizione avvenga per semplice azione dell'alcool all'infuori della presenza di alcali, è confermato anche da esperienze eseguite l'anno scorso da me nel laboratorio di Bologna.

Infine ultimamente G. Errera [1] comunicò di aver osservato che riscaldando con alcool etilico in presenza di piccola quantità di etilato sodico l'etere metilico dell'acido naftalico, si forma l'etere etilico corrispondente.

Noi abbiamo creduto interessante di studiare qualcuna di queste reazioni in modo quantitativo dal punto di vista chimico-fisico, stabilendo lo stato d'equilibrio cui può pervenire la reazione partendo da entrambi i due sistemi reciproci, la velocità di reazione con cui questo punto viene raggiunto, e le varie condizioni che possono avere un'influenza come la temperatura o la concentrazione dei corpi reagenti. In quasi tutti i casi succitati si ha questa circostanza, che uno dei prodotti della reazione viene ad essere man mano eliminato, o allo stato di vapore come nei lavori di Bertoni e di Cohn, o allo stato solido come in quelli di Gattermann, ciò che contribuisce a spostare continuamente l'equilibrio in un dato senso. Nei primi due lavori questa circostanza è anzi espressamente voluta, ciò che dal punto di vista preparativo è infatti perfettamente razionale. Pel nostro scopo è invece necessario di mantenere il sistema sempre omogeneo e cercare di avere una indicazione sul punto a cui è giunta la reazione in seno ad essi.

Questo problema presenta difficoltà grandi ed in molti casi, crediamo noi, non superabili. La determinazione quantitativa è possibile, ad esempio, nell'eterificazione perchè si può titolare l'acido eccedente, cioè ricorrere ad un processo di una velocità tanto sproporzionatamente grande rispetto a quello studiato, da non poter avere un effetto apprezzabile sullo spostamento dell'equilibrio. Una reazione di questo genere è qui, data la natura dei corpi studiati, ben difficile a trovare. Anche il metodo di Friedel e Crafts in cui durante il riscaldamento la miscela rimane omogenea, non è però attendibile perchè durante la separazione dei prodotti per distillazione l'equilibrio può evidentemente spostarsi.

Noi abbiamo pensato che una misura facile ad eseguirsi ed esatta poteva aversi quando uno dei due alcooli impiegati sia otticamente attivo, purchè l'etere corrispondente abbia un potere rotatorio notevolmente differente, dimodochè spostamenti anche piccoli della reazione producano cambiamenti apprezzabili dell'angolo di rotazione.

Un alcool che corrisponde alle condizioni volute fu trovato nel mentolo.

[1] Rend. Soc. chim. Roma, *3*, 52 (1905).

Esso ha infatti un forte potere rotatorio [1]: $[\alpha]_D = -49,3°$ in soluzione alcoolica 20 %; i suoi eteri posseggono tutti un potere rotatorio notevolmente maggiore, per esempio:

Acetato [2]:	$[\alpha]_D =$	— 79,42°
Ossalato [3]:	»	— 101,5°
Acetacetato [4]:	»	— 68,5°
Benzoato [5]:	»	— 90,9°

Facendo quindi un miscuglio del mentolo con eteri di alcooli inattivi, la formazione progressiva di eteri mentilici sarà accusata da un successivo aumento del potere rotatorio.

Abbiamo anzitutto voluto esaminare se, oltre al caso già trovato dal Cohn dell'acetacetato, anche altri eteri etilici possano subire una scomposizione quando siano riscaldati con mentolo. Noi abbiamo quindi sperimentato sull'acetato, sul benzoato, sul malonato e sull'ossalato etilico; nei primi due casi abbiamo avuto un risultato negativo, almeno nelle condizioni da noi realizzate; negli ultimi due invece la doppia decomposizione ha luogo in misura assai notevole.

1. *Acetato etilico + mentolo.*

Si fece un miscuglio equimolecolare dei due corpi (gr. 44 di etere acetico + gr. 78 di mentolo): Densità a 18° = 0,898; deviazione osservata $\alpha_D = -28°,17°$ da cui $[\alpha]_D = -49,03°$.

Lasciato a sè a temperatura ordinaria dopo 20 ore si dimostrò inalterato. Si richiuse in tubo e si scaldò per 10 ore a bagno maria; riaperto il tubo si ebbe una deviazione identica alla primitiva.

2. *Benzoato etilico + mentolo.*

Si fece un miscuglio di gr. 33,5 di etere benzoico e gr. 39 di mentolo: $D_{18} = 0,970$; $\alpha_D = -24,20°$ da cui $[\alpha]_D = -46.22°$.

Riscaldato in tubo chiuso a 80° per 12 ore il miscuglio si dimostrò inalterato. Nell'ipotesi che una traccia di alcool etilico potesse agire come catalizzatore se ne aggiunsero tre goccie ad un'altra porzione che fu riscaldata come la prima. Anche questa rimase inalterata.

(1) Beckmann, Journ. prakt. Ch. [2] *55*, 15.

(2) Tschugaeff, Berichte, *31*, 364 (1898).

(3) Tschugaeff, Berichte, *35*, 2473 (1902).

(4) Lapworth e Hann, Journ. chem. Soc., *81*, 1499 (1902).

(5) Tutte le osservazioni polarimetriche qui accennate furono fatte in tubi di lunghezza di 1 decimetro.

3. *Ossalato dietilico + mentolo.*

Si mescolarono gr. 15,6 di mentolo (1 molecola) con gr. 43,8 di etere ossalico (3 molecole) [1]. $D_{20} = 1,022$, $\alpha_D = -12,40°$ da cui $[\alpha]_D = -46,20'$.

Scaldato a bagno maria dimostrò un notevole aumento del potere rotatorio; da tre tubi chiusi si ebbe infatti:

dopo	4	ore:	$\alpha_D = -12,67°$
»	12 $^2/_3$	»	» $= -13,90°$
»	24	»	» $= -14,85°$.

4. *Malonato dietilico + mentolo.*

Si mescolarono gr. 15,6 di mentolo (1 molecola) con gr. 32,0 di etere malonico (2 molecole). $D_{20} = 0,994$, $\alpha_D = -14,90°$ da cui $[\alpha]_D = 45,74°$.

La reazione sembra procedere assai lentamente anche a freddo; infatti dopo 18 ore si ebbe $\alpha_D = -15,10°$.

Si scaldarono 3 tubi a bagno maria e si ebbe:

dopo	4	ore:	$\alpha_D = -16,07°$
»	12 $^2/_3$	»	» $= -17,53°$
»	24	»	» $= -19,00°$.

Si vede quindi che tanto nel caso dell'ossalato come in quello del malonato la reazione procede con discreta velocità.

Nell'impiego di questi due eteri per una ricerca quantitativa sorge però una difficoltà non lieve e cioè il dubbio di una possibile formazione, oltrechè dell'etere dimentilico, anche dell'etere misto mentiletilico. Ci riserviamo di stabilire se ciò avvenga realmente; frattanto però credemmo opportuno operare sull'etere di un acido monobasico e scegliemmo l'etere acetacetico già studiato dal Cohn e dal Lapworth e Hann (l. c.).

Etere acetacetico + mentolo.

Le esperienze qui descritte furono eseguite su miscele fatte nelle proporzioni seguenti:

1). Gr. 130 di acetacetato etilico (2 molecole) + gr. 78 di mentolo (1 molecola); adoperammo questa proporzione perchè il mentolo non si scioglie maggiormente a temperatura ordinaria. La miscela ora detta presentava una densità: $D_{20} = 0,970$, $\alpha_D = 17,20°$ da cui $[\alpha]_D = -47,25°$.

2) Ci preparammo poi una miscela uguale a quella a cui condurrebbe la reazione qualora procedesse in modo completo e cioè nel rapporto: 1 mol.

[1] Il mentolo non si scioglie a temperatura ordinaria in proporzione maggiore.

acetacetato mentilico + 1 mol. alcool etilico + 1 mol. acetacetato etilico. L'etere mentilico fu ottenuto secondo le indicazioni degli autori succitati e corrispondeva alle proprietà date da essi. La densità della soluzione ottenuta mescolando gr. 24 di acetacetato mentilico, gr. 4,6 di alcool etilico e gr. 13 di acetacetato etilico era: $D_{20} = 0{,}969$, cioè non sensibilmente diversa da quella della miscela reciproca.

Il potere rotatorio e: $\alpha_D = -36{,}33°$ da cui si calcola per l'etere mentilico $[\alpha]_D = -64{,}63°$.

Entrambe queste miscele lasciate a sè alla temperatura ambiente di circa 20° non alterano sensibilmente il loro potere rotatorio, nemmeno dopo varii giorni; ricercheremo in seguito se effettivamente la reazione non proceda in queste condizioni o se solamente la sua velocità sia divenuta così piccola da non essere apprezzabile. Comunque questo fatto ci fu di grande utilità, perchè permette dopo di aver riscaldato per un certo tempo alla temperatura voluta, raffreddando poi bruscamente il tubo, di eseguire le misure polarimetriche a temperatura ordinaria anche dopo un certo tempo senza introdurre un errore apprezzabile.

Si trattava anzitutto di stabilire se la reazione sia invertibile e quale sia il punto di equilibrio a cui si giunge. Per raggiungere più rapidamente tale risultato, abbiamo operato a 100° riempiendo colle due miscele tubi che si tenevano immersi completamente in un recipiente di acqua bollente. I risultati furono i seguenti:

1) la miscela di etere acetacetico e mentolo che aveva prima un potere rotatorio $= -17{,}20°$ mostrava:

dopo	6	ore	$\alpha_D = -26{,}07°$
»	14	»	» $= -27{,}90°$
»	20	»	» $= -28{,}26°$.

2) La miscela inversa il cui angolo di rotazione iniziale era $\alpha_D = -36{,}33°$ dava dopo 24 ore $\alpha_D = -28{,}20°$.

La differenza fra i due valori finali è tanto piccola da cadere entro gli errori d'osservazione.

Ammettendo *per ora in via approssimativa* che il potere rotatorio specifico del mentolo e dell'acido mentilico restino invariati anche nelle loro soluzioni miste, si calcolerebbe che la reazione:

$$C_3H_5O \cdot COO \cdot C_2H_5 + C_{10}H_{19} \cdot OH \rightleftarrows C_3H_5O \cdot COO \cdot C_{10}H_{19} + C_2H_5 \cdot OH$$

è a 100° in equilibrio quando su 100 parti di mentolo 57,6 si sono trasformate nel corrispondente etere acetacetico. Questo almeno per una miscela della composizione da noi impiegata; certamente variando i rapporti fra mentolo ed etere acetacetico varierà anche il punto di equilibrio e su ciò abbiamo

in corso esperienze. Avendo osservato che la reazione procede a 100° con velocità così considerevole, abbiamo pensato che operando a temperatura alquanto inferiore si sarebbe potuto studiare più esattamente la velocità di reazione. Abbiamo quindi sperimentato a circa 80° riscaldando numerosi tubi delle due miscele nel vapore di benzolo bollente, mediante una disposizione che descriveremo più dettagliatamente altrove; la temperatura si manteneva così esattamente a 79,9°.

La reazione procede infatti anche a questa temperatura ma assai più lentamente. La diminuzione della velocità col decrescere della temperatura è anzi in questa reazione assai più sensibile che nella maggior parte dei casi finora studiati. Diamo senz'altro i risultati ottenuti:

1) partendo dalla miscela primitiva che presenta una deviazione iniziale: $\alpha_D = -17{,}20°$ si ebbe:

dopo	1	ora:	$\alpha_D = -17{,}53°$
»	2	ore:	17,73°
»	4	»	18,13°
»	6	»	18,53°
»	9	»	19,10°
»	12	»	19,60°
»	18	»	20,63°
»	24	»	21,33°
»	30	»	22,13°
»	40	»	22,83°
»	100	»	25,73°

2) Partendo dalla miscela inversa di un potere rotatorio iniziale $\alpha_D = -36{,}33°$ si osservò:

dopo	6	ore:	$\alpha_D = -35{,}50°$
»	18	»	33,90°
»	40	»	32,47°
»	100	»	29,85°
»	155	»	28,73°

A quanto si vede anche dopo 155 ore, sia partendo da un lato, sia dall'altro le due reazioni non si sono incontrate.

Per stabilire più sollecitamente il punto di equilibrio, e nello stesso tempo per vedere se e come questo varii colla temperatura, abbiamo posto a 79,9° un tubo della miscela 1) che era stato previamente riscaldato a 100° per 24 ore e cioè per un tempo più che sufficiente a raggiungere lo stato di equilibrio, e ve lo abbiamo mantenuto per altre 16 ore; aperto abbiamo trovato $\alpha_D = -28{,}20°$ identico cioè al valore raggiunto a bagno maria.

Sembra dunque che la temperatura non abbia una influenza sensibile su questo equilibrio, analogamente a questo si osserva per l'eterificazione dell'acido acetico.

Ciò implica la condizione che la reazione avvenga senza apprezzabile svolgimento od assorbimento di calore, fatto che noi ci proponiamo di verificare.

Abbiamo tentato di applicare alle due serie 1) e 2) le formole relative alla velocità delle reazioni bimolecolari e precisamente alla 1) l'equazione

$$K = \frac{\log (A - x) - \log (B - x) - (\log A - \log B)}{0{,}4343\,(A - B)\,\theta}$$

che vale per quantità non equivalenti dei due reattivi, alla 2) l'equazione più semplice $K = \frac{x}{A\,(A - x)\,\theta}$.

Non si ottengono però in nessuno dei due casi valori di K che presentino una costanza soddisfacente, ma questi valori vanno alquanto decrescendo col crescere del tempo.

Ci proponiamo di studiare le cause di queste deviazioni.

A queste ricerche che hanno un carattere di esperienze preliminari ed orientatrici, ne faremo seguire numerose altre che abbiamo già iniziate seguendo un piano assai vasto.

Chimica. — *Sulla formazione e scomposizione del nucleo indolico per mezzo dell'azione catalitica del nickel.* Nota di O. Carrasco e M. Padoa, presentata dal Socio G. Ciamician.

Chimica. — *Azione dello zolfo sulle soluzioni dei sali metallici.* Nota preliminare di A. Manuelli, presentata dal Socio G. Ciamician.

Chimica. — *Azione del cloruro di solforile sul pirazolo.* Nota di G. Mazzara e A. Borgo, presentata dal Socio E. Paternò.

Chimica. — *Studio cristallografico di alcune nuove sostanze organiche.* Nota del dott. Francesco Ranfaldi, presentata dal Socio G. Struever.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Geologia. — *Studio microscopico di alcune rocce della Liguria occidentale.* Nota del dott. ARISTIDE ROSATI, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Azione della benzilammina sull'α-crotonato etilico* [1]. Nota di G. SANI, presentata del Socio G. KÖRNER.

La possibilità di sostituire una doppia legatura fra due atomi di carbonio cogli elementi di una molecola di ammoniaca, fu da tempo dimostrata dai professori Körner e Menozzi per gli acidi maleico e fumarico e successivamente, con parecchi lavori, venne affermato che tale reazione era affatto generale.

Ciò che ancora ha interesse non dubbio si è lo studio dei composti contenenti residui delle vere ammine aromatiche in luogo di doppie legature in acidi della serie grassa, anche per vedere se prevalgono in essi le proprietà inerenti al gruppo ciclico in confronto di quelle della parte della molecola a catena aperta.

Ho a tale scopo fatto agire sull'alfacrotonato etilico la benzilammina nel rapporto di 1 mol. del primo a 2 mol. della seconda, assieme ad alcool assoluto, scaldando per due giorni a 150° in tubi chiusi.

Dopo questo tempo si ha abbondante formazione di cristalli raggruppati a grandi rose che, estratti dai tubi, eliminato l'alcool, vennero lavati alla pompa con grande quantità d'acqua nella quale sono perfettamente insolubili. La massa cristallina essiccata sopra piastre porose venne disciolta in alcool e fatta cristallizzare, poscia ricristallizzata da alcool ed etere lentamente.

Si ebbero così cristalli splendidi, brillanti, bene sviluppati, anidri, fondenti a 115°-116°. In essi venne determinato l'azoto col metodo Kyeldhal e col metodo Dumas e fornirono i seguenti risultati:

Metodo Kyeldhal.

Sostanza presa	gr. 0,3913
Cm^3 H^2SO^4 normale occorsi . .	2,8
pari ad azoto.	gr. 0,0392

il che da $\%$ = 10,107.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agr. di Perugia.

Metodo Dumas.

Sostanza presa	gr. 0,3927
Azoto ottenuto	V = 36,30
alla pressione	P = 724
alla temperatura	t° = 18°
pari ad azoto	gr. 0,0405

il che da % azoto = 10.32

Ora per

$$\begin{array}{l} CH^3 \\ | \\ C^{\underline{H}}N^{\underline{H}}C^7H^7 \\ | \\ CH^2 \\ | \\ C^{\underline{O}}N^{\underline{H}}C^7H^7 \end{array}$$

che non è altro che l'ammide benzilata dell'acido benzilamminobutirrico; si calcola azoto % = 9,80

Di questo composto il prof. Artini ebbe la bontà di fare lo studio cristallografico e mi comunicò i seguenti risultati:

« Sistema trimetrico:

$$a : b : c = 1 , 1113 : 1 : 0 , 4774 .$$

« Forme osservate:

$$\{100\} \cdot \{001\} \cdot \{110\} \cdot \{101\} \cdot$$

cristalli allungati secondo l'asse y.

$$(100) \cdot (110) = 48^{\circ} , 1' .$$
$$(100) \cdot (101) = 65^{\circ} , 45' .$$

« Sfaldatura perfetta secondo {100}. Piano degli assi ottici {010}; bisettrice acuta normale a }100{ ».

Non solo il comportamento di questa distanza di fronte ai solventi e la sua forma cristallina sono caratteristici, ma ancora le sue proprietà chimiche presentano il più grande interesse; infatti la presenza di residui della benzilammina imparte tale stabilità alla molecola che non si riesce a separare, per saponificazione con barite, quel residuo di benzilammina che è contenuto sotto forma ammidica, mentre è noto che nelle ammidi naturali l'azoto ammidico è labilissimo.

Geologia. — *A proposito della esistenza del Culm nelle Alpi Carniche.* Nota di P. Vinassa de Regny, presentata dal Socio G. Capellini.

Recentemente P. G. Krause ha riaperta la questione dell'esistenza del Culm nella catena principale delle Alpi Carniche, con alcune osservazioni le quali a mio parere non apportano nuove convincenti ragioni (1).

È noto che Foetterle e Stur prima e Stache più tardi, avevano espresso le loro ragioni a favore dell'esistenza del Culm nelle Alpi Carniche. Il Taramelli invece in varî lavori si era dimostrato contrario.

Il Frech, la cui noncuranza per qualsiasi studio nostro risulta ben chiara ad ogni pagina della sua opera, non tenne alcun conto dell'opinione del geologo italiano e segnò estesamente il Culm nelle Alpi Carniche (2).

Di uguale opinione fu pure il Geyer fino al 1897. Ma in quell'epoca anche il Geyer (3) accolse l'idea del Taramelli negando l'esistenza del Culm e riferendo al Siluriano i terreni sin'allora da lui ascritti al Carbonifero inferiore.

Le ricerche mie e del dott. Gortani (4), per quanto limitate a pochi ma tipici punti delle Alpi Carniche, hanno confermata la mancanza del Culm, poichè abbiamo trovato immediatamente sovrastanti ai calcari devoniani fossiliferi ed agli scisti e calcari siluriani gli scisti pure fossiliferi del Carbonifero superiore, in trasgressione.

Una scoperta di grande interesse fu quella della *Nevrodontopteris auriculata* negli scisti nerastri addossati al devoniano del Coglians presso al ricovero Marinelli. Di essa parlai subito nella adunanza straordinaria appositamente tenuta al Ricovero la sera del 22 agosto 1905 (5).

Per tale scoperta, unita ad altri risultati della campagna geologica della estate scorsa, la trasgressione carbonifera veniva estesa per parecchi chilometri, come ho dimostrato in un mio recente lavoro sull'argomento (6).

(1) *Ueber das Vorkommen von Kulm in der karnischen Hauptkette*, Verh. d. k. k. geol. Reichsanst., 1906, 2, pag. 64, adun. 30 gennaio 1906.

(2) Frech F., *Die Karnischen Alpen*, pag. 303 e carta.

(3) *Ueber neue Fundpunkte von Graptolitenschiefern in den Südalpen und deren Bedeutung für den alpinen « Kulm »*, Verh. d. k. k. geol. Reichsan., 1897, 12-13.

(4) *Osservazioni geologiche sui dintorni di Paularo*, Boll. S. geol. it., XXIV, 1, pagg. 1-16 e carta; *Fossili carboniferi del M. Pizzul e del Piano di Lanza*, ibidem, XXIV, 2, pagg. 461-605; *Nuove ricerche geologiche sui terreni compresi nella tavola « Paluzza »*, ibidem, XXIV, 2, pagg. 720-723.

(5) Boll. Soc. geol. it., XXIX, pag. LVI-LVII.

(6) *Sull'estensione del Carbonifero nelle Alpi Carniche*, Boll. S. g. it., XXV, 2, seduta del 4 marzo 1905.

Evidentemente il Krause ignorava completamente la scoperta della felce e le poche ma importanti deduzioni che credei doverne ritrarre, quantunque il Bollettino della nostra Società geologica fosse pubblicato già da qualche tempo quando egli fece la sua comunicazione. Ed io credo che se avesse avuto notizia di quanto avevo scritto non avrebbe forse pubblicato, almeno nella forma attuale, la sua Nota. Non era infatti il caso di dire: « Geyer und die Italiener halten eben, weil diese Gesteine (Kieselschiefer) in der in der Rede stehenden Schiefergruppe (Graptolithenführend) vorkommen, diese in ihrer Gesammtheit für silurisch » (1).

Le ragioni per cui il Krause trova che gli scisti in questione appartengono al Culm sono di due ordini: tettoniche cioè e paleontologiche.

Egli avverte, e con ragione, che in molti luoghi gli scisti ricoprono i calcari devoniani. « Die oberdevonischen Plattenkalke, egli scrive, haben hier (am Grossen Pal) eine ganz schwach, unregelmässig wellige Oberfläche. An diese schmiegen sich auf das engste die Sedimente der Schiefergruppe an. Sie machen den Eindruck, als ob sie darauf gegossen wären, wenn ich so sagen darf. So fest und innig ist der beiderseitige Verband » (2).

Effettivamente è così: gli scisti carboniferi riempiono le più piccole insenature, le più dolci curve dei calcari devoniani. Ma questo si vede non solo a Pal Grande, ma in altri luoghi ancora e più specialmente alla base del Coglians, come ad esempio lungo la discesa dal Ricovero Marinelli a Timau. Questi scisti però non sono del Culm, ma sibbene del Carbonifero superiore trasgressivo.

Il Krause avrebbe ragione se tali scisti, come volle il Geyer generalizzando troppo, si considerassero tutti siluriani: occorrerebbe infatti immaginare un rovesciamento fortissimo e difficilmente esplicabile. Ma ammettendo, come credo di aver dimostrato, che si abbiano scisti abbastanza simili non solo siluriani ma anche carboniferi e talvolta, come ad esempio al Ricovero Marinelli, anche a contatto, e che la trasgressione neocarbonifera sia molto più estesa di quanto sinora non si credesse (3), cessa ogni possibile opposizione tettonica posta innanzi dal Krause.

Resta adunque la sola quistione paleontologica. Il Taramelli, il Geyer, il Frech avevano trovati dei frammenti mal determinabili di tipo calamitoide. Com'è ben naturale, il Frech che in essi voleva riconoscere dei tipi del Culm li ha determinati come tali (4); il Geyer che credeva tutti gli scisti

(1) Krause, op. cit, pag. 67.

(2) Krause, op. cit, pag. 65.

(3) Vedi la cartina schematica annessa al mio lavoro: *Sull'estensione del carbonifero superiore nelle Alpi Carniche*, Boll. S. g. it., XXV, 2,. La trasgressione è però certamente anche più estesa.

(4) *Ueber tektonische Veränderungen in der Form untercarbonischer Calamarien*, N. Jahrb. für Min. Geol. u. Pal. 1889, I. pagg. 259-261.

siluriani per aver trovato graptoliti in altri scisti da lui creduti identici a quelli con avanzi di piante, diceva a ragione che gli esemplari non permettevano determinazione sicura e li chiamava pseudocalamiti.

La fortunata scoperta della *Nevrodontopteris auriculata* e quella successiva di una tipica *Calamites Cisti* Brgrt. (¹), ha quindi per la quistione che ci occupa una grande importanza. Anche il Krause ha avuto la ventura di scoprire due impronte vegetali, che egli non figura, e che il Potonié ha determinato come *Stigmaria ficoides* ed *Asterocalamites scrobiculatus*. Di questi due fossili, solo l'*Asterocalamites* è tipico del Culm; ma è ben noto come la determinazione di questi avanzi, quando non siano perfettamense conservati, riesca abbastanza difficile.

Dal canto mio faccio notare come l'esemplare di *Nevrodontopteris auriculata* sia talmente identico come forma e tipo di fossilizzazione agli esemplari del M. Pizzul, da poter essere scambiato con uno di essi.

Resterebbe infine la stranezza rilevata dal Krause della esistenza del Carbonifero inferiore a Nötsch e della mancanza del Culm nella catena carnica. Ora a me sembra logico che a spiegare tale stranezza due modi si presentino: o la effettiva presenza del Culm nella catena carnica, come vuole il Krause, o una revisione della fauna di Nötsch che potrebbe anche riserbare qualche sorpresa.

Concludendo quindi, a me pare che la Nota del Krause non apporti sino ad oggi alcun nuovo valido fondamento per dimostrare l'esistenza del Culm nella catena principale delle Alpi Carniche; ma che intanto si possa ammettere l'esistenza di scisti, arenarie ecc., del Neocarbonifero fossilifero, discordanti sul Devoniano non solo, ma anche sopra scisti pure fossiliferi appartenenti al Siluriano.

Biologia. — *Sulla possibilità di accumulare arsenico nei frutti di talune piante.* Nota preliminare di B. Gosio, presentata dal Socio R. Pirotta.

Biologia. — *Sulla produzione di cumarine fermentative nello sviluppo di taluni ifomiceti.* Nota preliminare di B. Gosio, presentata dal Socio R. Pirotta.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

(¹) Vinassa de Regny P., *Sull'estensione del Carbonifero superiore nelle Alpi Carniche*, Boll. S. geol. it.. XXV, 2, figg. 1, 2, 3; Gortani M., *Sopra alcuni fossili neocarboniferi delle Alpi Carniche*, Boll. S. geol. it., XXV, 2, figg. 2. 3.

Zoologia. — *Sviluppo dell'*Ageniaspis fuscicollis (Dalm.) Thoms. *(Chalcididae)*. Nota preliminare di FILIPPO SILVESTRI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Continuando ad occuparmi della biologia degli Imenotteri parassiti ho scelto per oggetto di ricerche l'*Ageniaspis fuscicollis* (Dalm.) Thoms, la stessa specie nello sviluppo della quale fu scoperto dal Marchal il primo caso di una singolare poliembrionia tra gli insetti. L'autore ricordato pubblicò nel 1904 [1] un esteso lavoro, assai interessante, sullo sviluppo di tale insetto, però non si occupò della formazione dei globuli polari e dell'origine dell'involucro degli embrioni, che egli chiamò *trophamnios*. Su tali punti io ho specialmente fermato la mia attenzione.

L'*Ageniaspis fuscicollis* da me studiato è parassita del *Prays oleellus* e sembra, secondo il parere di valenti conoscitori di microimenotteri, specificamente non diverso dall'*Ageniaspis fuscicollis* parassita di varie specie di *Hyponomeuta*, che fu studiato dal Marchal. Mi riserbo però più tardi, quando avrò abbondante e fresco materiale di detta specie ottenuto da *Hyponomeuta*, di fare un minuto esame comparativo tra gli esemplari parassiti dell'ultimo genere ricordato e quelli parassiti del *Prays*, poichè essendo il numero delle loro generazioni, come dirò appresso, molto diverso e diverso il numero degli embrioni, che si sviluppano da un uovo, dubito che possa trattarsi almeno di una sottospecie distinta.

Uovo ovarico a completo sviluppo.

L'uovo ovarico di *Ageniaspis fuscicollis* allo stadio di ovocite di 1° ordine ha la forma di un fiasco della lunghezza di μ. 66 [2] dei quali 29 spettano alla pancia del fiasco, che ha una larghezza massima di μ. 13, e 37 al collo. Questo è molto più largo all'apice che verso la parte mediana. Tutto l'uovo è circondato da un sottilissimo chorion che in corrispondenza alla parte anteriore del collo presenta una piccola introflessione imbutiforme, che forse rappresenta il micropilo, come ritenne il Bugnion [3]. L'ooplasma ha una struttura finamente granulosa e contiene poche e piccole sfere di grasso variamente disposte.

(1) Archivio di zool. exp. et gén. (*4*), II.

(2) Secondo il Bugnion ed il Marchal l'uovo di questo *Ageniaspis* parassita dell'*Hyponomeuta* misura in lunghezza mm. 0,14.

(3) Recueil zoologique suisse, tome V, fascicules 3-4 (1891).

Il nucleo dell'ovocite di 1° ordine si trova sempre presso l'estremità anteriore del collo e si presenta sotto forma di tre o quattro masse di cromatina compatte, allungate e separate fra di loro da un solco chiaro. Il nucleolo è sferico e situato al polo opposto dell'uovo, poco lungi dalla base della parte allargata di esso. Il Bugnion ed il Marchal non osservarono il vero nucleo dell'uovo e ritennero come tale il nucleolo.

La struttura dell'uovo dell'*Ageniaspis fuscicollis* (Dalm.) corrisponde a quella da me descritta [1], per l'uovo del *Litomastix truncatellus* (Dalm.).

Deposizione dell'uovo.

L'uovo viene deposto nello stadio sopradescritto nell'uovo di *Prays oleellus* tanto da femmine ancora vergini come da femmine, che hanno subìto l'accoppiamento; in quest'ultimo caso l'uovo però ora è deposto fecondato ed ora non fecondato come nel caso di femmine vergini.

L'uovo appena deposto conserva la forma a fiasco, ma presto il suo collo si ritira verso la parte allargata insieme al nucleo restando di esso per qualche tempo una piccola porzione come appendice dell'uovo, che in seguito viene del tutto riassorbita. L'uovo deposto, nei preparati dopo fissazione e le altre manipolazioni necessarie alla loro colorazione e conservazione in balsamo, misura in lunghezza μ. 38-44 e in larghezza μ. 13-14.

Il nucleo dell'uovo appena deposto si presenta sotto forma più o meno sferica o leggermente ovale e con la cromatina in grossi granuli ammassati insieme a guisa di morula.

Il nucleolo conserva la sua forma sferica e presso a poco la posizione che aveva nell'uovo ancora contenuto nell'ovario.

Maturazione dell'uovo.

La maturazione dell'uovo avviene in modo identico nelle uova partenogenetiche come in quelle fecondate.

Dopo la deposizione il nucleo dell'ovocite di 1° ordine passa nello spazio di 10-20 minuti allo stadio di anafasi (in metafasi non ho potuto osservarlo in alcun uovo) avente la posizione più o meno obliqua rispetto all'asse longitudinale dell'uovo e quindi dà origine a due masse cromatiniche delle quali una rappresenta il 1° globulo polare, l'altro il nucleo dell'ovocite di 2° ordine.

Il 1° globulo polare è più o meno avvicinato alla parte anteriore dell'uovo, il nucleo dell'ovocite di 2° ordine per lo più non giunge oltre la metà anteriore dell'uovo, alle volte un poco più indietro.

[1] Cfr. questi stessi Rendiconti (5), vol. XIV, 2° sem. 1905, pag. 535 e Ann. R. Scuola Sup. Agricolt. Portici, vol. VI (1906).

A mezz'ora dalla deposizione il 1° globulo polare ed il nucleo dell'ovocite di 2° ordine sono già passati ciascuno allo stadio di metafasi con fuso tronco agli estremi e avente l'asse longitudinale parallelo o di poco obliquo all'asse longitudinale dell'uovo.

Dallo stadio di metafasi si passa a quello d'anafasi e quindi si ha il 1° globulo polare diviso in due nuclei come pure il nucleo dell'ovocite di 2° ordine, che dà origine al 2° globulo polare ed al pronucleo femminile. Questo resta nella parte posteriore dell'uovo presso il nucleolo e presto si ricompone in un grosso nucleo completo sferico con membrana e reticolo, il 2° globulo polare e i due nuclei derivati dalla divisione del 1° globulo polare si avvicinano fra di loro nella parte anteriore dell'uovo, ma il nucleo anteriore del 1° globulo polare è sempre un poco distante dal posteriore, che invece è vicinissimo, contiguo spesso, al 2° globulo polare. Questi tre nuclei appariscono sotto forma di masse cromatiniche più o meno compatte, mentre il pronucleo femminile si è composto, come ho detto, in nucleo completo allo stato di riposo.

In alcune uova ho osservato una fusione completa delle tre masse polari di cromatina.

La parte anteriore dell'ooplasma, che contiene i globuli polari, appare in questo stadio distinta dal resto dell'ooplasma per mezzo di un tenue solco e assume con minore intensità i colori plasmatici; abbiamo perciò a tale stadio diviso l'uovo in una parte anteriore, meno tingibile, corrispondente alla terza o quarta parte dell'uovo intero e contenente tre masse di cromatina, delle quali due rappresentano i nuclei derivati dalla divisione del 1° globulo polare ed una il 2° globulo polare, ed una parte, che comprende tutto il resto dell'uovo e che contiene il pronucleo femminile, il pronucleo maschile, se l'uovo è stato fecondato, ed il nucleolo: la prima parte dell'uovo contenente i globuli polari si può designare col nome di parte polare, l'altra di parte embrionale.

Il nucleolo durante la formazione dei globuli polari non cambia nè di forma, nè di posizione.

Fecondazione dell' uovo.

Nell'uovo fecondato appena deposto si osserva lo spermatozoo nella parte posteriore dell'uovo sempre più o meno avvicinato al nucleolo e con la coda ben distinta. In seguito la testa dello spermatozoo, che era a forma di un pistillo con la parte assottigliata corrispondente al polo libero, si accorcia, si separa dalla coda, si arrotonda dapprima, poi si scinde nei suoi cromosomi e forma un nucleo completo con membrana e reticolo, il pronucleo maschile, che si addossa a quello femminile e con esso si fonde dando così il 1° nucleo di segmentazione.

Mentre si compie il sopradescritto fenomeno, il nucleolo conserva ancora la sua forma e posizione.

Segmentazione.

Il primo nucleo di segmentazione, derivato soltanto dal pronucleo femminile nelle uova partenogenetiche o dall'unione del pronucleo maschile col femminile in quelle fecondate, si trova sempre verso la parte mediana o terza parte posteriore della regione embrionale dell'uovo ed ha poco lungi da esso il nucleolo.

Prima divisione di segmentazione. — A circa 3 ore dalla deposizione il 1° nucleo di segmentazione passa allo stadio di profasi e poi a quello di metafasi tipica con l'asse longitudinale del fuso parallelo all'asse longitudinale dell'uovo o di poco obliquo, così da esso derivano i primi due nuclei di segmentazione, che vengono a trovarsi in una posizione più o meno parallela allo stesso asse longitudinale dell'uovo. Con la divisione del 1° nucleo di segmentazione anche l'ooplasma embrionale si divide in due parti e si hanno così le prime due cellule di segmentazione che sono più o meno sferiche e situate nella metà posteriore dell'uovo l'una innanzi all'altra.

Il nucleolo passa intero ad una delle due cellule di segmentazione, la quale è per lo più quella situata presso il polo posteriore dell'uovo, alle volte l'altra.

Mentre nella parte embrionale dell'uovo è avvenuta la formazione delle prime due cellule di segmentazione, la parte polare di esso si è estesa lateralmente e posteriormente a circondare con porzione di protoplasma le due cellule di segmentazione, ed i tre nuclei polari si sono scissi nei loro cromosomi formando tre nuclei completi con membrana e reticolo.

Invece di ritenere che la parte polare dell'uovo si estende posteriormente a circondare le prime due cellule di segmentazione, si può anche ammettere che la parte periferica dell'ooplasma embrionale non prende parte alla formazione delle prime due cellule di segmentazione e che resta continua con l'ooplasma polare a formare un involucro intorno a dette cellule, che sono le embrionali.

Durante questo stadio, che si completa in circa 4 ore dalla deposizione, la parte polare dell'uovo è ancora molto estesa anteriormente, i suoi tre nuclei sono addossati variamente l'uno all'altro ed il suo protoplasma comincia a presentarsi non più omogeneo, ma come formato da una sostanza spugnosa più tingibile nelle pareti divisorie delle cavità.

L'uovo intero si presenta in questo stadio più o meno ellittico e senza appendici alla parte anteriore polare.

Seconda divisione di segmentazione. — La seconda divisione di segmentazione non avviene sincronicamente in ambedue le cellule embrionali, ma

con notevole distanza di tempo tra quella della cellula, alla quale non è passato il nucleolo e quella dell'altra, in ambedue però con le fasi tipiche della divisione indiretta.

La prima cellula, che si divide, è quella senza nucleolo ed il suo fuso è disposto con l'asse longitudinale più o meno obliquamente all'asse longitudinale dell'uovo.

Verso la 15ª ora dalla deposizione è completata la divisione della cellula embrionale senza nucleolo ed allora la regione embrionale è composta di tre cellule. Nello spazio di circa 5-8 ore avviene la divisione della cellula, alla quale era passato intero il nucleolo e così si ha completata la seconda divisione di segmentazione, risultato della quale è la formazione di 4 cellule embrionali.

Il nucleolo è sempre molto ben visibile addossato al nucleo di una delle due cellule embrionali fino a che quella, che ne è sprovvista, non si è divisa, mentre però avviene la divisione di quest'ultima cellula, il nucleolo comincia a frazionarsi e a disperdersi per il protoplasma della cellula che lo contiene, così che quando si hanno tre cellule embrionali esso non si rileva affatto o poco e solo per la maggiore tingibilità del protoplasma.

La parte polare dell'uovo circonda sempre le cellule embrionali, è ancora più estesa nella parte anteriore dell'uovo ed i suoi nuclei si sono allargati molto ed in parte od in tutto frazionati o divisi direttamente ed irregolarmente per il protoplasma.

Terza divisione di segmentazione. — Durante questo stadio continuando a ritardare la divisione delle due cellule derivate da quella col nucleolo si ha una divisione delle due cellule senza nucleolo, alla quale non ne corrisponde una delle prime nominate; per tal modo si ottiene uno stadio, in cui la regione embrionale è composta di sei cellule. Ciò ha luogo a circa due giorni dalla deposizione.

Quarta divisione di segmentazione. — La quarta divisione di segmentazione porta il numero delle cellule embrionali senza nucleolo a otto e durante questa compiendosi anche la terza divisione delle cellule embrionali, che hanno ricevuto la sostanza nucleolare, si ottiene uno stadio in cui l'uovo di *Ageniaspis* è composto di dodici cellule embrionali e di un involucro, che possiamo chiamare senz'altro col Marchal *trophamnios*, derivato dall'ooplasma polare e contenente pure i nuclei polari, i quali si sono diffusi per la massa protoplasmatica dividendosi, come ho detto, direttamente e irregolarmente, e formano ciò che il Marchal chiamò *paranucleo*.

Ulteriori stadii di sviluppo.

Col materiale, che ho avuto fino ad ora a mia disposizione, non ho potuto seguire la segmentazione oltre lo stadio di dodici cellule embrionali; però non c'è alcuna ragione di credere che essa non avvenga in seguito in modo affatto normale.

Io non ho osservato la prima separazione di gruppi di cellule embrionali, che avviene per mezzo del *trophamnios*, che aumentando di volume si insinua tra le cellule embrionali stesse dividendole in tanti gruppi, ciascuno dei quali darà origine ad un embrione, ma dall'osservazione degli stadî posteriori ritengo che avvenga come fu descritta dal Marchal.

Negli stadî posteriori io ho osservato complessi poliembrionali derivati da un uovo, che sono formati da uno strato esterno molto sottile di cellule, che io ritengo adipose, da uno strato interno di protoplasma ricchissimo di nuclei, che è il *trophamnios*, e che si continua a guisa di maglie più o meno grosse intorno a ciascun gruppo di cellule embrionali, il quale rappresenta una vera morula. Di queste morule il numero maggiore da me esaminato in una massa poliembrionale è stato di 17, il minore di 11.

Il Bugnion ed il Marchal descrissero l'involucro esterno del complesso poliembrionale o membrana avventizia dell'*Ageniaspis* come formato da un epitelio disposto similmente a quello pavimentoso, ma a me sembra che sia costituito da cellule adipose molto irregolari per forma. In qualche massa poliembrionale situata in mezzo a tessuto adiposo io non ho visto alcuna cisti interposta fra esso e il *trophamnios*; ciò mi fa ritenere che la membrana esterna o cisti della massa poliembrionale sia sempre derivata da tessuto adiposo soltanto.

Rispetto alla struttura del *trophamnios* noterò che in preparati fissati con acqua bollente esso appare composto di un protoplasma contenente grandi nuclei a contorni irregolari e con granuli di cromatina fittamente disposti; in preparati fissati invece con sublimato alcoolico-acetico e che sembrano bene conservati, nella massa protoplasmatica granulosa esso presenta numerosissimi nuclei vescicolari con piccoli granuli di cromatina e grossi granuli di altre sostanze in numero vario.

La massa poliembrionale dell'*Ageniaspis fuscicollis* nel *Prays oleellus*, quando contiene embrioni prossimi a diventare liberi e in numero di undici, è nastriforme e misura in lunghezza circa mm. 4. Gli embrioni si trovano allineati l'uno di seguito all'altro, spesso verso la parte anteriore e la posteriore qualcuno di fianco ad un altro.

Note biologiche.

L'*Ageniaspis fuscicollis* diventa adulto molto raramente nelle larve di *Prays* (almeno per ciò, che ho osservato fino ad ora su materiale della Calabria), di regola lo diventa nelle crisalidi di tale specie, mentre secondo il Bugnion ed il Marchal la stessa specie di *Ageniaspis* diventa adulto nelle larve di *Hyponomeuta*.

L'*Ageniaspis fuscicollis* parassita nel *Prays* compie tre generazioni in un anno quante ne ha la specie, che lo ospita, mentre la stessa specie parassita nell'*Hyponomeuta* ha una generazione per anno.

Se gli studî comparativi, che io farò tra breve, confermeranno in modo assoluto l'identità specifica dell'*Ageniaspis* parassita del *Prays* con quello dell'*Hyponomeuta*, si dovrà concludere che lo sviluppo di un parassita endofago è in questo, ed io credo in molti altri casi, sincrono a quello della specie che lo ospita, anche quando esso attacca specie molto diverse per ciclo biologico, per modo che ad un dato numero di generazioni di ciascuna specie corrisponde un ugual numero di generazioni del parassita.

Numeri di individui che si sviluppano da una Crisalide di Prays e loro sesso.

Alla fine di aprile posi 21 crisalidi di *Prays oleellus* parassitizzate, separate l'una dall'altra, in tubi di vetro ed ottenni gli individui qui sotto indicati.

	♀♀		♂♂
1ª crisalide	12	11ª crisalide	12
2 »	13	12 »	11
3 »	11	13 »	10
4 »	9	14 »	11
5 »	11	15 »	11
6 »	11	16 »	5
7 »	7	17 »	8
8 »	10	18 »	15
9 »	10	19 »	10
10 »	6	20 »	13
		21 »	12

Da tale elenco risulta che il numero maggiore di individui ottenuti da una crisalide è stato di 15, il minore di 5 ed il più frequente di 10-13. Come sopra ho notato, in una massa poliembrionale contai 17 morule, perciò in qualche caso si potranno ottenere alcuni individui in più di 15; oppure alcuni individui possono andar perduti? Tornerò su questo argomento in seguito.

Dall'uovo di *Ageniaspis fuscicollis* deposto nell'*Hyponomeuta*, secondo le osservazioni del Bugnion e del Marchal, si ottengono in media un centinaio di individui; pertanto tra l'*Ageniaspis fuscicollis*, che parassitizza il *Prays* e quello che parassitizza l'*Hyponomeuta*, si ha una grande differenza nel numero degli individui, che si sviluppano da un uovo. Se realmente l'*Ageniaspis fuscicollis* del *Prays* non è distinto specificamente da quello dell'*Hyponomeuta*, si deve ammettere che individui di una stessa specie completamente isolati per molte generazioni, pur conservando inalterati i loro caratteri specifici, sono giunti in seguito a continuata selezione a produrre

uova capaci di dare origine a tanti embrioni quanti è capace di nutrirne il corpo della specie, nella quale vengono depositate.

Risulta pure dall'elenco degli individui di *Ageniaspis* ottenuti da 21 crisalidi di *Prays*, che gli individui di ciascuna crisalide sono tutti del medesimo sesso. Avendo io constatato che tanto nell'uovo partenogenetico come in quello fecondato avviene la formazione di ambedue i globuli polari, e che il pronucleo femminile da solo si sviluppa ulteriormente nelle uova partenogenetiche, si può ritenere come certo che la determinazione del sesso è dovuta, come nel *Litomastix truncatellus*, alla fecondazione; che cioè uova fecondate diano soltanto femmine e uova partenogeniche soltanto maschi.

Conclusione.

I fatti principali che risultano dalle mie ricerche sullo sviluppo dell'*Ageniaspis fuscicollis* parassita endofago del *Prays oleellus*, sono:

1° Che nella maturazione dell'uovo partenogenetico come in quello fecondato si ha la formazione di due globuli polari e che essi per lo più restano fra di loro distinti e formano ciò che il Marchal chiamò *paranucleo* del *trophamnios*, che si divide sempre direttamente e irregolarmente;

2° Che non tutto il protoplasma dell'uovo prende parte alla formaziene delle cellule embrionali, ma che la parte anteriore di esso contenente i globuli polari e forse la parte periferica di tutto il resto di esso, costituisce un involucro, prima intorno a tutte le cellule embrionali, poi intorno a tutta la massa poliembrionale ed a ciascun embrione, involucro che dal Marchal ha ricevuto per la sua funzione il nome di *trophamnios*.

Nell'*Ageniaspis fuscicollis* la parte polare dell'ooplasma ed i globuli polari assumono una funzione protettiva e di nutrizione della parte embrionale dell'uovo come appunto avevo io sospettato dopo lo studio della formazione e del destino dei globuli polari nel *Litomastix truncatellus*. Ormai anche per l'*amnios* o *trophamnios* dei *Proctotrypidae* ed altri Imenotteri parassiti, si può con molta probabilità di non errare ammettere una origine uguale a quella da me per il primo descritta nel *Litomastix truncatellus* ed ora nell'*Ageniaspis fuscicollis*.

Pertanto intorno al particolare destino dei globuli polari in molti Imenotteri parassiti non può cadere ormai dubbio alcuno, e con la scorta di tali fatti si potrà in altri insetti ed in altri animali riprendere le ricerche intorno ai globuli polari con probabilità di scoprire altre cose interessanti.

Commemorazione di Cristoforo Colombo, letta dal Socio Dalla Vedova, nella seduta del 20 maggio 1906.

In questo giorno si compiono i quattrocent'anni dalla morte di Cristoforo Colombo, mancato a' vivi il 20 maggio 1506.

Parecchi comitati e parecchi sodalizi scientifici in Italia e fuori si disposero a solennizzare questa ricorrenza storica e la nostra Accademia fu espressamente invitata dalla *Sociedad Mexicana de Geografia y Estadistica* ad associarsi alla sua commemorazione.

In verità noi Italiani non dureremo fatica ad assentire di gran cuore a questo omaggio tributato alla memoria del nostro glorioso connazionale; e ciò tanto più, venendoci l'invito da un paese, verso il quale fu il Colombo stesso ad aprire per sempre la via attraverso il temuto *Mare tenebrosum* e dai discendenti di quella nazione spagnuola, senza la cui magnanima Regina sarebbero forse svanite infruttuosamente le insigni virtù del grande navigatore.

La quale ultima osservazione mi è particolarmente suggerita dalla memoria di uno strano monito, che sentii rivolgere all'Italia nel VII Congresso internazionale degli Americanisti, tenuto a Berlino nel 1888; dove, avendo io riferito su quanto stava allora facendosi in Italia per celebrare degnamente il IV Centenario della scoperta dell'America, cioè a dire avendo fornito qualche particolare sui lavori avviati a Roma per la pubblicazione della monumentale *Raccolta Colombiana*, uno Spagnuolo venne su a dire, che avrebbero fatto bene gl'Italiani a restringere le loro ricerche alla sola genealogia di Cristoforo Colombo, perchè infine, quanto alla grande impresa, tutte le navi e tutti gli equipaggi, tranne Colombo, erano spagnuoli (1).

Non fu difficile allora ridurre alla giusta misura l'intemperante osservazione; ma le risposte migliori vennero qualche anno più tardi, quando uscirono i 14 grandi volumi della *Raccolta Colombiana* ed il Presidente della R. Società Geografica di Londra ne dava notizia a' suoi colleghi con parole di alta ammirazione, notando che l'Italia « non avrebbe potuto con« tribuire in modo più degno e più splendido a solennizzare il IV Cente« nario della scoperta fatta dal suo illustre figlio » (2) e Sophus Ruge, il più competente storico delle scoperte geografiche allora vivente in Germania, scriveva che la nostra Raccolta « fu l'unica grande opera compiuta a spese « di uno Stato, che sia comparsa in occasione del giubileo colombiano.

(1) V. *Congrès intern. des Américanistes*, Compte rendu de la septième Session, Berlin, 1890, pag. 69.

(2) V. *Geographical Journal*, Londra, 1894, luglio, pag. 33.

La « Spagna (così continuava il Ruge) si contentò di organizzare delle feste » (1).

Ma ora, l'invito che ci giunge dal Messico s'inspira a concetti ben più larghi ed elevati; e noi non possiamo che accoglierlo con animo riconoscente ed unirci alla nobile nazione messicana nel rivolgere un mesto pensiero alla data memoranda.

Io non credo che in questa sede ed in questa occasione convenga ripetere ciò che tutti sanno della gloria e delle avversità di Cristoforo Colombo o della importanza della sua scoperta. Dopo quattro secoli di pensiero e di lavoro rivolti allo studio del celebre Ligure, dopochè intorno al grandioso soggetto si provarono come a gara storici, letterati e poeti, filosofi, critici, eruditi, tutti insomma i generi della letteratura, come tutte le forme dell'arte, non sarebbe guari difficile, ma non giudico altrettanto opportuno, di far posto qui ad uno dei soliti compendî più o meno generici delle glorie colombiane. Sarò quindi assai breve.

Tutti sanno qui, che nello stato presente degli studi conviene distinguere un Cristoforo Colombo della leggenda ed un Cristoforo Colombo della critica; che ormai si considerano come leggenda molte delle notizie recate dalla biografia di Cristoforo Colombo scritta da suo figlio Fernando; che fra i critici una parte attende ad assalire ed una parte a difendere e che quando talvolta si potrebbe credere acquetata la disputa, questa di bel nuovo si riaccende rifacendosi da capo.

Così alle glorificazioni che accompagnarono le feste colombiane del 1892 segue ora un nuovo periodo di accuse; e quasi parodiando il fato cui soggiacque Colombo in vita, pare si vogliano far seguire alla apoteosi del primo ritorno l'ingratitudine e le persecuzioni che lo trassero a morir dimenticato a Valladolid. Certo si può affermare che non v'ha movimento del suo pensiero, non ripostiglio del suo animo che non siano stati scrutati, rovistati, sottoposti alla tortura d'una critica non sempre equanime, non di rado pedantesca ed inutile.

Infatti tutte queste critiche delle gesta di Colombo possono raccogliersi in tre gruppi, cioè quelle che riguardano il suo grado di cultura, quelle che si appuntano alle sue qualità morali, quelle che ricercano l'originalità della sua impresa.

Ma infine, che cosa si vuole ora dimostrare? Che Cristoforo Colombo non assomiglia troppo agli esploratori scientifici dei secoli XVIII e XIX, ai La Perouse, ai James Cook, ad Alessandro di Humboldt, a John Franklin e via dicendo, ma piuttosto ai navigatori di ventura del secolo XV? Davvero una bella novità; vecchia però di almeno quarant'anni, dacchè era stata messa innanzi e anatomizzata in ogni sua parte tra gli altri anche da quel

(1) V. *Peterm. Geograph. Mitt.*, Gotha, 1895, dicembre, pag. 279.

critico poderoso che fu Oscar Peschel [1]; una novità per la quale un critico poco attento potrebbe trovarsi a dover concludere che tra le colpe di Colombo va registrata anche questa di non essere nato un tre secoli più tardi!

E intanto si passa in seconda linea o si dimentica un'altra considerazione ben altrimenti di gran peso.

Più o meno virtuoso o vizioso ch'egli fosse, più o meno dotto od ignorante; antiche o nuove che fossero le idee da lui poste a fondamento della sua navigazione; l'importanza ed il merito essenziale della sua opera rimangono sostanzialmente gli stessi.

Anzi noi andiamo anche più in là. La possibilità teorica di raggiungere l'estremo oriente navigando, dall'estremo occidente d'Europa, verso occidente, cioè il proposito, come ripeteva Colombo, di *buscar el levante por el poniente* era anche ai tempi suoi così poco un'idea nuova, che egli stesso e gli altri contemporanei intendevano corroborarla richiamandosi addirittura alla classica antichità. Ed è pur noto d'altra parte con quanta cura Colombo stesso andò raccogliendo indizî sulla esistenza di terre lontane oltre il gran Mare Oceano, per dimostrare a sè stesso, e sopratutto agli altri, cioè a chi doveva fornirgli i mezzi di viaggio, la sodezza del suo disegno.

Intorno ai quali indizî si rimise a nuovo, or non è molto, anche una questione discussa ed abbandonata da tempo: intendo riferirmi a talune affermazioni del Vignaud e di alcuni suoi seguaci, alle quali per verità risposero già vittoriosamente autorevoli critici, tra cui in prima linea il nostro Gustavo Uzielli [2]. Per i nuovi censori Colombo non sarebbe stato il primo Europeo che approdò alle isole dell'America centrale; perchè le cose sarebbero andate così. Mentre Colombo, alcuni anni prima della sua celebre traversata, dimorava a Madera, egli avrebbe ospitati taluni naviganti, unici superstiti dell'equipaggio d'una nave spinta dai venti alle Antille e di là ritornata a stento ed approdata a Madera. Ma qui in breve i superstiti morirono tutti, non morì però con loro il segreto delle nuove terre: giacchè l'ultimo di loro, il pilota, che si spense proprio nella stessa casa di Colombo ed era suo amico, confidò al suo ospite tutte le sue informazioni e gli appunti di bordo e spirò. Ecco dunque dimostrato come Colombo conosceva già da prima la via da seguire e la terra ove dar fondo.

Tutto questo si conclude e si afferma ora, imbastendo insieme notizie di varî autori, vaghe, tardive, discordanti, note e screditate da gran tempo e che, all'infuori di altre ragioni, hanno in sè stesse, secondo me, la prova più sicura della loro inconsistenza. Una delle due infatti. Se Colombo avesse posseduto quel segreto, come mai non si sarebbe servito di un argomento

[1] V. Peschel O., *Das Zeitalter der Entdeckungen* e *Geschichte der Erdkunde*, Monaco, 1865, seconda ediz. 1877, ecc.

[2] V. Uzielli G., Toscanelli, *Colombo e la leggenda del pilota*, in *Rivista geograf. ital.* Roma, 1902, I. 3 ed altrove.

così irresistibile a persuadere chi doveva somministrargli i mezzi per navigare, della certezza assoluta di future scoperte? E se ciò allora non fece, giacchè ciò non risulta in nessun modo, se in quel momento decisivo egli preferì tenere per sè il segreto di cui, notisi bene, egli era ormai l'unico possessore, quale inaudita imprudenza non sarebbe stata la sua di lasciarselo sfuggire più tardi, senza bisogno, senza prò, anzi con tanto pregiudizio della sua gloria? Giacchè, se non lo svelava egli stesso, si domanda come gli storici lo avrebbero poi potuto conoscere!

Ma lasciamo da parte la storiella del pilota. Per me il fatto più importante da mettere in sodo, si trova altrove e rimane intatto nel suo valore anche dopo tutte le contestazioni e tutte le censure.

Ed il fatto è questo.

L'opera di Cristoforo Colombo si differenzia sostanzialmente da quella degli esploratori che lo precedettero ed inaugura un metodo di ricerca del tutto nuovo e che d'allora in poi non fu più abbandonato.

Prima di lui si procedeva nelle navigazioni di scoperta sulla scorta di un grossolano empirismo: il concetto fondamentale di Colombo era invece assolutamente razionale, assolutamente scientifico. Per le esplorazioni dei Portoghesi, i quali cercavano, non altrimenti di Colombo, la via delle Indie, non occorreva affrontare in pratica la dottrina scientifica della sfericità della Terra. Girando l'Africa, i Portoghesi avrebbero dovuto giungere alle Indie che diciamo orientali, sferica o piana che fosse la forma della Terra. Per Colombo la dottrina della sfericità era il postulato ed il caposaldo di tutta l'impresa. Sta bene che per gli astronomi di professione era ormai dottrina indiscutibile: ma era un procedimento inusitato, era un fatto assolutamente nuovo quello di mettere in giuoco su di essa per la prima volta la riputazione, l'avvenire e la vita. Agli scienziati, poco numerosi allora, questo poteva non parere un grande sforzo; ma non si può dimenticare che, fuori dall'osservatorio, nella vita d'azione, erano a quei tempi ancora in pieno vigore i pregiudizî medievali; che nel caso migliore bisognava affrontare i terrori dell'ignoto per una distesa di molte migliaia di miglia, attraverso un mare popolato dalla fantasia e dall'ignoranza di ogni sorta di chimere paurose: e quando s'insiste tanto a ripetere che Colombo era uomo di poca cultura, si accresce a dismisura la nostra ammirazione che, ciò malgrado, egli abbia riconosciuta la solidità delle conclusioni teoriche con quella fede incrollabile che tanto faticò ad infondere negli altri e che finalmente lo condusse al trionfo.

Un abisso divideva allora il concetto d'una navigazione occidentale dalla sua pratica attrazione. All'abbrivo di Colombo dalla Spagna nel 1492 era stata dimostrata ai Portoghesi già da diciott'anni, non che la possibilità, la singolare opportunità del tragitto occidentale, senza che nel frattempo essi, tanto intraprendenti, ardimentosi ed esperti marinai, sostenuti proprio in quei giorni dalla munificenza della corte, avessero neppur tentato seriamente il

grande problema. Colombo che la sostenne, fu giudicato per tanto tempo un visionario!

Intanto badiamo agli effetti. A progredire nelle scoperte lungo le coste africane dal Marocco al Capo di Buona Speranza, i Portoghesi col loro metodo avevano penato più di 60 anni: Colombo col metodo suo giungeva dalle Canarie in America, aprendosi il varco d'un tratto, e per una via non molto meno lunga della portoghese, in non più di 34 giorni (1).

E da allora in poi il metodo razionale ch'egli primo adottò rimase acquisito alla pratica di tutte le esplorazioni, dalle epopee dei conquistatori spagnuoli alle navigazioni di Magellano e di tutti i posteriori. In ciò Colombo fu un innovatore, un vero caposcuola e vanno fuori di strada i critici che, come scrisse testè Benedetto Croce « introducono nei *Sepolcri* i vizii di Ugo Foscolo o nel *Novum organum* le baratterie di Francesco Bacone » (2); e che indugiandosi troppo a sottilizzare su caratteri che furono comuni a Colombo ed agli uomini della sua classe e del suo tempo, trascurano di mettere in piena luce ciò per cui egli indiscutibilmente sta solo e « sovra gli altri com'aquila vola ».

Tutto questo è lecito affermare in omaggio alla storia generale dei progressi umani, cioè senza tener conto per nulla del fatto che Colombo nacque in Italia; perchè ci giova stare in guardia contro noi stessi e non dar esca alla gelosia di certi studiosi stranieri, i quali, come lo Spagnuolo di Berlino cui accennai, non ammettono affatto che noi abbiamo ad accorgerci delle glorie nostre. Penso questa volta ad un'amara osservazione, o più veramente ad un'aspra requisitoria a noi dedicata da Enrico Harrisse, l'insigne cultore di studî sulla scoperta dell'America. In un suo lavoro uscito colla data commemorativa del 12 ottobre 1892 egli non ci può perdonare di aver osato intraprendere un'opera come la nostra *Raccolta Colombiana* e finisce col sentenziare che il nostro « venire a parlare della parte avuta dall'Italia nella scoperta d'America è una pretensione orgogliosa, non giustificata nè dalla verità, nè dalla storia » (3).

Ed è proprio vero! Altri Stati v'ebbero parte, come la Spagna, l'Inghilterra, il Portogallo, la Francia ecc., ma non v'ebbe nessuna parte l'Italia, per ragioni molto ovvie: che l'Italia, come Stato, pur troppo, non esisteva e che gli Stati allora in Italia fiorenti avevano più motivo di temere che d'incoraggiare l'apertura della nuova via.

Non fu dunque l'Italia; ma tuttavia sarà permesso di affermare senza offesa della storia che v'ebbero parte, ed una parte principale, cioè non come

(1) V. Dalla Vedova G., *Cristoforo Colombo ed il sig. Oscarre Peschel* in: L'avvenire, rivista universitaria, Padova, 1867, pag. 309; id. *Commemorazione di Cristoforo Colombo* in Atti del I Congresso geograf. ital. Genova, 1904, pag. 177.

(2) V. Giornale d'Italia 1906, n. 139.

(3) Harrisse H, *Christophe Colomb devant l'histoire*. Parigi, Welter, 1892, pag. 86-90.

gregarî, ma come consiglieri, come sollecitatori, come condottieri, non uno solo, ma molti Italiani, da Paolo dal Pozzo Toscanelli, al Vespucci, ai Caboto, al Verazzano, al Pigafetta ed altri minori; e questa medesima molteplicità di nomi sta a provare che non dovette essere un puro caso se anche il sommo fra essi fu un Italiano, come era stato un Italiano, due secoli prima, il più grande degli esploratori di terre, il rivelatore dell'Asia Orientale, Marco Polo.

Iniziative singole, certamente, ma poderose, geniali, a cui gl'Italiani di quei secoli, e non di quei secoli soltanto, erano ben disposti, meglio che all'azione disciplinata collettiva. Iniziative del resto che avevano la loro radice, oltrechè nella tempra nazionale immaginosa e versatile, nell'antica e multiforme esperienza di pubblici negozî, di traffici vicini e lontani, di navigazioni, propria di quella nostra età storica gloriosa.

La nostra *Raccolta Colombiana* non fu dunque il frutto d'una pretensione orgogliosa; anzi al contrario essa sta a provare luminosamente il rispetto disinteressato che noi professiamo alla più rigorosa verità, anche quando questa viene a ferire i nostri più cari sentimenti: tant' è vero che sono proprio le indagini e i documenti in essa contenuti, ai quali i nuovi critici ci fanno l'onore di attingere i materiali su cui fondare molte delle loro conclusioni [1].

Ma orgogliosi di che, se la scoperta del nuovo mondo non fruttò all'Italia nè vantaggi, nè onori, se anzi tutt'altro che giovare al nostro paese ebbe la sua parte nell'affrettarne la decadenza? Perchè, come tutti sanno, per effetto delle nuove vie aperte dai nostri, il centro di gravitazione dei commerci e della civiltà, che fino allora era il Mediterraneo, andò trasportandosi sull'Atlantico e noi per tre secoli e mezzo, fino all'apertura del Canale di Suez, ci trovammo di mano in mano respinti alle spalle del gran movimento dei commerci mondiali; di modo che in uno stesso tempo e per opera di quei nostri e noi eravamo aiutati a decadere e si rafforzavano gli Stati che dovevano far pesare su noi il loro dominio!

Noi fummo giudicati orgogliosi colla stessa giustizia con cui altri volle vedere in Cristoforo Colombo null'altro che un venturiero ardito e fortunato. Invero Colombo cercava il Cipangu di Marco Polo, il Giappone, voleva passare *a donde nacen las especerias* e scoperse un nuovo mondo. Frattanto se a qualunque nocchiero che primo si spingesse oltre verso occidente, la fortuna aveva preparata questa sorpresa, Colombo ebbe a farsele incontro dopo d'aver superate resistenze e ripugnanze infinite in Europa e viaggiando deliberatamente a quella volta per migliaia di miglia.

Più propriamente fortunato fu Cabral, gittato contro voglia dalle correnti e dai venti alle spiaggie del Brasile; più fortunato Vasco di Gama

[1] Vedi ad es. il gran conto ed uso che ne fa G. Marcel nella sua accurata memoria: *Christophe Colomb devant la critique* in: La Géographie, Parigi, Bayle, 1905, XII, pag. 149-162.

che, voltato per favore speciale di venti il Capo di Buona Speranza già da dieci anni scoperto dai suoi, si vide ben presto guidato alla meta sospirata, alle Indie, dall'antica pratica dei piloti africani. La fortuna della scoperta di America non fu di Colombo, fu del genere umano; e Cristoforo non che ne menasse vanto o ritraesse in vita, per essa, alcuna fama, ma neppur mai, com'è noto, la conobbe; ed il genere umano, quasi a prova che la tenne per sua, rifiutò perfino alla scoperta il nome dello scopritore, per darle quello di un altro Italiano che, al pari di Colombo, morì credendo di aver visitate e descritte non altre contrade che dell'Asia. E se Colombo fosse più a lungo vissuto (i critici non sono d'accordo sulla sua età ed in attesa di nuovi documenti differiscono fra loro di decine d'anni), egli avrebbe dovuto sacrificare a quella sua usuraia fortuna le più ferme convinzioni e veder crollare i suoi principali asserti per opera di coloro ch'egli aveva rimorchiati nell'occidente.

Sic vos non vobis: questo possono ripetere gli Italiani de' grandi successi allora ottenuti da Colombo e dagli altri scopritori connazionali; questo poteva ripetere anche Colombo a sè stesso nell'abbandono e nella tristezza de'suoi ultimi giorni.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Ciamician, relatore, a nome anche del Corrispondente Nasini, legge una Relazione sul lavoro del prof. G. Carrara intitolato: *Elettrochimica delle soluzioni non acquose*, proponendone l'inserzione nei volumi delle Memorie.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, poste ai voti dal Presidente, sono approvate salvo le consuete riserve.

CORRISPONDENZA

Il Segretario Cerruti dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Lucca; l'Accademia delle scienze di Nuova York; l'Accademia delle scienze di Lisbona; l'Accademia di scienze ed arti di Barcellona; le Società Reali di Londra e di Vittoria; le Società geologiche di Manchester, di Sydney e di Edinburgo; la Società zoologica di Tokyo; la Società geografica del Cairo; il Museo nazionale di Copenaghen; il Museo di storia naturale di Nuova York; l'Osservatorio di S. Fernando; le Università di Glasgow, di St. Louis e di Cambridge Mass. V. C.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XV. (1892-1906). Fasc. 11°. 1° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VI. Fasc. 1°-4°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Fasc. 1°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 giugno 1906.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Pincherle. Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date . . . Pag. 603
Pascal. Sui simboli di Riemann nel Calcolo differenziale assoluto (*) . . . . . » 610
Righi. Su alcuni casi, apparentemente paradossali, di trasmissione dell'elettricità attraverso un gas (*) . . . . . » »
Lauricella. Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti (pres. dal Socio *Dini*) » »
Id. Sul problema derivato di Dirichlet, sul problema dell'elettrostatica e sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità (pres. dal Socio *Volterra*) (*) . . . . . » 619
Pannelli. Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali (pres. dal Corrisp. *Castelnuovo*) . . . . . » »
Lebesgue. Sur les fonctions dérivées (pres. dal Socio *Segre*) (*) . . . . . » 629
Artom. Sopra un nuovo sistema di telegrafia senza filo (pres. dal Corrisp. *G. Grassi*) (*) » »
Arnò. Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate e di onde hertziane (pres. dal Socio *Colombo*) (*) » »
Pellini. Contributo allo studio dell'isomorfismo fra il tellurio ed il selenio (pres. dal Corrisp. *Nasini*) . . . . . » »
Id. e *Vio.* Contributo allo studio dell'isomorfismo fra selenio e tellurio (pres. *Id*) (*) . . » 637
Bruni e *Contardi.* Sulle reazioni di doppia decomposizione fra alcooli ed eteri composti (pres. dal Socio *Körner*) . . . . . » »
Carrasco e *Padoa.* Sulla formazione e scomposizione del nucleo indolico per mezzo dell'azione catalitica del nickel (pres. dal Socio *Ciamician*) (*) . . . . . » 644
Manuelli. Azione dello zolfo sulle soluzioni dei sali metallici (pres. *Id.*) (*) . . . . . » »
Mazzara e *Borgo.* Azione del cloruro di solforile sul pirazolo (pres. dal Socio *Paternò*) (*) » »
Ranfaldi. Studio cristallografico di alcune nuove sostanze organiche (pres. dal Socio *Strüver*) (*) » »
Rosati. Studio microscopico di alcune rocce della Liguria occidentale (pres. *Id.*) (*) . . » 645
Sani. Azione della benzilammina sull'α-crotonato etilico (pres. dal Socio *Körner*) . . . . » »
Vinassa de Regny. A proposito della esistenza del Culm nelle Alpi Carniche (pres. dal Socio *Capellini*) . . . . . » 647
Gosio. Sulla possibilità di accumulare arsenico nei frutti di talune piante (pres. dal Socio *Pirotta*) (*) . . . . . » 649
Id. Sulla produzione di cumarine fermentative nello sviluppo di taluni ifomiceti (pres. *Id.*) (*) » »
Silvestri. Sviluppo dell'Ageniaspis fuscicollis (Dalm.) Thoms. (Chalcididae) (pres. dal Socio *B. Grassi*) . . . . . » 650

Dalla Vedova. Commemorazione di Cristoforo Colombo . . . . . » 658

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Ciamician (relatore) e *Nasini.* Relazione sulla Memoria del prof. *G. Carrara,* intitolata: « Elettrochimica delle soluzioni non acquose » . . . . . » 664

CORRISPONDENZA

Cerruti (Segretario). Dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti . . . » »

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. *Roma 17 giugno 1906.* **N. 12.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIII.

1906

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 *giugno* 1906.

Volume XV.° — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1906

195931

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 8 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 giugno 1906.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Su alcuni casi, apparentemente paradossali, di trasmissione dell'elettricità attraverso un gas.* Nota del Socio Augusto Righi.

Passando in rivista alcune mie esperienze, già in varie epoche pubblicate, allo scopo d'interpretarle secondo la teoria degli elettroni, ho notato

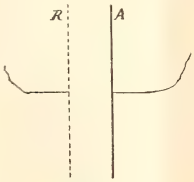


Fig. 1.

certe analogie tra fatti, che sembravano avere in comune soltanto il loro carattere strano e quasi paradossale, e tali analogie mi hanno suggerito l'idea di una nuova esperienza. Benchè il descrivere quest'ultima sia lo scopo principale della presente Nota, pur tuttavia credo utile richiamare dapprima quei fatti, ed additarne le spiegazioni che se ne diedero, o se ne possono dare.

a) Un disco metallico A (fig. 1) posto nell'aria rarefatta e caricato dal polo negativo isolato d'una pila, riceve un fascio di radiazioni ultravio-

lette attraverso una reticella metallica R comunicante con un elettrometro. Le deviazioni ottenute in tempi eguali misureranno la corrente fotoelettrica. Trovai [1] che l'intensità di questa cresce al crescere (entro certi limiti) della distanza fra R ed A. Ciò venne confermato poco dopo da Stoletow [2], che presumibilmente non conosceva ancora questo mio risultato. La spiegazione che si dà oggi di questo fenomeno è la seguente [3]. Quando la differenza di potenziale fra i due conduttori è abbastanza grande, i ioni negativi formatisi presso il disco A acquistano sufficiente velocità per ionizzare l'aria col loro urto e creare così nuovi ioni, che alimentano la corrente; ma se i due conduttori sono molto vicini, i detti ioni negativi raggiungono in parte la reticella senza ionizzare l'aria, e così rimane minore il numero di ioni disponibili.

Si può obiettare però, che il fenomeno da me osservato si produsse anche con differenze di potenziale assai piccole, per esempio minori di 5 volta.

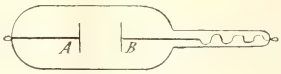


Fig. 2.

b) Un tubo con aria rarefatta contiene due elettrodi A, B (fig. 2) uno dei quali è mobile. Messo un tal tubo in circuito con una pila (qualche centinaio di coppie di Volta) ed un galvanometro trovai [4], che la corrente era massima per una certa distanza fra A e B, e perciò diminuiva sin anche ad annullarsi accostandosi gli elettrodi. Con moderata rarefazione e forza elettromotrice appena sufficiente il passaggio della corrente aveva luogo quasi per un unico valore della detta distanza, ed occorreva una maggior differenza di potenziale perchè per altre distanze la corrente potesse stabilirsi. Al galvanometro si può naturalmente sostituire un elettrometro od un elettroscopio.

c) Se R ed A sono nell'aria all'ordinaria pressione, ionizzata da raggi X (nel qual caso R potrà essere un disco anzichè una rete metallica) si verifica un fenomeno analogo ai precedenti. Trovai infatti [5], che in determinate circostanze l'intensità della corrente fra i dischi cresce d'intensità, al crescere della loro reciproca distanza. Il fatto venne, anche questa volta, riscontrato più tardi da altri sperimentatori [6], ed oggi lo si spiega ammet-

(1) Mem. della R. Acc. di Bologna, serie 4ª, t. X, pag. 107 (1890).
(2) J. J. Thomson, *Conduction of Electricity through Gases*, pag. 232.
(3) Journal de Physique, septembre 1890.
(4) Mem. della R. Acc. di Bologna, loc. cit., pag. 112.
(5) Rend. della R. Acc. dei Lincei, 3 maggio 1896.
(6) J. J. Thomson and Rutherford, Phil. Mag., t. 42 (1896).

tendo, che coll'aumento della detta distanza si mettono a contribuzione ioni in maggior numero per alimentare la corrente [1].

d) Le coppie di quadranti di un elettrometro E (fig. 3), il cui ago è mantenuto ad un potenziale costante, comunicano separatamente coi dischi metallici paralleli A, B, fra i quali e ad eguale distanza trovasi un terzo disco C caricato dal polo isolato d'una pila. L'aria fra i dischi è ionizzata dalle radiazioni d'un corpo radioattivo. Se si sposta C verso uno dei dischi estremi si ha una deviazione di tal senso da indicare, che il passaggio del-

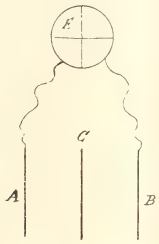


Fig. 3.

l'elettricità fra C ed il disco da cui C venne allontanato è più abbondante di quello fra C ed il disco a cui venne avvicinato [2]. Benchè non ne abbia fatto la prova, non dubito che questa esperienza riescirebbe anche adoperando i raggi X al posto del corpo radioattivo, come riescirebbe la *c*) facendo il cambiamento inverso.

e) Se si ripetono le esperienze *a*) e *b*) mentre agisce un intenso campo magnetico diretto perpendicolarmente alle linee di forza elettriche, l'andamento anomalo dei fenomeni si attenua o sparisce, e cioè, per esempio nel caso della fig. 2, la corrente cresce regolarmente al diminuire della distanza fra gli elettrodi [3].

Come si è visto, del fenomeno *a*) si è data una spiegazione, ed un'altra assai simile si è data pel fenomeno *c*), che forse vale anche per quello *d*), il quale in sostanza sembra differire dal *c*) solo pel modo in cui l'aria viene ionizzata. Ma resta a discutere la causa probabile di *b*) ed *e*).

Del fenomeno *b*) si può dare una spiegazione simile a quella che si dà pel fenomeno *a*); si può ammettere cioè, che quando è scarso il numero delle molecole gassose comprese fra i due elettrodi, sia per essere questi molto

(1) J. J. Tomson, *Conduction of Electricity*, ecc., pag. 13.
(2) Rend. della R. Acc. dei Lincei, t. XII, pag. 237 (1904).
(3) Mem. della R. Acc. di Bologna, 13 nov. 1892.

vicini, sia per essere bassissima la pressione del gas, la formazione di nuovi ioni per urto dei ioni già esistenti contro le molecole del gas è del pari troppo scarsa, e non può prodursi la scarica (se i due conduttori comunicano colle armature d'un condensatore) o la corrente (se essi comunicano coi poli d'una pila).

A questa spiegazione si può opporre, che con essa rimane difficile render conto del fenomeno *e*), e cioè dell'azione di un campo magnetico. Perciò mi sembra probabile che tutte le precedenti spiegazioni siano incomplete, e che si debba tener conto di altre circostanze, le quali poi permettono, come mostrerò fra poco, di dare ragione anche del fenomeno *e*).

Conviene perciò prendere in considerazione la presenza di un'atmosfera di ioni positivi intorno al catodo. L'esistenza di essa fu da me per la prima volta dimostrata in modo da non lasciar dubbio [1], e più tardi fu ripetutamente confermata, sempre però nel caso del continuato passaggio della corrente attraverso il gas rarefatto. Trovai, infatti, che il potenziale nel gas presso il catodo cresce andando verso il catodo stesso, ed in tal maniera, da rendere manifesta la presenza di un'atmosfera di ioni positivi avvolgente il catodo e che va diradandosi sino ad una certa distanza. Ora sembra lecito il supporre, che nel caso della esperienza *b*) si inizî il passaggio della corrente nel gas, ma rimanga poi sospesa appunto per la formazione della detta atmosfera, la quale ha per effetto di rendere necessaria una maggior differenza di potenziale perchè la corrente possa continuare; anzi un aumento tanto più grande quanto più si avvicinano gli elettrodi.

Ammessa questa spiegazione, quella del fenomeno *e*) diviene facilissima. I ioni positivi hanno origine dagli urti contro le molecole gassose degli elettroni emessi dal catodo; ora il campo magnetico incurva fortemente le loro traiettorie, e così rende più scarsi i detti urti, l'atmosfera di ioni positivi non può formarsi, e la corrente continua liberamente, e tanto meglio quanto più vengono avvicinati gli elettrodi, senza che a ciò si richiegga un maggior potenziale.

Ai cinque fenomeni richiamati possono aggiungersene due altri come molto affini, se non identici ad uno di essi.

Il fenomeno *b*) si può evidentemente enunciare dicendo, che il potenziale di scarica è minimo per una certa distanza critica degli elettrodi A, B (fig. 2), e perciò è richiesta una differenza di potenziale maggiore se si diminuisce la distanza suddetta. Considerato in tal modo, il fenomeno *b*) coincide con uno recentemente enunciato dal sig. Carr e prima ancora dal sig. Peace [2].

Per ultimo farò osservare, che il fenomeno *b*) sembra analogo a quello

[1] Mem. della R. Acc. di Bologna, 13 novembre 1892.

[2] J. J. Thomson, loc. cit. pag. 356.

ben noto, che fu descritto da Hittorf [1], e che consiste nella grande difficoltà d'ottenere la scarica fra elettrodi vicinissimi immersi in un gas estremamente rarefatto. In un tubo, nel quale si è fatto il miglior vuoto possibile, trovansi due elettrodi filiformi AB, CD (fig. 4), le cui estremità B, C quasi si toccano, e comunicanti con due altri elettrodi M, N terminati da palline poste nell'aria all'ordinaria pressione. Un condensatore o una macchina elettrica E, F produrrà una scintilla di qualche centimetro fra le palline M, N, piuttosto che dar luogo alla scarica fra gli elettrodi nel gas estremamente rarefatto.

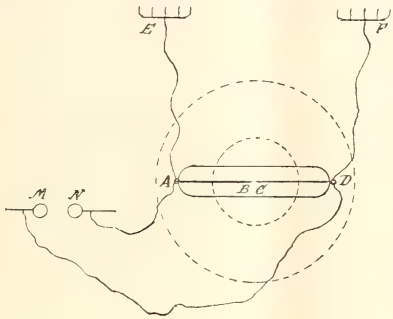


Fig. 4.

Se veramente questo fenomeno è della stessa natura del fenomeno *b*), dovrà verificarsi l'effetto *e*) anche col tubo descritto or ora. È questa la nuova esperienza che mi proponevo di descrivere.

Per eseguirla, collocai il tubo AD in direzione equatoriale fra i poli della grande elettrocalamita di Ruhmkorff, della quale i cerchi segnati nella figura rappresentano il contorno dei rocchetti e del nucleo di ferro. Constatato il fenomeno noto, e cioè la produzione delle scintille MN, eccitai l'elettrocalamita con una corrente di 10 a 12 ampère. Immediatamente cessarono le scintille nell'aria e la scarica si produsse nel tubo, ove si manifestò colla viva fluorescenza verde delle pareti provocata dai raggi catodici. Interrotta la corrente magnetizzante, l'effetto di essa sparì con una certa lentezza, dovuta evidentemente, almeno in gran parte, al magnetismo residuo dei nuclei dell'elettrocalamita.

Questa esperienza, che riesce colla massima facilità, conduce a supporre, che anche quando le scintille scoccano in MN, un fenomeno di scarica di breve

[1] Pogg. Ann., t. 136, pag. 201.

durata abbia luogo entro il tubo. Infatti non si capirebbe altrimenti come mai il campo magnetico dovesse facilitare la scarica attraverso il gas estremamente rarefatto. Se invece si suppone, che sempre si inizi il fenomeno della scarica entro il tubo, e che ciò dia luogo (come si è detto più sopra per spiegare il fenomeno *e*)) alla formazione di un accumulo di ioni positivi presso il catodo, che impedisce la continuazione della scarica stessa, allora si comprende bene che il campo magnetico possa esercitare un'azione sul tubo. Quest'azione, secondo quanto fu detto più sopra, sarebbe precisamente quella di deviare gli elettroni e d'impedire in tal modo quella specie d'ingorgo dei ioni positivi che, secondo la spiegazione da me proposta pel fenomeno *e*), costituisce l'ostacolo alla continuazione della scarica.

Matematica. — *Sull'applicazione del metodo delle immagini alle equazioni del tipo iperbolico.* Nota del Socio V. Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle equazioni a derivate parziali.* Nota del Corrispondente C. Arzelà.

Nella mia recente Nota: *Esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali*, la costruzione delle funzioni $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, ... deve essere, per la piena validità del resultato, alquanto modificata, nel modo che spiegherò prossimamente.

Matematica. — *Sui simboli di Riemann nel Calcolo differenziale assoluto.* Nota del Corrispondente Ernesto Pascal.

Questa breve Nota ha per oggetto una osservazione sui simboli a quattro indici (detti di Riemann) che hanno, come si sa, un'importanza tanto fondamentale nella teoria delle forme differenziali quadratiche e nel Calcolo differenziale assoluto.

Per evitare di ripetere inutilmente cose note, mi riferirò per quanto riguarda le denominazioni, le notazioni e le succitate teorie al vol. I della *Geometria differenziale* del Bianchi (Pisa, 2ª ediz., 1902), e alla Memoria di Ricci e Levi Civita nei Math. Annalen, t. 54, pag. 125.

Un simbolo di Riemann di 1ª specie (che indicheremo con $R_{r_1 r_2, s_1 s_2}$) è la differenza di due espressioni formate in modo analogo mediante simboli

di Christoffel a tre indici; propriamente, indicando con D_s l'operazione che applicata ad un simbolo di Christoffel a tre indici è:

$$(1) \qquad D_s \begin{bmatrix} r\,t \\ u \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_s} \begin{bmatrix} r\,t \\ u \end{bmatrix} - \sum_p \begin{Bmatrix} s\,u \\ p \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} r\,t \\ p \end{bmatrix}$$

si ha:

$$(2) \qquad R_{r_1 r_2, s_1 s_2} = D_{s_2} \begin{bmatrix} r_1\,s_1 \\ r_2 \end{bmatrix} - D_{s_1} \begin{bmatrix} r_1\,s_2 \\ r_2 \end{bmatrix}.$$

I simboli di Christoffel a tre indici non formano un *sistema covariante* nel senso del Calcolo differenziale assoluto, e non lo formano neanche le loro dedotte D definite dalla (1), ma (e questa è la nota proprietà fondamentale dei simboli Riemanniani) lo formano invece le differenze di queste ultime combinate secondo la formola (2).

L'osservazione cui si riferisce la presente Nota è questa: che introducendo oltre i coefficienti a due indici della forma quadratica fondamentale, altri coefficienti a tre e quattro indici, che si trasformino come quelli di una forma differenziale completa di 4° ordine, *il simbolo di Riemann si può comporre come la differenza di due elementi di un medesimo sistema covariante.*

Insieme ai coefficienti X_{ij} della forma differenziale quadratica fondamentale

$$(3) \qquad \sum X_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

introduciamo i coefficienti X_{ijh}, X_{ijhk} che si trasformino come quelli di una forma differenziale di 4° ordine di cui siano zero i coefficienti ad un solo indice, e di cui siano i medesimi X_{ij} i coefficienti a due indici:

$$(4) \qquad \sum_{ij} X_{ij}\, \delta^{(4)}_{ij} + \sum_{ijh} X_{ijh}\, \delta^{(4)}_{ijh} + \sum_{ijhk} X_{ijhk}\, \delta^{(4)}_{ijhk}$$

essendo le δ quelle formazioni differenziali ben note che io ho introdotte e studiate in lavori precedenti [1]; la forma differenziale quadratica (3) è un *covariante* della forma (4).

In una Nota del 1903 [2] ho introdotto per le forme differenziali generali delle formazioni fondamentali, che ho rappresentate con delle doppie parentesi rotonde, formazioni alle quali direttamente o indirettamente fanno capo tutte le altre che è necessario introdurre nella teorica delle forme differenziali.

[1] V. p. es. Rend. Acc. Lincei (5), t. XII, 1° sem. 1903, pag. 325.
[2] Ibid., pag. 367.

La derivata di una tale formazione si esprime colla semplice formola

$$(5)\quad \frac{\partial}{\partial x_h}((i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu)) = ((i_1 \dots i_m h, j_1 \dots j_\mu)) + ((i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu h)),$$

e la loro trasformazione si fa come quella del prodotto delle due X, aventi rispettivamente per indici quelli del primo e quelli del secondo gruppo del simbolo.

Se ora poniamo in generale:

$$(6)\quad \begin{cases} ((i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu)) + (-1)^{m+\mu}((j_1 \dots j_\mu, i_1 \dots i_m)) = \{i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu\} \\ ((i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu)) - (-1)^{m+\mu}((j_1 \dots j_\mu, i_1 \dots i_m)) = (i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu) \end{cases}$$

otteniamo da (5) le formole:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_h}\{i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu\} = (i_1 \dots i_m h, j_1 \dots j_\mu) + (i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu h) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_h}(i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu) = \{i_1 \dots i_m h, j_1 \dots j_\mu\} + \{i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_\mu h\}. \end{cases}$$

Si riconosce subito che il simbolo di Christoffel di 1ª specie $\begin{bmatrix} r\,s \\ t \end{bmatrix}$ relativo alla forma (3) è, a meno di un fattore, il simbolo $(r\,s, t)$ relativo alla forma (4); propriamente è:

$$(8)\qquad \begin{bmatrix} r\,s \\ t \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}(r\,s, t),$$

e che il simbolo di Christoffel di 2ª specie è similmente

$$(9)\qquad \begin{Bmatrix} r\,s \\ t \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\sum_h A_{ht}(r\,s, h),$$

essendo al solito le A_{ht} i rapporti dei complementi algebrici degli elementi del determinante $|X_{ij}|$, per il determinante stesso.

Di qui si ha che la prima parte del simbolo di Riemann (2) diventa

$$(10)\quad D_{s_2}\begin{bmatrix} r_1\,s_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{s_2}}(r_1\,s_1, r_2) - \frac{1}{4}\sum_p\sum_q A_{pq}(r_1\,s_1, p)(r_2\,s_2, q)$$

$$= -\frac{1}{2}\{r_1\,s_1, r_2\,s_2\} - \frac{1}{2}\{r_1\,s_1\,s_2, r_2\} - \frac{1}{4}\sum_p\sum_q A_{pq}(r_1\,s_1, p)(r_2\,s_2, q)$$

e ponendo

$$(11)\quad [r_1\,s_1, r_2\,s_2] = -\frac{1}{2}\{r_1\,s_1, r_2\,s_2\} - \frac{1}{4}\sum_p\sum_q A_{pq}(r_1\,s_1, p)(r_2\,s_2, q)$$

il simbolo di Riemann si esprimerà colla differenza

$$(12)\qquad R_{r_1\,r_2, s_1\,s_2} = [r_1\,s_1, r_2\,s_2] - [r_1\,s_2, r_2\,s_1].$$

Ora io dico che *gli elementi* (11) *formano un sistema covariante nel senso del calcolo differenziale assoluto.*

Infatti, immaginando una trasformazione delle variabili x nelle y, le formazioni di cui risulta il secondo membro di (11) si trasformano con formole che, tenendo conto di (6), si deducono facilmente da quelle da noi esposte nelle succitate Note. Indichiamo con Y i coefficienti della trasformata di (4), con A'_{ij} i rapporti analoghi agli A_{pq} ma formati colle Y, anzichè colle X, e ricordiamo che

$$A_{pq} = \sum_{ij} A'_{ij} \frac{\partial x_p}{\partial y_i} \frac{\partial x_q}{\partial y_j}.$$

Abbiamo allora, esprimendo per le Y il secondo membro di (11) che è calcolato per le X:

$$[r_1 s_1, r_2 s_2]_X = -\frac{1}{2} \sum_{hk} \{h_1 k_1, h_2 k_2\}_Y \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_{h_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial y_{k_2}}{\partial x_{s_2}} -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{hkl} (l, hk)_Y \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_{r_1} \partial x_{s_1}} \frac{\partial y_h}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial y_k}{\partial x_{s_2}} - \frac{1}{2} \sum_{hkl} (hk, l)_Y \frac{\partial y_h}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial y_k}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_{r_2} \partial x_{s_2}} -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{kl} \{k, l\}_Y \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_{r_1} \partial x_{s_1}} \frac{\partial^2 y_l}{\partial x_{r_2} \partial x_{s_2}} -$$

$$-\frac{1}{4} \sum_{pqij} A'_{ij} \frac{\partial x_p}{\partial y_i} \frac{\partial x_q}{\partial y_j} \left[\sum_{hkl} (hk, l)_Y \frac{\partial y_h}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_l}{\partial x_p} + \sum_{kl} \{k, l\}_Y \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_{r_1} \partial x_{s_1}} \frac{\partial y_l}{\partial x_p} \right] \times$$

$$\times \left[\sum_{h'k'l'} (h'k', l')_Y \frac{\partial y_{h'}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial y_{k'}}{\partial x_{s_2}} \frac{\partial y_{l'}}{\partial x_q} + \sum_{k'l'} \{k', l'\}_Y \frac{\partial^2 y_{k'}}{\partial x_{r_2} \partial x_{s_2}} \frac{\partial y_{l'}}{\partial x_q} \right].$$

Osservando ora che

$$\sum_{ij} \frac{\partial x_p}{\partial y_i} \frac{\partial x_q}{\partial y_j} \frac{\partial y_l}{\partial x_p} \frac{\partial y_{l'}}{\partial x_q}$$

è eguale ad 1 solo quando $i = l$ e $j = l'$, ed è eguale a zero in ogni altro caso; che, essendo zero i coefficienti ad un solo indice della forma differenziale (4) e quindi anche della sua trasformata, i simboli $\{k, l\}_Y$ sono eguali a $-2\,Y_{kl}$, e quindi

$$-\frac{1}{2} \sum_{ij} A'_{ij} \{k, l\}_Y = \sum_{ij} A'_{ij} Y_{ki} = 1 \qquad \text{se } j = k$$
$$= 0 \qquad \text{se } j \neq k,$$

e infine osservando che $(l, hk) = (hk, l)$, si riconosce che il secondo membro della precedente formola può porsi sotto la forma

$$-\frac{1}{2} \sum_{hk} \left[\{h_1 k_1, h_2 k_2\}_Y + \frac{1}{2} \sum_{ij} A'_{ij} (h_1 k_1, i)_Y (h_2 k_2, j)_Y \right] \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_{h_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial y_{k_2}}{\partial x_{s_2}}$$

cioè si ha la formola

$$(13) \qquad [r_1 s_1 , r_2 s_2]_X = \sum_{hk} [h_1 k_1 , h_2 k_2]_Y \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial y_{k_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_{h_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial y_{k_2}}{\partial x_{s_2}}$$

che dimostra il nostro assunto.

I simboli di Riemann dunque, oltre che formare essi stessi un sistema covariante, possono comporsi come differenze di due elementi di un altro sistema covariante nel senso del Calcolo differenziale assoluto.

Matematica. — *Ricerche sopra le funzioni derivate.* Nota di Beppo Levi, presentata dal Socio C. Segre.

In questa Nota vogliamo riannodare alle proposizioni relative alle funzioni derivate, dimostrate nella Nota precedente [1], il problema delle funzioni primitive e il teorema fondamentale del calcolo integrale, e dedurne ancora alcuni corollari per le funzioni derivate medesime.

Dobbiamo perciò premettere una proposizione relativa all' integrale indefinito di una funzione integrabile nel senso del Lebesgue:

1. *L'integrale indefinito di una funzione integrabile in un intervallo $a \dots b$ nel senso del Lebesgue, ammette in tutti i punti dell'intervallo, fatta al più eccezione per quelli di un aggregato di misura nulla, derivata unica e determinata ed uguale precisamente alla funzione integrando.*

La proposizione sarà evidentemente dimostrata quando sia provato che, separatamente, la funzione integrale ammette derivate determinate a destra e a sinistra uguali ciascuna alla funzione integrando, in tutti i punti dell' intervallo $a \dots b$ fatta al più eccezione per quelli di un aggregato di misura nulla.

Ci occuperemo, per fissare le idee, della derivata a destra. Sia $f(x)$ la funzione che si integra e si ponga

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)\, dx .$$

Sarà

$$r[\Phi(x) , x_0 , x_0 + h] = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx .$$

Per l' ipotesi dell' integrabilità di $f(x)$, dato arbitrariamente un ε, si può determinare nell' intervallo $a \dots b$ un aggregato K_ε tale che:

1° La misura di K_ε sia $\leq \varepsilon$;

[1] Questi Rendiconti, pag. 551.

2° Esista uno ξ tale che in ogni punto di $a \dots b$, fuori di K_ε, $|f(x)| \leq \xi$;

3° $\int_{K_\varepsilon} |f(x)|\, dx \leq \varepsilon$.

Si chiami $f_\varepsilon(x)$ la funzione che è uguale a $f(x)$ in ogni punto di $a \dots b$ non appartenente a K_ε ed è nulla nei punti di K_ε; $f_\varepsilon(x)$ sarà misurabile e, per un teorema dovuto ai sig. Borel, Lebesgue e Vitali [1], si può determinare in $a \dots b$ un aggregato chiuso di misura $\geq b - a - \frac{\varepsilon}{\xi}$ tale che i valori di $f_\varepsilon(x)$ in esso formino una funzione continua. Si chiamino rispettivamente C_ε la parte di questo aggregato e D_ε la parte dell'aggregato complementare esterne a K_ε. La misura di C_ε sarà $c_\varepsilon \geq b - a - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\xi}$, quella di D_ε è $d_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{\xi}$.

Sarà

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx = \int_{x_0(C_\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\, dx + \int_{x_0(D_\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\, dx + \int_{x_0(K_\varepsilon)}^{x_0+h} f(x)\, dx$$

dove gli indici C_ε, D_ε, K_ε apposti ai tre integrali significano che essi sono presi negli aggregati di punti dell'intervallo $x_0 \dots x_0 + h$ appartenenti rispettivamente a C_ε, D_ε, K_ε. Chiameremo rispettivamente $\gamma_\varepsilon(x_0\, h)$, $\delta_\varepsilon(x_0\, h)$, $\varkappa_\varepsilon(x_0\, h)$ le misure di queste tre parti di $x_0 \dots x_0 + h$, per modo che sarà

$$\gamma_\varepsilon + \delta_\varepsilon + \varkappa_\varepsilon = h.$$

Noi porteremo ora la nostra attenzione sui soli punti x_0 che appartengono a C_ε.

Si ricordi che, in ogni punto, $|f_\varepsilon(x)| \leq \xi$; sarà quindi

$$\left| \int_{x_0(D_\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\, dx \right| \leq \xi \delta_\varepsilon(x_0\, h).$$

Ciascuno dei numeri γ_ε, δ_ε, $\varkappa_\varepsilon$ è funzione di h e di x_0 e tende a 0 con h: si può quindi considerare il $\overline{\lim\limits_{h=0}} \frac{\xi \delta_\varepsilon}{h}$ come funzione di x_0, e considerare l'aggregato $M_{\varepsilon\eta}$ dei punti x_0 (di C_ε) per cui

$$\overline{\lim_{h=0}} \frac{\xi \delta_\varepsilon(x_0\, h)}{h} \geq \eta,$$

[1] Borel, *Un théorème sur les ensembles mesurables*, Comptes-rendus, déc. 1903; Lebesgue, *Sur une propriété des fonctions*, Comptes-rendus, déc. 1903, Vitali, *Una proprietà delle funzioni misurabili*, Rend. dell'Istituto Lombardo (2) 38, 1905, § 3, pag. 601.

dove η è un numero positivo arbitrariamente assegnato; sia μ la misura di $M_{\varepsilon\eta}$.

L'aggregato $M_{\varepsilon\eta}$ si può generare come segue:

Si consideri l'aggregato dei punti x_0 di C_ε per ciascuno dei quali avviene che, per qualche h tale che $\sigma \geq h \geq \tau > 0$, $\frac{\xi\delta_\varepsilon(x_0 h)}{h} \geq \eta_\varsigma$ $(\eta_\varsigma < \eta)$ e si chiami $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$; per ogni coppia assegnata di numeri τ, σ (>0), $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ è chiuso perchè se $\overline{x}_0$ è il limite d'una serie di punti x_0 appartenenti a $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ e $\overline{h}$ è un limite di valori corrispondenti di h, sarà pure $\sigma \geq \overline{h} \geq \tau$; inoltre $\delta_\varepsilon(\overline{x}_0\,\overline{h})$ sarà il limite dei numeri $\delta_\varepsilon(x_0 h)$ relativi a questi punti x_0 e a questi h, e quindi $\frac{\zeta\delta_\varepsilon(\overline{x}_0\,\overline{h})}{\overline{h}} \geq \eta_\varsigma$. Sarà $M_{\varepsilon\eta} = \lim\limits_{\eta_\varsigma=\eta} \lim\limits_{\sigma=0} (\lim\limits_{\tau=0} M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma})$.

Se x_0 è un punto qualunque di $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$, si chiami h_0 il massimo valore di h per cui $\frac{\xi\delta_\varepsilon(x_0 h)}{h} \geq \eta_\varsigma$; il punto $x_0 + h_0$ non potrà appartenere a $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$, perchè in tale ipotesi si potrebbe determinare un $\chi > 0$ (anzi $\geq \tau$) tale che $\frac{\xi\delta_\varepsilon(x_0 + h_0\,,\chi)}{\chi} \geq \eta_\varsigma$ e sarebbe quindi ancora $\frac{\xi\delta_\varepsilon(x_0\,,h_0+\chi)}{h_0+\chi} \geq \eta_\varsigma$. A causa di ciò, e perchè $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ è chiuso, ha un senso ben determinato il parlare del primo punto di $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ seguente $x_0 + h_0$. Ciò posto, sia x_0' il primo punto (a sinistra) del segmento $a \ldots b$ appartenente a $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$, h_0' il corrispondente valore di h_0, x_0'' il primo punto di $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ seguente $x_0' + h_0'$, h_0'' il valore corrispondente di h_0 e così via. L'aggregato $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ sarà tutto contenuto nell'aggregato numerabile di segmenti esterni l'uno all'altro $x_0^{(i)} \ldots x_0^{(i)} + h_0^{(i)}$, e se $\mu_{\tau\sigma\varsigma}$ è la sua misura, $\mu_{\tau\sigma\varsigma} \leq \sum\limits_i h_0^{(i)}$. Ma se $\delta_\varepsilon^{(i)}$ è la misura della parte di D_ε contenuta in $x_0^{(i)} \ldots x_0^{(i)} + h_0^{(i)}$, si ha, per ipotesi,

$$\frac{\xi\delta_\varepsilon^{(i)}}{h_0^{(i)}} \geq \eta_\varsigma \quad , \quad h_0^{(i)} \leq \frac{\xi\delta_\varepsilon^{(i)}}{\eta_\varsigma}\,;$$

dunque infine

$$\mu_{\tau\sigma\varsigma} \leq \sum_i \frac{\xi\delta_\varepsilon^{(i)}}{\eta_\varsigma} = \frac{\xi}{\eta_\varsigma} \sum_i \delta_\varepsilon^{(i)} \leq \frac{\xi}{\eta_\varsigma}\, d_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{\eta_\varsigma}$$

ed anche

$$\mu = \lim_{\eta_\sigma=\eta} \lim_{\sigma=0} \lim_{\tau=0} \mu_{\tau\sigma\varsigma} \leq \frac{\varepsilon}{\eta}\,.$$

Allo stesso modo si può ragionare quando, considerando $\int_{x_0(K\varepsilon)}^{x_0+h} |f(x)|\,dx$ come funzione di x_0 e di h, si determina l'aggregato $N_{\varepsilon\eta}$ dei punti di C_ε in cui

$$\overline{\lim_{h=0}}\, \frac{1}{h} \int_{x_0(K\varepsilon)}^{x_0+h} |f(x)|\,dx \geq \eta\,.$$

Chiamando ν la misura di tale aggregato, si otterrà quindi pure

$$\nu \leq \frac{\int_{K\varepsilon} |f(x)|\, dx}{\eta} \leq \frac{\varepsilon}{\eta}.$$

L'aggregato $C_\varepsilon - M_{\varepsilon\eta} - N_{\varepsilon\eta}$ avrà quindi misura

$$\geq c_\varepsilon - 2\frac{\varepsilon}{\eta} \geq b - a - \frac{\varepsilon}{\xi} - 2\frac{\varepsilon}{\eta} - \varepsilon.$$

Dopo ciò, si supponga che il punto x_0 appartenga a $C_\varepsilon - M_{\varepsilon\eta} - N_{\varepsilon\eta}$; sarà per esso

$$\overline{\lim_{h=0}} \left| \frac{1}{h} \int_{x_0\,(D\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\, dx \right| < \eta \quad , \quad \overline{\lim_{h=0}} \left| \frac{1}{h} \int_{x_0\,(K\varepsilon)}^{x_0+h} f(x)\, dx \right| \leq \overline{\lim_{h=0}} \frac{1}{h} \int_{x_0\,(K\varepsilon)}^{x_0+h} |f(x)|\, dx < \eta$$

e quindi, per la (1),

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x_0\,(C\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\, dx - 2\eta &\leq \underline{\lim}_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \leq \\ &\leq \overline{\lim_{h=0}} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \leq \overline{\lim_{h=0}} \frac{1}{h} \int_{x_0\,(C\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\, dx + 2\eta. \end{aligned} \tag{2}$$

Ma, a causa della continuità di $f_\varepsilon(x)$ in C_ε, assegnato un θ arbitrario, si può determinare per ogni punto x_0 di C_ε un $h_0 > 0$ tale che, per ogni $h \leq h_0$ e per ogni x di C_ε appartenente all'intervallo $x_0 \ldots x_0 + h$, sia $f_\varepsilon(x_0) - \theta \leq f_\varepsilon(x) \leq f_\varepsilon(x_0) + \theta$ e quindi

$$[f_\varepsilon(x_0) - \theta]\, \gamma_\varepsilon(x_0, h) \leq \int_{x_0\,(C\varepsilon)}^{x_0+h} f_\varepsilon(x)\, dx \leq [f_\varepsilon(x_0) + \theta]\, \gamma_\varepsilon(x_0, h).$$

La (2) dà quindi

$$\begin{aligned} \left(\underline{\lim}_{h=0} \frac{\gamma_\varepsilon(x_0, h)}{h}\right)(f_\varepsilon(x_0) - \theta) - 2\eta &\leq \underline{\lim}_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \leq \\ &\leq \overline{\lim_{h=0}} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \leq \left(\overline{\lim_{h=0}} \frac{\gamma_\varepsilon(x_0, h)}{h}\right)(f_\varepsilon(x) + \theta) + 2\eta. \end{aligned} \tag{3}$$

Per valutare i due limiti di $\frac{\gamma_\varepsilon}{h}$ si tenga presente la relazione

$$\gamma_\varepsilon + \delta_\varepsilon + \varkappa_\varepsilon = h;$$

si osservi inoltre che, dalla relazione

$$\overline{\lim_{h=0}} \frac{\xi \delta_\varepsilon}{h} < \eta \quad \text{segue} \quad \overline{\lim_{h=0}} \frac{\delta_\varepsilon}{h} < \frac{\eta}{\xi},$$

e poichè in K_ε è sempre $|f(x)| > \xi$, dalla

$$\overline{\lim_{h=0}} \frac{1}{h} \int_{x_0 (K_\varepsilon)}^{x_0+h} |f(x)|\, dx < \eta \quad \text{segue} \quad \overline{\lim_{h=0}} \frac{\varkappa_\varepsilon}{h} < \frac{\eta}{\xi}.$$

Risulta

$$\overline{\lim_{h=0}} \frac{\gamma_\varepsilon}{h} = 1 \quad , \quad \underline{\lim_{h=0}} \frac{\gamma_\varepsilon}{h} \geq 1 - \overline{\lim_{h=0}} \frac{\delta_\varepsilon + \varkappa_\varepsilon}{h} > 1 - \frac{2\eta}{\xi}.$$

Dunque infine, osservando ancora che $f_\varepsilon(x_0) = f(x_0)$ e che θ si può assumere arbitrariamente piccolo, la (3) diviene

$$f(x_0) - \frac{2\eta}{\xi} f(x_0) - 2\eta \leq \underline{\lim_{h=0}} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \leq \overline{\lim_{h=0}} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \leq f(x_0) + 2\eta$$

ovvero, poichè $|f(x_0)| \leq \xi$,

$$(4) \qquad f(x_0) - 4\eta \leq \underline{\lim}_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \leq \overline{\lim_{h=0}} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \leq f(x) + 2\eta.$$

Si scelga ora $\eta = \sqrt{\varepsilon}$: facendo tendere ε a 0, i due membri estremi della disuguaglianza tendono al medesimo limite $f(x_0)$, onde potremo concludere che, *se il punto x_0 è tale che, per i valori di ε di una conveniente successione tendente a 0, esso è costantemente contenuto in $C_\varepsilon - M_{\varepsilon\eta} - N_{\varepsilon\eta}$, in tal punto x_0 la funzione $\Phi(x) = \int_a^x f(x)\, dx$ ha derivata a destra, e precisamente uguale a $f(x_0)$.*

Ma, per la scelta fatta di η, la misura di $C_\varepsilon - M_{\varepsilon\eta} - N_{\varepsilon\eta}$ è

$$\geq (b - a) - 2\sqrt{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\xi} - \varepsilon$$

e quindi, tosto che ξ è sufficientemente grande ed ε sufficientemente piccolo,

$$\geq (b - a) - 3\sqrt{\varepsilon}.$$

Si consideri quindi una successione di numeri

$$\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \quad (\lim_{i=\infty} \varepsilon_i = 0)$$

tale che la serie $\sum \sqrt{\varepsilon_i}$ sia convergente: la misura dell'aggregato comune a tutti i $C_{\varepsilon_j} - M_{\varepsilon_j \eta_j} - N_{\varepsilon_j \eta_j}$ per $j \geq i$ è $\geq (b - a) - 3 \sum_{j=i}^{j=\infty} \sqrt{\varepsilon_j}$ e tende

quindi a $b-a$ col tendere di i a ∞: *si può quindi assegnare nell'intervallo $a \dots b$ un aggregato* E *di misura nulla tale che, tosto che x_0 non appartiene ad* E, *è soddisfatta la condizione precedentemente enunciata per cui si può affermare l'esistenza della derivata a destra di $\Phi(x)$ in x_0 e la sua uguaglianza a $f(x)$*. Tale aggregato E è il complementare di

$$\lim_{i=\infty} \prod_{j=i}^{j=\infty} (C_{\varepsilon_j \eta_j} - M_{\varepsilon_j \eta_j} - N_{\varepsilon_j \eta_j}) \text{ (}^1\text{)}$$

od anche l'aggregato, contenuto in questo, complementare di

$$\lim_{i=\infty} \sum_{j=i}^{j=\infty} (C_{\varepsilon_j} - M_{\varepsilon_j \eta_j} - N_{\varepsilon_j \eta_j}) .$$

Non altrimenti si ragionerà per le derivate a sinistra.

2. Veniamo ora a stabilire il teorema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni a numeri derivati non limitati:

Se l'aggregato dei valori della funzione $f(x)$ in un qualunque aggregato di punti di misura nulla contenuto in $a \dots b$ ha misura nulla, e se ha misura nulla l'aggregato dei punti in cui qualcuna delle funzioni dei numeri derivati di $f(x)$ può divenire infinita,

se inoltre esiste l'integrale del Lebesgue esteso all'intervallo $a \dots b$ (²) *di una delle dette funzioni derivate* (per es. della funzione $\overline{u}(x)$ derivata superiore a destra),

la funzione $f(x)$ differisce al più per una costante dall'integrale indefinito di tal funzione derivata.

Si ponga infatti

$$\Phi(x) = \int_a^x \overline{u}(x)\, dx .$$

Le due funzioni $f(x)$, $\Phi(x)$ si comportano come le funzioni $F(x)$, $\Phi(x)$ del n. 3 della Nota precedente. Infatti dalla proposizione del n. 1, per quanto riguarda la $\Phi(x)$, dalle ipotesi presenti, per la $f(x)$, risulta evidente che sono soddisfatte tutte le ipotesi di quella proposizione se appena si astrae da quella relativa ai valori della differenza $F(x) - \Phi(x)$. Riguardo a questa si osservi che, a causa della proposizione del n. prec., l'aggregato dei punti in cui $\Phi(x)$ può avere una derivata infinita ha misura nulla e che l'aggregato dei valori di una funzione integrale qualunque nei punti di un aggre-

(¹) Indicando con $\Pi \mathfrak{A}_i$ l'aggregato comune a tutti gli aggregati $\mathfrak{A}_i$ (prodotto logico di essi aggregati) e analogamente, in seguito, con $\Sigma \mathfrak{A}_i$ la somma degli aggregati medesimi.

(²) E quindi ad ogni intervallo contenuto in $a \dots b$. Esistono funzioni derivate le quali non ammettono integrale del Lebesgue. Cfr. per un esempio: Lebesgue, Annali di matematica (3) 7, pag. 269-70.

gato di misura nulla ha misura nulla [1]; siccome quindi, per le ipotesi fatte, nell'aggregato di misura nulla in cui le derivate di $f(x)$ o di $\Phi(x)$ possono essere infinite, ciascuna delle due funzioni assume un aggregato di valori di misura nulla, un aggregato di valori di misura nulla assumerà pure in detti punti la differenza $f(x) - \Phi(x)$ [2].

3. Notevole corollario di questa proposizione è il seguente:

Se di una delle quattro funzioni derivate della funzione $f(x)$ (per es. della funzione $\overline{u}(x)$ derivata superiore a destra) *esiste l'integrale del Lebesgue esteso all'intervallo* $a \ldots b$; *se inoltre le quattro funzioni dei numeri derivati della funzione* $f(x)$ *sono finite nell'intervallo* $a \ldots b$, o più generalmente *se l'aggregato dei punti di* $a \ldots b$ *in cui qualcuna delle funzioni dei numeri derivati di* $f(x)$ *può divenire infinita è riducibile, la funzione* $f(x)$ *differisce al più per una costante da* $\int_a^x \overline{u}(x)\,dx$ [3].

[1] È questa conseguenza immediata della definizione dell'integrale. Un aggregato di punti x di misura nulla si può racchiudere entro un aggregato S di segmenti di misura totale ε piccola a piacere: si spezzi l'integrale dei valori assoluti della funzione integrando in due parti: l'una relativa ai punti in cui la funzione integrando è in valore assoluto $> \xi$, l'altra relativa ai punti residui. La prima parte diviene piccola a piacere prendendo ξ sufficientemente grande; la seconda parte, considerata solo nei segmenti di S è $< \xi\varepsilon$ e quindi piccola a piacere per ε sufficientemente piccolo; dunque l'integrale dei valori assoluti, esteso a S è piccolo a piacere. Ora questo integrale è minore o uguale alla variazione totale dell'integrale dato nei segmenti di S, e quindi maggiore o uguale alla misura dei valori dell'integrale nei punti dell'aggregato considerato.

[2] Lo si vede facilmente osservando che l'aggregato dei valori considerati di $f(x)$ si può racchiudere in un aggregato numerabile di segmenti s_i di misura totale $< \varepsilon'$: si pensi allora numerato questo aggregato di segmenti e all'i-mo si faccia corrispondere un η_i tale che $\sum \eta_i < \varepsilon''$: si immagini ancora racchiuso l'aggregato dei valori considerati di $\Phi(x)$ in aggregati di segmenti di misure totali rispettivamente $< \eta_i$; i valori della differenza $f(x) - \Phi(x)$ per gli x considerati e per $f(x)$ in s_i, sono compresi fra i valori di $\lambda - \mu$ per λ in s_i e μ nel nominato aggregato di segmenti di misura $< \eta_i$. Si conclude facilmente che l'aggregato dei valori considerati per la differenza $f(x) - \Phi(x)$ ha misura $< \varepsilon' + \varepsilon''$.

[3] Per vero tosto che le funzioni dei numeri derivati sono finite, sono verificate le ipotesi del precedente enunciato; inquantochè, se l'aggregato dei valori della $f(x)$ in un aggregato $\mathfrak{A}$ di punti di misura nulla ha misura non nulla, esiste un aggregato di punti in cui almeno una derivata di $f(x)$ diviene infinita. Per provarlo basta ripetere un ragionamento analogo a quello del n. 1 della Nota precedente. Si racchiuda l'aggregato $\mathfrak{A}$ in un aggregato $S_{\varepsilon'}$ di segmenti di misura ε': se l'aggregato dei valori di $f(x)$ nei punti di $\mathfrak{A}$ ha misura $\geq v$, in uno almeno di questi segmenti è contenuto un segmento in cui il rapporto incrementale di $f(x)$ è $\geq \frac{v}{\varepsilon'}$, e dentro ad esso si può determinare similmente un segmento in cui il rapporto incrementale è $\geq \frac{v}{\varepsilon'\varepsilon''}$ e così via; scegliendo i numeri $\varepsilon', \varepsilon'' \ldots < 1$ (e si possono prendere piccoli a piacere), si ottiene una serie di se-

Però la considerazione simultanea delle quattro derivate porta in queste proposizioni una complicazione superiore al necessario. Sulla riduzione delle ipotesi alla considerazione d'una derivata sola, quella che si integra, ritornerò ancora una volta.

4. L'identità, a meno d'una costante, delle funzioni $f(x)$ e $\Phi(x)$ ci permette di applicare alla prima le proprietà dimostrate per la seconda nel n. 1. Si può quindi affermare che:

Se una funzione è tale che l'aggregato dei valori di essa in ogni aggregato di misura nulla abbia misura nulla, che l'aggregato dei punti in cui qualcuna delle sue funzioni derivate può essere infinita abbia misura nulla; tale infine che una qualunque di queste funzioni derivate ammetta l'integrale del Lebesgue esteso all'intervallo $a \ldots b$, tal funzione ha derivata determinata e finita in tutti i punti dell'intervallo $a \ldots b$, tolto al più un aggregato di punti di misura nulla.

Applicando questa osservazione alla proposizione del n. 3 della Nota precedente si vede che si possono in essa alterare alcun poco le ipotesi e dire che:

Si potrà affermare che due funzioni continue $F(x)$ *e* $\Phi(x)$ *non possono differire in un intervallo $a \ldots b$ che per una costante tosto che si sappia che le due funzioni hanno una coppia di derivate omonime uguali in tutti i punti dell'intervallo, fatta astrazione dai punti di un aggregato di misura nulla, e che inoltre le due funzioni hanno finite le derivate in tutti i punti dell'intervallo, tolti al più i punti di un aggregato di misura nulla, purchè ciascuna delle due funzioni o più generalmente la loro differenza assuma in ogni aggregato di punti di misura nulla un aggregato di valori di misura nulla.*

5. Terminerò questa Nota con alcune considerazioni sul problema delle funzioni primitive che hanno derivata determinata in tutti i punti. A queste funzioni si applicano intanto le proposizioni precedenti: *Ogni funzione avente derivata determinata e finita in tutti i punti dell'intervallo $a \ldots b$ ed integrabile in tale intervallo è uguale — a meno d'una costante — all'inte-*

---

gmenti contenuti ciascuno nel precedente e che ha per limite un punto in cui almeno una derivata è infinita.

È chiaro che: 1° l'aggregato $\mathfrak{A}$ non è numerabile, perchè sarebbe numerabile e quindi di misura nulla l'aggregato dei valori corrispondenti di $f(x)$; 2° l'aggregato $\mathfrak{A}$ è contenuto in ogni derivato dell'aggregato dei punti in cui una derivata è infinita, od almeno si possono da esso sopprimere senza danno i punti che non appartengono a questo derivato, perchè l'aggregato dei valori di $f(x)$ in essi ha misura nulla. Quindi se in un aggregato di punti di misura nulla l'aggregato dei valori della funzione ha misura non nulla, l'aggregato dei punti in cui una derivata di $f(x)$ è infinita non può essere riducibile.

grale indefinito della propria derivata [1]. Quando poi la derivata della funzione possa divenire infinita, la proposizione resterà pur vera purchè l'aggregato dei valori della funzione in ogni aggregato di punti di misura nulla abbia misura nulla. Quando questa condizione non fosse soddisfatta, la proposizione non potrebbe sussistere perchè, come si osservò poc'anzi, una funzione integrale non può assumere un aggregato di valori di misura non nulla in un aggregato di punti di misura nulla. Cionondimeno si può dimostrare che il problema delle funzioni primitive è ancora perfettamente determinato: *se* cioè *una funzione ha derivata unica e determinata in tutti i punti d'un intervallo, la funzione medesima è determinata nell'intervallo, a meno d'una costante, dai valori della sua derivata in un aggregato di punti dell'intervallo, il cui aggregato complementare abbia misura nulla* [2].

6. Per mostrarlo osserveremo anzitutto che:

Se una funzione ha derivata unica e determinata in tutti i punti di un intervallo $a \ldots b$ e se tal derivata è nulla od infinita in tutti i punti che non appartengono ad un aggregato di misura nulla, la derivata medesima è nulla in tutto l'intervallo e la funzione si riduce quindi ad una costante.

Nelle presenti ipotesi esistono infatti in ogni segmento punti in cui la derivata è nulla o infinita; ma la derivata non può allora essere costantemente d'uno stesso segno (non nulla) in tutti i punti di un segmento, perchè una funzione monotona non può avere derivata infinita in tutti i punti di un aggregato di misura $\mu > o$ [3]; e, per un noto teorema del sig. Dar-

[1] Quando la derivata è integrabile nel senso di Riemann-Cauchy, la proposizione è nota (cfr. Schoenflies, *Bericht. ü. Mengenlehre*, pag. 213).

[2] Questa proposizione può essere confrontata, almeno nei termini in cui è espressa, con altre note, per es. la seguente dovuta al Volterra (V. *Sui principi del calcolo integrale*, Giornale di Battaglini, 19, pag. 333) « Se la derivata di una funzione si conosce « in tutti i punti di un intervallo esclusi quelli appartenenti ad un gruppo di punti ed « ai suoi punti limiti, la condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa determinare « la funzione primitiva (conoscendone il valore in un punto) è che il gruppo sia rinchiu- « dibile in intervalli arbitrariamente piccoli ». Qui si osservi però che il Volterra ammette implicitamente di ragionar sempre sopra funzioni finite; nella proposizione in questione la derivata medesima della funzione incognita deve supporsi finita. Una notevole divergenza si mostra inoltre fra la proposizione citata e quella del testo, in quanto la prima enuncia come condizione *necessaria* una che non è affatto rispettata nell'enunciato del testo. Di ciò deve ricercarsi la ragione nella condizione che il Volterra viene ad imporre all'aggregato eccezionale di essere chiuso ed in qualche dubbio che può nascere su ciò che le funzioni che si offrono come esempio, diverse fra loro ed aventi la stessa derivata fuori del gruppo eccezionale, possano non aver derivata nei punti di questo gruppo eccezionale. Invero, se si abbandona l'ipotesi che il gruppo eccezionale sia chiuso, si troverà che una proposizione in contraddizione coll'enunciata necessità, fu dimostrata dallo Scheeffer fin dal 1885 (Acta Mathematica, vol. 5, pag. 282).

[3] Altrimenti, scelto arbitrariamente un ε e un $\mu_1 < \mu$, prossimo quanto si vuole a μ, esisterebbe un χ tale che l'aggregato dei punti x in cui il rapporto incrementale della funzione nell'intervallo $x \ldots x+h$, per ogni $h \leq \chi$ è $\geq \frac{1}{\varepsilon}$ ha misura $> \mu_1$;

boux [1] in ogni segmento in cui la derivata abbia valori di segno contrario, esistono punti in cui la derivata è nulla: in ogni intervallo esistono dunque punti in cui la derivata è nulla.

Si aggiunga a questa osservazione il fatto che la derivata (supposta unica e determinata in ogni punto di $a \dots b$) costituisce una funzione di 1ª classe del Baire e quindi rispetto ad ogni aggregato chiuso di valori della variabile possiede punti di continuità in ogni intervallo [2]; segue che in ogni intervallo esisteranno segmenti in cui essa derivata resta piccola a piacere. In un tal segmento non esisteranno punti in cui la derivata sia infinita: quindi (pei n. 1, 2 della mia Nota precedente) la funzione sarà costante in esso e la derivata vi sarà ovunque nulla. Negli estremi di tal segmento la derivata sarà ancora nulla: infatti, per la già citata proposizione del sig. Darboux fra due punti in cui la derivata assuma valori diversi, ne esistono di quelli in cui la derivata assume valori intermedi; si conclude che non potrebbe la derivata esser $\neq 0$ negli estremi del segmento senza esser $\neq 0$ in qualche punto del segmento medesimo. L'aggregato dei punti in cui la derivata può esser $\neq 0$ deve dunque esser *contenuto* nell'aggregato non denso — perfetto — complementare a un aggregato di segmenti (e non può contenere gli estremi di questi segmenti). E si deve supporre che in questo aggregato esso sia denso, perchè ogni segmento in cui non esistano punti a derivata $\neq 0$ si può pensare previamente soppresso dall'aggregato. In ogni segmento contenente punti di questo aggregato perfetto, son pure contenuti punti in cui la derivata è nulla e che appartengono ad esso aggregato (gli estremi dei segmenti complementari); quindi, per la ricordata proprietà delle funzioni di 1ª classe, esisterà in esso un segmento contenente punti dell'aggregato medesimo ed in cui la derivata resta piccola quanto si vuole; e riapplicando la proposizione già ricordata (Nota precedente n. 1, 2) tale derivata sarà ancora nulla in tutti i punti del nominato aggregato perfetto, contenuti in tal segmento. Ora questa conclusione contraddice alla definizione di quell'aggregato. Ne segue la non esistenza dell'aggregato medesimo.

7. Segue dalla proposizione ora dimostrata che se due funzioni hanno derivata in tutti i punti dell'intervallo $a \dots b$, e, se si astrae da un aggregato di misura nulla, vi hanno precisamente la stessa derivata, la loro diffe-

---

questo aggregato è chiuso, e ripetendo per esso un ragionamento analogo a quello fatto nel n. 1 per l'aggregato è chiuso $M_{\varepsilon\eta\tau\sigma\varsigma}$ e nel n. 1 della Nota precedente per l'aggregato B, si concluderebbe che si può determinare un aggregato di segmenti contenuto in $a \dots b$ in cui l'incremento della funzione è $> \frac{\mu_1}{\varepsilon}$ e cioè grande a piacere.

[1] Cfr. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* etc. pag. 89. Dini, *Fondamenti per una teoria delle funzioni di variabile reale*, n. 172.

[2] Baire, *Thèse, Sur les fonctions de variables réelles*, pag. 30 (Annali di Matematica, 1899).

renza — la quale in tutti i punti di $a \ldots b$ ha derivata, e precisamente derivata nulla o infinita, se si astrae dal nominato aggregato — deve ridursi ad una costante onde risulta la proposizione enunciata alla fine del n. 4.

Si può ancora rilevare che una funzione la quale abbia derivata in tutti i punti di un intervallo e precisamente derivata nulla nell'aggregato complementare di un aggregato di misura nulla, dovendo essere costante, non differirà dall'integrale della propria derivata; fatto notevole se si osserva che appunto per esemplificare i casi d'eccezione al teorema fondamentale del calcolo integrale furono immaginate le funzioni continue costanti a tratti, per cui l'integrale della derivata è nullo senza che sia costante la funzione [1]: tali funzioni non hanno derivata determinata in tutti i punti dell'intervallo e non possono quindi illuminare il problema nelle presenti ipotesi.

Matematica. — *Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insiemi lineari.* Nota di Ettore Bortolotti, presentata dal Corrispondente E. Cesàro.

Se si indica con r_n il numero degli elementi di una data classe C, che sono compresi fra i primi n della successione $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$, *la probabilità, per un termine preso a caso fra i primi n di quella successione, di appartenere alla classe* C, *è espressa dal rapporto* $\frac{r_n}{n}$, ed *il limite, per* $n = \infty$, *di cotesto rapporto, rappresenta la frequenza degli elementi di classe* C, *nella successione* u_n.

I concetti di probabilità e di frequenza possono estendersi ad insiemi $[\xi]$, lineari non numerabili; intendendo per probabilità *dei punti* $[\xi]$ *nell'intervallo* $x \urcorner X$, *il rapporto della estensione esteriore della parte di* $[\xi]$ *contenuta in* $x \urcorner X$, *alla lunghezza* $X - x$; e per frequenza *dei punti* $[\xi]$ *in* a (*a punto a distanza finita*, od *a* punto dell'infinito), *il limite delle probabilità, che i punti* $[\xi]$ *hanno in intorni di* a, *i cui estremi si accostino indefinitamente ad* a.

La frequenza viene, in qualche modo, ad indicarci il grado di condensazione dei punti $[\xi]$ intorno ad a; e pare intuitivo l'ammettere, che se ai punti dell'intorno $x \urcorner X$, dove l'insieme $[\xi]$ è dato ed il punto a è contenuto, si fanno corrispondere quelli del segmento $y(x) \urcorner y(X)$, mediante una operazione $y = f(x)$, espressa da una funzione sempre crescente insieme con la sua derivata; nella corrispondenza biunivoca ordinata, continua, che così si stabilisce, la frequenza sia un elemento invariante.

[1] V. Harnack, Math. Ann. 24; Schoenflies, l. c. pag. 166 e seg.

Ho verificato invece, che questa invarianza non sempre si verifica; ma dipende dalle rapidità con cui la $y(x)$ tende ad $y(a)$, mentre x tende ad a.

Più precisamente: essa ha luogo per tutte le trasformazioni che si operano mediante funzioni $y(x)$, nelle quali la rapidità della tendenza al limite $y(a)$, non è superiore a quella che può essere rappresentata con potenze reali $(x-a)^m$, della differenza $x-a$; ma che, per funzioni le quali tendono al limite con rapidità maggiore di quelle esprimibili in cotesta forma, la frequenza non può dirsi invariante, se non si impongono speciali limitazioni circa la definizione degli insiemi $[\xi]$ considerati.

Questa Nota fa seguito alla Nota *Sopra una ricerca di limite* stampata in questi Rendiconti, e non ha la pretesa di trattare in modo esauriente l'argomento, difficile, e, credo, importante; ma di dare notizia dei risultamenti ottenuti e del metodo seguito per questi studî; non tentati, che io mi sappia, da altri, ed accennati appena in poche righe di una mia Nota precedente [1].

Uno sviluppo più completo dovrà trovarsi in una memoria, che fa parte di una serie di studî sulla *convergenza di algoritmi infiniti*, nel volume in corso di stampa degli Atti della Accademia di Scienze in Modena.

1. Indichiamo con $[\xi]$ un insieme di numeri reali comunque definiti, e con $S(x, X)$, la estensione esteriore della parte di questo insieme contenuta nel segmento $x \frown X$.

2. *Frequenza dell' insieme* $[\xi]$ *nel punto dell' infinito*, è il limite (quando esiste)

$$(1) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{X=\infty} \dfrac{S(x, X)}{X-x} \\ x \text{ finito, costante.} \end{cases}$$

3. *Frequenza dell'insieme* $[\xi]$ *nel punto* a a distanza finita, è il limite (quando esiste)

$$(2) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x=a \\ X=a}} \dfrac{S(x, X)}{X-x}, \\ X-x>0 \ , \ x \leqq a \leqq X. \end{cases}$$

4. Per $x=a$, si ha *la frequenza a destra*, per $X=a$, *la frequenza a sinistra di* a.

[1] Cfr. questi Rendiconti, vol. XI, 2° sem., 1902, fasc. 2°: *Contributo alla teoria degli insiemi.*

5. Sia x_n una successione soddisfacente le condizioni [1]

$$x_0 = x \qquad x_n - x_{n-1} > 0\,,$$

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} x_n = a\,, \qquad \begin{cases} \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{a - x_{n-1}} = 0 \quad (a \text{ finito}); \\ \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x} = 0 \quad (a = \infty); \end{cases}$$

la frequenza a sinistra nel punto a a distanza finita si potrà calcolare cercando il limite

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{S(x_n\,,a)}{a - x_n} = \lim_{n=\infty} \frac{S(x_n\,,x_{n+1}) + S(x_{n+1}\,,x_{n+2}) + \cdots}{(x_{n+1} - x_n) + (x_{n+2} - x_{n+1}) + \cdots}\,,$$

e quella nel punto dell'infinito, cercando il limite

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{S(x_0\,,x_n)}{x_n - x_0} = \lim_{n=\infty} \frac{S(x_0\,,x_1) + S(x_1\,,x_2) + \cdots + S(x_{n-1}\,,x_n)}{(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})}\,.$$

6. Se noi ora supponiamo che la variabile

$$\beta_n = a - x_n\,,$$

abbia ordine finito di infinitesimo; osservando che

$$\Delta\beta_n = x_{n-1} - x_n\,,$$

ed applicando il teorema 2° (v. anche l'enunciato del teor. 3°) della mia Nota: *Sopra una ricerca di limite*, avremo dalla formola (4), che *se esiste il limite*

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{S(x_0\,,x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{S(x_1\,,x_2)}{x_2 - x_1} + \cdots + \frac{S(x_{n-1}\,,x_n)}{x_n - x_{n-1}} \right\},$$

questo ci dà la frequenza dell'insieme dato nel punto a [2].

7. Similmente, se la variabile

$$B_n = x_n - x_0$$

è infinita di ordine finito, dalla (5) si deduce che, *quando esiste il limite*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{S(x_0\,,x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{S(x_1\,,x_2)}{x_2 - x_1} + \cdots + \frac{S(x_{n-1}\,,x_n)}{x_n - x_{n-1}} \right\},$$

[1] La condizione $\dfrac{\Delta\varphi_n}{\varphi_n} = 0$, che noi richiediamo per la successione $\varphi_n = a - x_n$ (per a, finito, $\varphi_n = x_n$, per a infinito), è soddisfatta da tutte le variabili monotone φ_n, che decrescono meno rapidamente di $e^{-\varepsilon n}$, o che crescono meno rapidamente di $e^{\varepsilon n}$ (cfr. Bortolotti, *Sul limite del quoziente di due funzioni*, Ann. di Mat. t. VIII, serie III, pag. 273 e seguenti.

[2] Intendiamo *la frequenza a sinistra*, altrettanto può dirsi per *la frequenza a destra*; per *punti a distanza finita noi ci limiteremo, in seguito, a considerare la frequenza a sinistra.*

questo ci dà l'espressione della frequenza del dato insieme, nel punto dell'infinito. Se la variabile $B_n = x_n - x_0$, *è infinita del primo ordine il limite* (6) *esiste sempre in tutti i casi in cui esiste il limite* (5), *cioè in cui è determinata la frequenza che l'insieme dato ha nel punto dell'infinito* [1].

8. Riassumendo si ha il teorema:

Se la successione sempre crescente x_n *tende al punto* a (all'infinito) *e le differenze* $a - x_n$ $(x_n - x_0)$, *sono per* $n = \infty$, *infinitesime* (*infinite*) *di ordine finito, la frequenza dell'insieme* $[\xi]$ *nel punto* a *è espressa dal limite* (*se esiste*) *per* $n = \infty$ *della media delle probabilità, che i punti* $[\xi]$, *hanno, rispettivamente, negli intervalli* $x_0 \urcorner x_1$, $x_1 \urcorner x_2$, ... $x_{n-1} \urcorner x_n$, *determinati dai punti della successione* x_n.

Questo limite sicuramente esiste, se l'insieme dato ha, nel punto $x_n = \infty$, *frequenza determinata, e se la successione* $x_n - x_0$ *è infinita del primo ordine per* $n = \infty$.

9. Sia $\varphi(x)$ la *indicatrice di frequenza* [2] dei punti $[\xi]$.

La estensione esteriore della parte di $[\xi]$ contenuta nel segmento $x \urcorner X$, sarà data dall'integrale definito:

$$S(x, X) = \int_x^X \varphi(x)\, dx. \tag{7}$$

10. Se, mediante la funzione continua, derivabile, sempre crescente o sempre decrescente $y(x)$, si fanno corrispondere ai punti del segmento $x \urcorner X$, quelli del segmento $y(x) \urcorner y(X)$; all'insieme $[\xi]$ corrisponderà un insieme $[\eta]$, la cui estensione esteriore sarà parimenti espressa dalla formola

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{S}(y(x), y(X)) = \displaystyle\int_y^Y \Phi(y)\, dy, \\ y = y(x) \quad Y = y(X); \\ \Phi(y) \text{ indicatrice di frequenza dell'insieme} \\ [\eta = y(\xi)]; \end{array}\right. \tag{8}$$

o dall'altra equivalente:

$$\mathcal{S}(y, Y) = \int_x^X \varphi(x) \,.\, y'(x)\, dx; \tag{9}$$

e se supponiamo la y' continua nel tratto $x \urcorner X$, avremo la relazione

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{S}(y, Y) = y'(x + \theta(X - x))\, S(x, X) \\ 0 < \theta < 1. \end{array}\right. \tag{10}$$

[1] Cfr. la Nota: *Sopra una ricerca di limite*, al teorema 1°.

[2] Si prenda cioè $\varphi[\xi] = 1$, $\varphi(x) = 0$, per $x \neq \xi$. Cfr. Cesàro, *Sull'uso della integrazione in alcune questioni di Aritmetica*. Rendiconti Circ. Mat. di Palermo t. I, pag. 293 e seguenti.

11. Teorema. *Sia $y(x)$ una funzione reale della variabile reale x, infinita di ordine finito per $x = \infty$, monotona, insieme con la sua derivata $y'(x)$, in tutti i punti a distanza finita di un determinato intorno $x_0 \neq \infty$ dell'infinito; la quale trasformi biunivocamente i punti del raggio $x_0 \neq \infty$, in quelli del raggio $y_0 \neq \infty$.*

Ad ogni insieme $[\xi]$, di punti x, con frequenza determinata nel punto dell'infinito, corrisponde un insieme $[\eta = y(\xi)]$, di eguale frequenza.

Preso ad arbitrio il numero positivo h, si costruisca la successione

$$x_n = x_0 + n h . \tag{11}$$

Ponendo

$$y_n = y(x_n) , \tag{12}$$

dalla formola (10) ricaviamo

$$\frac{\delta(y_{n-1}, y_n)}{h \cdot y'(x_{n-1} + \theta_{n-1} h)} = \frac{S(x_{n-1}, x_n)}{h} = \frac{S(x_{n-1}, x_n)}{x_n - x_{n-1}} ,$$

e, per la applicazione del teorema sui limiti già ricordato [1],

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta(y_{i-1}, y_i)}{\sum_{i=1}^{n} h \cdot y'(x_{i-1} + \theta_{i-1} h)} = \lim_{n=\infty} \frac{\delta(y_0, y_n)}{\sum_{1}^{n} h \cdot y'(x_{i-1} + \theta_{i-1} h)} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{S(x_{i-1}, x_i)}{x_i - x_{i-1}} .$$

Ma il secondo membro rappresenta la frequenza dell'insieme $[\xi]$ nel punto dell'infinito; indicando tale frequenza con ω, avremo dunque:

$$\omega = \lim_{n=\infty} \frac{\delta(y_0, y_n)}{\sum_{1}^{n} h y'(x_{i-1} + \theta_{i-1} h)} .$$

D'altro canto si ha

$$\sum_{1}^{n} h y'(x_{i+1} + \theta_{i-1} h) = y(x_n) - y(x_0) + \vartheta(y'(x_{n+1}) - y'(x_0))$$

$$-h < \vartheta < h ;$$

ricordando che

$$\lim_{n=\infty} \frac{y'(x)}{y(x)} = 0 ,$$

[1] Questa applicazione è lecita perchè $\sum_{1}^{n} y'(x_n)$ è infinita di ordine finito; vediamo infatti, che si comporta assintoticamente come $y(x_n)$, ed essendo x_n infinito del primo ordine, $y(x_n)$ ha, rispetto alla n, lo stesso ordine che $y(x)$ ha per $x = \infty$.

abbiamo dunque:

$$\omega = \lim_{n=\infty} \frac{\mathcal{S}(y_0, y_n)}{y_n - y_0};$$

e ciò, per quanto si è detto al n. 6, e per le ipotesi poste sulla crescenza della y, mostra appunto che *la frequenza dell'insieme* $[\eta = y(\xi)]$ *nel punto* $y = \infty$ *è determinata ed eguale ad* ω.

12. Volendo esaminare la possibilità di estendere il risultamento trovato a funzioni $y(x)$, crescenti più rapidamente di qualunque potenza reale x^a di x, (come sarebbero $x^{lg\, x}$, e^x, $x^x \cdots$); osservo anzitutto che, preso un numero positivo k arbitrario, la successione

$$y_n = y_0 + nk$$

corrisponde ad una successione x_n, determinata dalla relazione

$$y_n = y(x_n),$$

la quale cresce tanto più lentamente, quanto più rapida è la crescenza della $y(x)$.

Essendo y_n infinita del primo ordine, rispetto ad n, avremo la frequenza dell' insieme $[\eta = y(\xi)]$, cercando il limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{S}(y_{i-1}, y_i)}{y_i - y_{i-1}},$$

ma, per la (10),

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{S}(y_{i-1}, y_i)}{y_i - y_{i-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{S(x_{i-1}, x_i)\, y'(x_{i-1} + \theta_{i-1} \Delta x_i)}{y_i - y_{i-1}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{S(x_{i-1}, x_i)}{x'(y_{i-1} + \theta k)\,(y_i - y_{i-1})}.$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{S}(y_{i-1}, y_i)}{y_i - y_{i-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{S(x_{i-1}, x_i)}{x_i - x_{i-1}}. \tag{11}$$

Se questo limite esiste, si ha:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{S(x_{i-1}, x_i)}{x_i - x_{i+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{S(x_0, x_n)}{x_n - x_0};$$

perchè siamo in uno dei casi in cui il teorema sui limiti, più volte citato è valido; precisamente in quello noto da lungo tempo, di variabili $b_n = x_n - x_{n-1}$ positive infinitesime, e di variabili $B_n = x_n - x_0$ infinite, per $n = \infty$.

Se dunque l'insieme $[\eta = y(\xi)]$ ha frequenza determinata nel punto dell'infinito, l'insieme dato $[\xi]$ ha la stessa frequenza; onde potremo dire, che *per effetto della trasformazione*

$$y = y(x),$$

quando la $y(x)$ abbia, per $x = \infty$, ordine *di infinito superiore a quello di qualunque potenza reale x^a della x, un insieme di data frequenza si trasforma in un insieme di eguale frequenza, o che non ha frequenza determinata, per $y = \infty$.*

13. Un esempio di insieme $[\xi]$ a frequenza nulla, cui, per la trasformazione $y = e^x$ corrisponde un insieme a frequenza non infinitesima, ci è dato dai punti contenuti nei segmenti

$$\begin{cases} a^{\neg} a + \dfrac{a}{\lg a}, \; a^{2\neg} a^2 + \left(\dfrac{a}{\lg a}\right)^2, \ldots, a^{n\neg} a^n + \left(\dfrac{a}{\lg a}\right)^n, \ldots, \\ a > e. \end{cases}$$

Subito si verifica, infatti, che il massimo limite del rapporto $\dfrac{S(x)}{x}$, è quello verso cui tende la successione

$$\frac{S\left(0, a^n + \left(\dfrac{a}{\lg a}\right)^n\right)}{a^n + \left(\dfrac{a}{\lg a}\right)^n} = \frac{\dfrac{a}{\lg a} + \left(\dfrac{a}{\lg a}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{a}{\lg a}\right)^n}{a^n + \left(\dfrac{a}{\lg a}\right)^n},$$

e che questo è *zero*.

La corrispondente successione

$$\frac{S\left(1, e^{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n}\right)}{e^{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n} - 1} = \frac{\left(e^{a + \frac{a}{\lg a}} - e^a\right) + \cdots + \left(e^{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n} - e^{a^n}\right)}{e^{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n} - 1},$$

ha tutti i suoi termini maggiori di quelli della successione

$$\frac{e^{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n} - e^{a^n}}{e^{a^n + \left(\frac{a}{\lg a}\right)^n}} = 1 - \frac{1}{e^{\left(\frac{a}{\lg a}\right)^n}},$$

la quale tende al limite 1.

14. Un esempio di insiemi $[\xi]$ pei quali il limite (11) sicuramente esiste, qualunque sia la rapidità di crescenza della y, l'abbiamo quando *si ammetta la possibilità di far corrispondere ad ogni numero dato positivo ε, un numero x_ε tale, che*

$$x > x_\varepsilon \quad , \quad \frac{S(x_\varepsilon, x)}{x - x_\varepsilon} < \varepsilon,$$

Si ha allora:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{S(x_{i-1}, x_i)}{x_i - x_{i-1}} = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1}{n} \sum \dfrac{S(x_{i-1}, x_i)}{x_i - x_{i-1}} = \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{S(x_0, x_n)}{x_n - x_0} = 0, \\ \text{ed anche (formule (11)),} \\ \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{S(y_0\, y_n)}{y_n - y_0} = 0, \end{cases}$$

cioè, *l'insieme dato ed il suo trasformato hanno frequenza infinitesima.*

Questo caso è particolarmente interessante per lo studio della convergenza.

15. Esistono teoremi analoghi per la frequenza in punti a distanza finita, e per operazioni che fanno corrispondere il punto dell'infinito a punti a distanza finita, o reciprocamente; le cui dimostrazioni, fondate sugli stessi principî di quelle superiormente esposte, si troveranno in una Memoria che presto sarà stampata negli Atti della R. Accademia di Scienze di Modena.

Fisica. — *Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate e di onde hertziane* (1). Nota del prof. Riccardo Arnò, presentata dal Socio G. Colombo.

In correlazione ai miei precedenti lavori sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate e di onde hertziane (2), ho stabilito una nuova ricerca sperimentale con lo scopo precipuo di studiare gli effetti di una corrente alternata di data intensità e frequenza sul ciclo di isteresi di un cilindro di acciaio sospeso in campi magnetici rotanti della stessa intensità, ma di frequenza diversa (3).

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di elettrotecnica del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano (Istituzione Carlo Erba).

(2) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem., 1904, pag. 272; Atti dell'Associazione elettrotecnica italiana (Comunicazione fatta alla sezione di Milano nella seduta del 25 maggio 1904); Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, 1905, serie 2, vol. XXXVIII, pag. 142; Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem., 1905, pag. 278; Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, 1905, serie 2, vol. XXXVIII, pag. 438; Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem., 1905, pag. 368; Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem., 1905, pag. 512; Atti dell'Associazione elettrotecnica italiana (Comunicazione fatta l'11 ottobre 1905 all'Assemblea Generale di Firenze); Società italiana di Fisica (Comunicazione fatta alla Riunione annuale del 1906 in Roma).

(3) Osservo che, per tenere conto della variazione della resistenza induttiva delle spirali induttrici destinate ad essere percorse dalle correnti alternate di frequenza diversa

Nella mia ultima Nota presentata a questa R. Accademia (Rendiconti, 1° sem., 1905, pag. 512) ho succintamente riepilogati in undici paragrafi i risultati principali delle precedenti mie ricerche; e quivi in appresso sono esposti i nuovi fatti da me ultimamente constatati:

12°. Gli effetti di una data corrente alternata sul ciclo di isteresi dell'acciaio sono diversi a seconda della frequenza del campo Ferraris in cui si trova sospeso il cilindro di materiale magnetico;

13°. Col variare della frequenza del campo magnetico rotante, e mantenendo inalterate tutte le altre condizioni in cui si sperimenta, si può avere diminuzione od aumento di isteresi: e la variazione della frequenza del campo Ferraris ha come conseguenza la variazione dell'aumento o della diminuzione di isteresi;

14°. Può accadere che, per una corrente alternata di data intensità e frequenza, e per una data intensità del campo rotante, esista un valore della frequenza del campo stesso per cui non si abbia nè aumento, nè diminuzione di isteresi nel materiale magnetico sperimentato.

Fisica. — *Sopra un nuovo sistema di telegrafia senza filo.* Nota di Alessandro Artom, presentata dal Corrispondente G. Grassi.

Nella Nota del 15 marzo 1903 ho riferito le idee generali su cui si fonda il sistema di radiotelegrafia da me ideato e nella successiva Nota del 5 febbraio 1905 ho reso conto dei risultati ottenuti nelle esperienze eseguite col concorso della R. Marina italiana nelle stazioni radiotelegrafiche di Spezia, di Monte Mario (Roma), di Anzio, di Ponza e dell'Isola della Maddalena.

Quegli esperimenti hanno chiaramente provato che col mio sistema si ottiene l'importantissimo risultato di poter rendere le segnalazioni assai intense in una determinata direzione, riducendo e praticamente annullando le segnalazioni nelle direzioni non necessarie. Tali effetti di dirigibilità delle onde elettriche furono per i miei apparati nettamente constatati a distanze di oltre 300 chilometri dalla stazione trasmettente e questi decisivi risultati non erano prima d'allora da alcuno stati ottenuti.

Fino dai primi mesi del 1903 ho pure ideato l'apparato ricevente che, più tardi, nel 1905 ho modificato.

---

producenti i vari campi Ferraris su cui ho sperimentato, in ogni singolo esperimento venivano opportunamente modificate le resistenze ohmiche addizionali inserite nei circuiti delle spirali induttrici medesime: per modo che in ogni caso le impedenze dei detti circuiti avessero a risultare assolutamente invariate.

Questo apparato ricevente presenta a sua volta molti vantaggi pratici fra i quali ricorderò quello di ricevere solamente le segnalazioni che provengono da apparati situati in un determinato settore, e l'altro di eliminare gli effetti dannosi prodotti sugli apparati ricevitori dalla elettricità atmosferica.

Scopo della presente Nota si è di descrivere alcune delle disposizioni da me adoperate nelle esperienze eseguite colla R. Marina italiana e che furono iniziate nel febbraio 1903.

Apparato trasmettente. — La forma e disposizione degli aerei trasmettitori è rappresentata nella fig. 1.

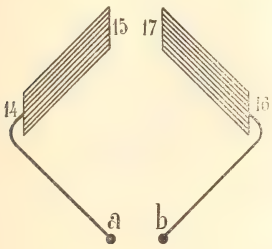


Fig. 1.

Fig. 2.

Ciascun aereo è costituito, come mostra la fig. 2, da un certo numero di conduttori paralleli e giacenti in un piano.

I due aerei così formati sono inclinati fra di loro e rispetto alla terra: l'angolo che i due aerei formano fra loro è preferibilmente in relazione colla differenza di fase fra le oscillazioni elettriche da cui sono percorsi gli aerei.

La forma degli aerei, la posizione relativa e la situazione rispetto alla superficie della terra, sono condizioni di capitale importanza per lo studio della questione che mi sono proposto. Esperimenti eseguiti fino dal 1899 mi avevano convinto della importanza delle accennate condizioni: essa risulta chiara quando si consideri che il campo elettromagnetico prodotto da una sola antenna verticale è simmetrico rispetto ad esso. Per contrario il campo elettromagnetico generato da una o da più antenne diversamente diposte rispetto alla superficie terrestre, risulta dissimmetrico rispetto alla stazione trasmettente. Così fra le diverse disposizioni che ho ideato ricorderò i risultati ottenuti nel novembre 1903 colla forma di aerei indicata nella fig. 1.

L'apparato trasmettitore era situato a Monte Mario (Roma) l'apparato ricevitore ad Anzio (km. 55).

Quando gli aerei trasmettitori presentavano il piano della figura rivolto verso Anzio, la ricezione era forte e chiara.

Quando gli aerei presentavano il loro fianco alla stazione di Anzio, cioè erano rivolti verso la Sardegna, la ricezione ad Anzio cessava completamente.

L'egregio comandante della stazione radiotelegrafica di Monte Mario, cav. Vittorio Pullino, mi informava che anche alimentando gli apparati trasmettitori con energia doppia di quella prima impiegata, la ricezione era ancora negativa ad Anzio.

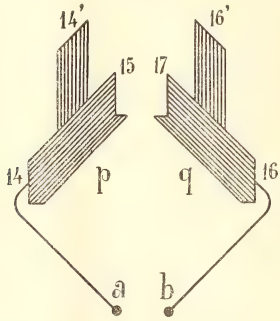


Fig. 3.

La radiazione elettromagnetica lanciata dagli aerei trasmettitori si estendeva però da due parti essenzialmente, cioè tanto dalla parte rivolta verso la stazione ricevente, quanto dalla parte opposta.

Per ovviare a tale fatto ho lungamente ripetuto l'esperimento seguente:

Ho aggiunto agli aerei descritti, gli aerei ausiliarî 14′ e 16′ e li ho distesi quasi orizzontalmente nella direzione della stazione ricevente come mostra la fig. 3 (1).

Constatai questo fatto che ho lungamente ripetuto nelle prove eseguite tra la stazione di Monte Mario e le riceventi di Maddalena (frontale) e di Ponza (laterale): quando gli aerei supplementari erano tirati verso la stazione ricevente di Maddalena, la ricezione avveniva.

Facendo ruotare di un certo numero di gradi nella direzione opposta gli aerei supplementari, la ricezione all'isola della Maddalena cessava completamente.

(1) Attestato di privativa degli Stati Uniti, Germania, ecc., maggio 1904.

I circuiti che mi servirono per la produzione delle due oscillazioni differenti di fase sono i seguenti:

Il primo, fig. 4, comprende un circuito di oscillazione principale 1, 2, 1, 8, M, N, da cui si diramano due circuiti derivati, l'uno contenente in prevalenza resistenza ohmica e selfinduzione, l'altro contenente capacità.

I due trasformatori 43 e 44 servono per inviare alle antenne le due oscillazioni differenti di fase.

Un altro circuito oscillatore che mi si dimostrò molto adatto nella pratica, è quello indicato nella fig. 5.

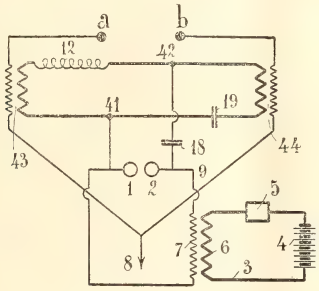


Fig. 4.

In un circuito di oscillazione principale 1 — 2 — 20 — 21 — 22 — 23 sono inserite convenienti capacità ed i due avvolgimenti primarî dei trasformatori di oscillazione.

In un secondo circuito indotto dal primo, 25, 26, 27, 28 viene generata la seconda oscillazione, e gli elementi elettrici sono in esso così modificati, da poter ottenere la voluta differenza di fase colla oscillazione generata nel circuito induttore.

Questi due circuiti, come l'esperimento ha provato, possono essere messi in risonanza fra di loro, dopo pochi tentativi, e sono quindi praticamente capaci di fare in modo che l'apparato trasmettitore possieda un periodo di oscillazione e quindi una lunghezza d'onda ben definita. Risulta poi dai principî fondamentali dell'elettrotecnica che quando i due circuiti, induttore ed indotto, sono in risonanza, i due circuiti risultano percorsi da oscillazioni prossimamente uguali e presentanti una differenza di fase assai prossima ad un quarto di periodo.

Apparato ricevitore (¹). — Gli aerei ricevitori sono della stessa forma descritta per l'apparato trasmettente, e fra le varie disposizioni ideate per il circuito del ricevitore, ricorderò la seguente, disegnata nella fig. 6.

Le estremità inferiori degli aerei *a* e *b* sono riunite a due avvolgimenti 43 e 44, così disposti rispetto ad un terzo circuito indotto 40, da produrre sopra di esso flussi magnetici uguali e contrarî quando i due aerei sono sede di correnti di uguale ampiezza e di uguale fase.

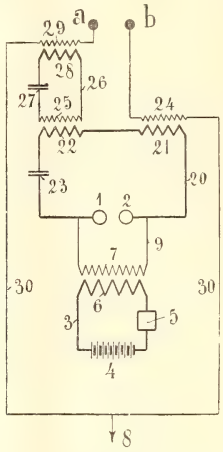


Fig. 5.

Le estremità 118 e 119 del circuito indotto, sono a loro volta riunite all'apparato ricevitore di onde elettromagnetiche, e nella figura sono schematicamente indicati con 63 il coherer, con 64 il relais e 65 la macchina Morse.

Sperimentando coll'apparato descritto, ho constatato diversi importanti fatti fra cui espongo i seguenti.

Anzitutto i nocivi effetti prodotti sopra gli apparati dalla elettricità atmosferica, che spesso sono causa di sospensione del servizio, sono colla descritta disposizione completamente annullati.

Infatti le cariche elettriche che sui due aerei sono indotte dalla elettricità atmosferica sono identiche, essendo identici o potendo essere resi identici gli elementi elettrici del sistema.

(¹) Attestato di privativa 14 aprile 1905.

I due flussi magnetici hanno quindi sul circuito indotto effetti eguali e contrarî e perciò il ricevitore non le avverte.

Concorrono poi ad ottenere il completo risultato, la posizione relativa degli aerei fra loro, come mostra la fig. 6, le cui estremità superiori sono

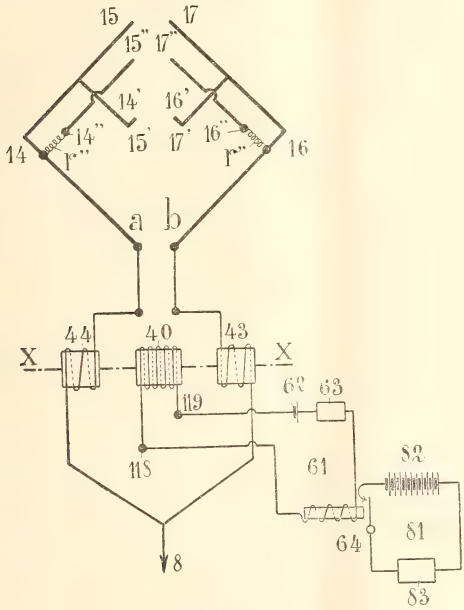


Fig. 6.

vicinissime è la proprietà da me preveduta e constatata, cioè che la ricezione per questi miei apparati si effettua egualmente bene, quando si sopprima la comunicazione colla terra.

Un altro vantaggio notevolissimo fra gli altri che ho potuto constatare colla disposizione della fig. 6, si è che per l'apparato ricevitore esiste un piano per cui la ricezione è massima: la ricezione cessa completamente quando si sposta l'apparecchio di un numero di gradi che può essere a piacimento ridotto ad un minimo di pochissimi gradi.

Le posizioni rispettive del trasmettitore e del ricevitore, ho constatato, fra le altre ragioni, dipendere dalle condizioni in cui si opera alla trasmissione e dalla natura ed estensione dello spazio interposto fra gli apparati.

È ovvio che questa proprietà permette di ricevere le segnalazioni contemporaneamente ed indipendentemente da un grande numero di stazioni trasmettitrici collocate in posizioni diverse rispetto alla ricevitrice.

Le disposizioni descritte in questa Nota risolvono quindi le più grandi difficoltà che finora si opponevano allo sviluppo pratico della radiotelegrafia, ed assicurano il funzionamento regolare ed indipendente di molte stazioni radiotelegrafiche anche vicine. Questi progressi furono da me constatati nelle esperienze eseguite presso la R. Marina italiana e S. E. il Ministro della Marina, ammiraglio Mirabello per dimostrare l'alto suo compiacimento, ne dava nello scorso anno pubblica comunicazione alla Camera dei Deputati nella seduta del 16 giugno 1905 [1].

In altra Nota riferirò ulteriori ricerche, e compio intanto al gradito dovere di porgere espressioni di viva riconoscenza al prof. Guido Grassi per i suoi benevoli consigli.

Fisica. — *Dispositivo per lo studio dell' Isteresi magnetica sotto l'azione di campi magnetici oscillanti.* Nota di F. Piola, presentata dal Corrispondente A. Sella.

Fisica. — *Sul modo di comportarsi del selenio rispetto alle correnti alternanti.* Nota di A. Pochettino e G. C. Trabacchi, presentata dal Corrispondente A. Sella.

Fisica. — *Sull' effetto fotoelettrico nell' Antracene.* Nota di A. Pochettino, presentata dal Corrispondente A. Sella.

Fisica. — *Ricerche sperimentali sulla resistenza dei solenoidi alle correnti d'alta frequenza.* Nota del Corrispondente A. Battelli.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] Atti Parlamentari CXXI.

Chimica. — *Sulla formazione e scomposizione del nucleo indolico per mezzo dell'azione catalitica del nickel* [1]. Nota di O. Carrasco e M. Padoa, presentata dal Socio G. Ciamician.

L'idrogenazione del pirrolo in presenza del nickel suddiviso conduce, come ebbe a rilevare uno di noi [2], oltre che alla formazione della pirrolidina, ad un prodotto basico, della formula $C_8 H_{15} N$ che corrisponderebbe per la composizione sua ad un indolo completamente idrogenato. Per questa ragione e per assodare la costituzione di questa base, fummo condotti a tentare la idrogenazione diretta dell'indolo in presenza del nickel. Senonchè i risultati ottenuti, che ora qui esporremo, furono diversi da quelli attesi; ma non per questo ci sembrano privi d'interesse.

L'indolo è notoriamente una sostanza di difficile preparazione benchè esso si formi in numerose reazioni. Fra i tanti metodi che furono proposti per ottenerlo, quello che ancora era più conveniente consisteva nella trasformazione del metilchetolo in acido α-indolcarbonico per fusione con potassa; quest'ultimo acido distillato con calce sodata dà l'indolo [3]. Preparammo in tal modo dopo molti stenti alcuni grammi di indolo.

Ciò posto procedemmo alla idrogenazione; dopo aver fuso l'indolo in due navicelle di porcellana, le disponemmo all'interno di un tubo di vetro che conteneva pure il nickel ridotto e pel quale passava una corrente di idrogeno. La temperatura veniva mantenuta intorno a 200°; in tali condizioni l'indolo volatilizzava lentamente e veniva portato sul nickel insieme all'idrogeno. All'uscita del tubo condensammo con un refrigerante i prodotti della riduzione; ottenemmo così un liquido basico che secondo le nostre previsioni doveva essere un indolo completamente o almeno parzialmente idrogenato (indolina) [4].

Da questo prodotto basico preparammo facilmente un picrato che fondeva, scomponendosi, a 212°-215° e che all'analisi diede i seguenti risultati:

Calcolato per $C_6 H_2 (NO_2)_3 OH\text{-}C_7 H_9 N$		Trovato
C %	46,40	46,53
H %	3,60	3,70
N %	16,70	16,87

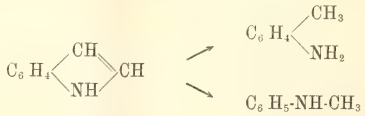
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) M. Padoa, Questi Rendiconti, 1° sem., 1906, pag. 219.

(3) Ciamician e Zatti, Ber. XXII, pag. 1976.

(4) Plancher e Ravenna, Questi Rendiconti, 1° sem., 1905, pag. 632.

L'analisi conduce dunque per la base ottenuta alla formula $C_7 H_9 N$; e però dimostra che il prodotto di idrogenazione dell'indolo contiene un atomo di carbonio in meno dell'indolo stesso. Questo ci fece pensare che fosse avvenuta l'apertura del nucleo azotato, con successivo distacco di un atomo di carbonio, eliminatosi sotto forma di metano; tale processo poteva avvenire in due modi



e cioè avrebbe potuto formarsi la o-toluidina o la metilanilina; il primo caso era senza dubbio il più probabile poichè notoriamente è più facile il distacco di un metile legato all'azoto di quello legato direttamente al carbonio; infatti il picrato di questa base, da noi preparato, fonde come quello del prodotto di idrogenaziene dell'indolo e mescolato con questo non ne abbassa il punto di fusione: ciò che dimostra l'identità delle due sostanze.

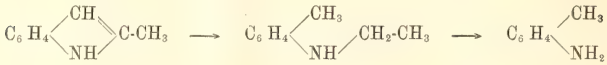
Inoltre la base ottenuta dall'indolo presenta tutte le proprietà caratteristiche della o-toluidina: con una soluzione acquosa di ipoclorito di calcio dà una colorazione bruna, assai differente da quella bleu data dall'anilina col medesimo reattivo; con acido cromico ed acido solforico dà una colorazione bleu che passa al rosso violetto, aggiungendo acqua.

Per ragioni che saranno chiarite in seguito, noi pensiamo che l'azione idrogenante del nickel sull'indolo si svolga in questo modo: che dapprima si rompa il doppio legame del nucleo azotato con formazione transitoria di monometil-o-toluidina

e che subito dopo questa sostanza, perdendo il metile legato all'azoto, passi alla o-toluidina da noi effettivamente riscontrata.

Questo modo di considerare la reazione è confermato dal fatto che, assoggettando il metilchetolo al medesimo trattamento a cui venne sottoposto l'indolo, si ottiene pure o-toluidina. Ciò venne dimostrato dall'identità del picrato della base proveniente dal metilchetolo col picrato della o-toluidina; ritenemmo superflua una nuova analisi.

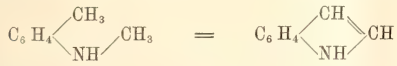
Secondo quanto abbiamo detto pel caso dell'indolo, il metilchetolo si trasformerà nel seguente modo:



Non possiamo addurre alcuna ragione per ritenere che all'apertura del nucleo indolico preceda la formazione di indolina, per addizione di due soli atomi di idrogeno, ma non possiamo però escluderlo in modo assoluto.

Ciò posto per rendere ragione delle altre esperienze che ora anderemo esponendo, dobbiamo richiamare una delle proprietà caratteristiche del nickel come catalizzatore: a temperature basse fino ai 200°-250° circa, esso agisce in presenza di idrogeno, in generale come idrogenante; a temperature più elevate tende al contrario ad eliminare idrogeno anche in presenza dell'idrogeno stesso, provocando reazioni inverse a quelle che avvengono a bassa temperatura; tipico in proposito è il caso del benzolo che si idrogena in presenza del nickel a 180°, passando a cicloesano; mentre il cicloesano fatto passare sul nickel a 270° circa perde idrogeno e ridà benzolo [1].

Questa circostanza ci ha fatto sperare di effettuare la reazione inversa a quella da noi precedentemente descritta e cioè di passare dalla monometil-o-toluidina all'indolo, eliminando dalla prima due molecole di idrogeno



Vogliamo qui ricordare che da alcune aniline sostituite si ottennero già piccole quantità d'indolo [2] facendole passare entro canne roventi e queste, come tutte le altre reazioni pirogeniche, vanno nel senso della eliminazione di idrogeno. Tuttavia, per quanto ci consta, la monometil-o-toluidina non venne sottoposta a tentativi di quel genere; mentre a noi, come è facile comprendere, interessava appunto di verificare una simile condensazione con questa sostanza.

A tale scopo adoperammo della monometil-o-toluidina proveniente dalla Badische Anilin- u. Soda-Fabrik.

Facciamo notare, innanzi tutto, che questa toluidina, come le indoline, ossidata col metodo di Tafel [3], in tubetto d'assaggio, tende già a condensarsi e dà nettamente la colorazione dell'indolo col fuscello di abete, sebbene il rendimento in questa reazione sia estremamente piccolo. Per condensarla a mezzo del nickel suddiviso operammo nel seguente modo.

Il liquido si faceva gocciolare lentamente entro una canna di vetro contenente il nickel ridotto riscaldato da 300° a 330° circa. I prodotti condensati all'uscita del tubo presentavano immediatamente una intensa colorazione col fuscello d'abete e l'odore indolico caratteristico, indizio certo che la formazione dell'indolo aveva luogo; il liquido ottenuto era limpido e pressochè incoloro e quasi esente di nitrili: dopo aver neutralizzata la parte basica

(1) Sabatier e Senderens, *Nouvelles méthodes générales d'hydrogénation* ecc. pag. 45.
(2) A. Bayer u. H. Caro, Ber., vol. X, pagg. 692 e 1262.
(3) Kann u. Tafel, Ber., vol. XXVII, pag. 826.

con lieve eccesso di acido cloridrico, lo distillammo in corrente di vapore; il distillato fu estratto con etere e l'estratto etereo, seccato con potassa fusa, fu concentrato a bagno maria e poi nel vuoto.

Il residuo etereo ripreso con benzolo secco, fu trattato con lieve eccesso di acido picrico in sostanza: ottenemmo così il picrato rosso caratteristico che cristallizzammo più volte dal benzolo. Questo picrato può cristallizzarsi anche assai bene dall'alcool assoluto.

Per identificare il prodotto, non poteva servirci il punto di fusione che in questo caso non è netto; ne eseguimmo adunque senz'altro l'analisi dopo averlo tenuto in stufa a vuoto a 40° per alcune ore e poi nel vuoto pneumatico con acido solforico e ritagli di paraffina, e ciò per togliere le ultime traccie di benzolo che il picrato stesso trattiene ostinatamente.

L'analisi diede i numeri seguenti:

Calcolato per $C_6H_2(NO_2)_3OH.C_8H_7N$		Trovato
C %	48,53	48,77
H %	2,91	3,22

La composizione corrisponde dunque a quella dell'indolo; e che la sostanza da noi ottenuta sia realmente tale, venne posto fuor di dubbio da tutte le reazioni particolari che l'indolo fornisce.

Il rendimento di questa reazione, calcolato per indolo dal picrato puro, è del 6 % circa.

Il fatto che dalla metil-o-toluidina si formi indolo non esclude che si abbiano pure altri prodotti; e così poteva supporsi che, eliminandosi una sola molecola di idrogeno, potesse formarsi, almeno in piccole quantità, della indolina. Facemmo dunque una selezione sistematica dei prodotti basici, liberati dall'indolo, a mezzo dell'acido nitroso, ma non ottenemmo che piccolissime quantità di nitroso-derivato che scomposto con acido cloridrico e stagno fornì una base unica che fu identificata facilmente per monometil-o-toluidina rimasta inalterata. Quasi la totalità del prodotto basico, dopo l'azione dell'acido nitroso e successivo riscaldamento, si convertì in o-cresolo. Ciò significa che fra le sostanze basiche ottenute vi era gran quantità di o-toluidina e però che una parte notevole della monometil-o-toluidina impiegata venne dal nickel smetilata. Rimane così esclusa la formazione di indolina.

Si conclude adunque che la monometil-o-toluidina passando sul nickel ridotto, a 300 gradi viene in parte trasformata in indolo, in parte smetilata per dare o-toluidina ed in piccolissima quantità rimane inalterata.

Riassumendo noi vogliamo porre in rilievo principalmente i seguenti fatti:

1° Che il nucleo indolico, ridotto sul nickel a 200°, si apre per dare come prodotto finale o-toluidina; che inversamente la monometil-o-toluidina

a 300° in presenza del nickel si condensa per dare indolo; si realizza così con questa sostanza una reazione invertibile.

2° Che l'azione catalitica del nickel si manifesta, oltre che nel modo sopra detto, sulla monometil-o-toluidina e probabilmente su altri corpi metilati all'azoto, nel senso di provocare la smetilazione.

Su tale argomento ci proponiamo di fare ulteriori ricerche.

Chimica. — *Azione dello zolfo sulle soluzioni dei sali metallici* [1]. Nota preliminare di A. Manuelli, presentata dal Socio G. Ciamician.

Da qualche tempo sto studiando l'azione dello zolfo sui sali metallici in soluzione acquosa e le ricerche fatte finora dimostrano come esso agisca da riducente.

Ho condotto le mie esperienze in questo modo: la soluzione del sale metallico viene chiusa in tubo con dello zolfo, dopo di avere scacciato l'aria con anidride carbonica, e riscaldata in stufa fra 150° e 180°.

Sperimentai sul cloruro rameico in soluzione acida per acido cloridrico. Che nella soluzione così ottenuta sia contenuto accanto al sale rameico del sale rameoso si può vedere benissimo, poichè precipitando con potassa e sciogliendo l'idrato rameico con bicarbonato potassico, si ottiene in seno al liquido azzurro un precipitato rosso di ossido rameoso.

Osservai pure che il bicromato potassico in soluzione messo a reagire in tubo chiuso con zolfo si riduce a sesquiossido di cromo. In entrambi i casi nella soluzione si ha formazione abbondante di acido solforico.

Devo rendere noti questi fatti, quantunque le mie esperienze siano ancora qualitative ed incomplete, perchè recentemente K. Brückner, studiando l'azione dello zolfo sui solfati di diversi metalli [2] e sul cromato e bicromato potassico [3], ha osservato che lo zolfo agisce come riducente.

Il mio lavoro ha un indirizzo diverso da quello del sig. K. Brückner, poichè le condizioni di esperienza sono assai differenti; Brückner opera per fusione, mentre io opero in soluzione acquosa.

Mi riserbo di continuare l'argomento sperimentando su soluzioni di altri sali quali quelli di F_e, M_n, M_o, W e di vedere l'andamento della reazione. Inoltre ho intenzione di studiare l'azione del selenio sui detti sali metallici.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.
[2] Monatshefte für Chemie, *27*, 199, 1906.
[3] Monatshefte für Chemie, *27*, 49, 1906.

Chimica. — *Azione del cloruro di solforile sul pirazolo* [1]. Nota di G. Mazzara e A. Borgo, presentata dal Socio E. Paternò.

Facendo seguito alle nostre precedenti ricerche intorno all'azione del cloruro di solforile sui derivati eterociclici di natura imidica, abbiamo creduto opportuno di estendere detta azione al pirazol, il quale, potendosi considerare come pirrolo avente invece di un gruppo metinico un atomo di azoto, dovrebbe al pari di esso pirrolo dare origine ad un derivato clorurato di sostituzione.

Non abbiamo ancora abbandonato questo campo di ricerche, non tanto per aggiungere nuovi derivati al numero considerevole di quelli già esistenti, o per preparare con nuovi metodi quelli già noti, ma principalmente per illustrare in un modo più esauriente l'analogia di comportamento di questi derivati eterociclici imidati di fronte al predetto cloruro di solforile, ed anche per dimostrare una volta di più la bontà di tale metodo di clorurazione, col quale abbiamo ottenuto dei risultati quasi quantitativi, pel fatto che operando in soluzione di etere perfettamente secco si evita la dissociazione dell'acido cloridrico che si forma nel processo di clorurazione, togliendo così la causa principale della resinificazione della maggior parte del prodotto.

Le esperienze che sono oggetto di questa Comunicazione, vengono a confermare le nostre previsioni, avendoci condotti alla preparazione di un cloropirazolo mediante il cloruro di solforile.

Fra i diversi cloropirazoli previsti dalla teoria non si conosce che il 4-cloropirazolo

ottenuto da Knorr [2] sia facendo agire direttamente l'acqua di cloro, o clorurando col gas cloro l'acido pirazol-3-5-dicarbonico, e decomponendolo in seguito alla temperatura di 285-286°.

Il cloropirazol, che noi possiamo descrivere, per le sue proprietà fisiche ed anche per la sua genesi, sembra identico a quello preparato da Knorr, per quanto il punto di fusione da noi trovato in 77°, sia superiore di circa

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio dell'Istituto di Chimica di Parma.

[2] Knorr, Berichte, 28. 715.

sei gradi di quello dato da Knorr. Il fatto però che quest'ultimo sperimentatore si è riservato di dare in avvenire i risultati analitici e la descrizione più dettagliata delle proprietà del prodotto in discorso, ci induce a ritenere che tale differenza debba attribuirsi ad impurezze del prodotto preparato da lui.

Parte sperimentale.

Preparazione del pirazol. — Coloro che in passato hanno dovuto preparare quantità rilevanti di pirazolo, conoscono di certo le difficoltà del metodo più generalmente seguito, cioè a dire quello di Buchner [1], il quale si fonda sulla decomposizione dell'etere etilico dell'acido pirazolbicarbonico per azione del calore.

Di questo metodo si può senz'altro constatare la soverchia lunghezza, dovuta alla necessità di preparare gli eteri etilici degli acidi diazoacetico e acetilendicarbonico. Non parliamo poi delle non poche difficoltà che si oppongono alla completa purificazione di quest'ultimo, che si forma contemporaneamente a piccola quantità di acido fumarico. Noi quindi richiamiamo l'attenzione dei ricercatori sopra il metodo di Pechmann [2], fondato sull'azione dell'acetilene sopra il diazometano, in soluzione eterea. L'autore, preoccupandosi principalmente del comportamento del diazometano, non ha messo in sufficiente rilievo l'importanza pratica di questo metodo di preparazione sintetica del pirazolo.

Noi l'abbiamo seguito dopo di avere provate le difficoltà di cui è irto il metodo di Buchner.

Seguendo i consigli di Pechmann, abbiamo fatto agire l'acetilene sotto una pressione maggiore, ricorrendo, all'uopo, a un lungo tubo che abbiamo adattato all'apparecchio di Kipp, ove si trovava il carburo di calcio.

Con tale modificazione il gas che si sviluppava agiva sulla soluzione eterea di diazometano sotto la pressione di una colonna d'acqua alta oltre un metro. Non abbiamo poi creduto opportuno, nonostante l'impiego di una maggiore pressione, di abbreviare la durata dell'operazione.

In questo modo, partendo da cc. 64 di nitrosometiluretano, che vennero trattati a porzioni di 8 cc. per volta, si ebbero gr. 15 di pirazolo puro.

Una delle ragioni di tale notevole rendimento consiste nel fatto di avere noi distillato il prodotto della reazione, sottoponendo poi nuovamente all'opera prolungata dell'acetilene il distillato, contenente in soluzione l'eccesso di diazometano. Malgrado questo nuovo trattamento non siamo riusciti a fissare in-

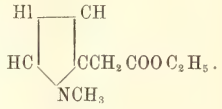
(1) Berichte 22. 842; Curtius, Journal für praktische Chemie, 37. 157, 38. 401; Bayer, Berichte, 18. 677, 2169;

(2) Berichte, 31. 2950.

teramente il diazometano; però il rendimento da noi ottenuto in questo modo fu di circa l'85 %, in luogo del 50 trovato da Pechmann.

Il processo sintetico di Pechmann oltre ai vantaggi pratici che abbiamo già posti in evidenza, vale a chiarire il comportamento del diazometano di fronte al pirazolo. Per il fatto stesso che quest'ultimo si forma in presenza di un eccesso di diazometano, risulta evidente l'impossibilità di sostituire tanto l'idrogeno imidico, quanto quello metinico con radicale metilico, per opera dello stesso diazometano.

Questa indifferenza, per quanto fosse prevedibile nel primo caso della eterificazione del pirazolo, non lo era invece nel secondo, cioè in quello della sostituzione dell'idrogeno metinico; dappoichè l'etere dell'acido diazoacetico, che si comporta come il diazometano, agisce, sebbene a 120°, sul pirrol e sull' N- metilpirrol dando luogo all'etere etilico dell'acido N- metilpirrilacetico [1].



Analogamente per l'azione del diazometano sul pirazolo si avrebbe dovuto ottenere un metilpirazol $CH_3 C_3 H_2 NNH$.

Noi abbiamo sperimentato l'azione del diazometano sul pirrolo, a pressione normale e alle temperature di 0° e di 60°, ottenendo in entrambi i casi risultati negativi.

Ora se tanto col pirazolo quanto col pirrolo si osserva l'impossibilità di ottenere prodotti di eterificazione operando però alla pressione e temperatura ordinaria, noi possiamo ritenere che ciò sia un carattere differenziale fra le predette sostanze di natura fenolica aromatica ed i fenoli propriamente detti, i quali, come è noto, sono eterificati da diazometano; tale diversità di comportamento è probabilmente dovuta alla natura basica dei predetti composti imidici.

Azione di una molecola di cloruro di solforile sul pirazol.

Sopra gr. 10 di pirazol, sciolti in gr. 100 di etere solforico, perfettamente assoluto, si fecero sgocciolare lentamente, mediante imbuto a chiavetta, gr. 24 di cloruro di solforile distillato di recente. La soluzione eterea di pirazol durante la clorurazione venne mantenuta a 0 gradi.

Mano a mano che il cloruro di solforile cadeva nel liquido si notava che questo diveniva lattiginoso, precipitando al fondo del pallone in una

[1] Piccinini, R. Acc. Linc. [5], 8, I, 314.

massa amorfa giallastra, mentre lentamente andavano formandosi sulle pareti dei cristalli aghiformi, incolori.

Terminata la clorurazione, il prodotto venne abbandonato a sè stesso per qualche tempo, poscia sottoposto alla distillazione a bagno-maria.

Già durante la distillazione notammo che lo sviluppo di acido cloridrico non era quale si doveva prevedere, mentre era abbondante quello dell'anidride solforosa. Questo fatto, e più ancora l'insolubilità del prodotto in etere, ci indussero fin da principio a ritenere che si fosse formato il cloridrato di cloropirazol, e che cioè la clorurazione avesse seguìto un corso analogo a quello osservato da Buchner e Fritsch [1] quando fecero agire l'acqua di bromo sopra una soluzione di pirazol, ottenendo il bromidrato di bromopirazol, invece della base bromurata libera.

Infatti il residuo della distillazione perdeva quantità rilevanti di acido cloridrico, rese visibili dall'umidità dell'aria. L'abbiamo poi addizionato con acqua, e mentre abbiamo osservata la progressiva scomparizione del residuo solido, abbiamo visto d'altra parte formarsi al fondo del pallone una massa oleosa, che dopo qualche tempo divenne solida. Il tutto, messo in un imbuto a rubinetto, venne per ben due volte estratto con etere.

La soluzione eterea distillata a bagno-maria lasciò un residuo solido, che dopo esser stato spremuto tra carta assorbente per separarlo da un po' di sostanza oleosa che l'accompagna, fu purificato cristallizzandolo un paio di volte dall'etere di petrolio bollente. Si ottennero così dei magnifici cristalli incolori in forma di pagliette, il cui punto di fusione, invece di essere 69°-71°, come trovò Knorr, è di 77°.

Per identificare perfettamente il prodotto ottenuto avremmo voluto determinare il suo punto di ebullizione, ma la scarsezza del prodotto avrebbe tolto ogni attendibilità a tale determinazione.

Del resto è evidente che nel caso attuale l'acqua di cloro ed il cloruro di solforile rappresentano due metodi analoghi di clorurazione, e quindi abbiamo diritto di supporre che diano luogo agli stessi derivati.

Ad ogni modo un'altra considerazione sufficientemente fondata ci fa ritenere che la bassezza del punto di fusione trovato da Knorr sia dovuto ad impurità.

È noto che l'entrata di un atomo di cloro al posto dell'idrogeno metinico, nel metilchetolo, nello scatolo e nell'indolo, innalza il punto di fusione del composto; e questo innalzamento è di 17 gradi per lo scatolo, e di oltre 40 gradi per l'indolo e per il metilchetolo: sarebbe quindi per lo meno strano che nel caso di un composto appartenente alla stessa serie, si trovasse un punto di fusione del cloroderivato coincidente con quello della base da cui deriva. Del resto, un esempio ancora più convincente di ciò ci viene offerto

[1] Annalen, 272-273.

da un derivato dello stesso pirazolo; infatti, mentre il fenilpirazolo fonde a 11°,5, il suo derivato clorurato fonde a 75°.

Il cloropirazolo ha odore caratteristico aromatico.

Dalle quantità sopra indicate di pirazolo abbiamo ottenuti circa 8 grammi di cloropirazol puro.

All'analisi ha dato i seguenti risultati:

gr. 0,4498 di cloropirazolo diedero gr. 0,6295 di cloruro d'argento, che in rapporti centesimali dà:

Cloro = 34,62.

La teoria per un composto della formola C_3H_2ClNNH richiede su cento parti:

Cloro = 34,63.

Il chiarissimo prof. C. Viola, che gentilmente si è offerto di misurare i cristalli di cloropirazolo, ci ha comunicato quanto segue:

« Le costanti cristallografice del 4-cloropirazolo sono le seguenti:

« Sistema cristallino trimetrico, simmetria trimetrico sfenoidale.

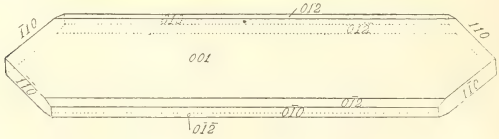
$a : b : c$ 0,8026 : 1 : 0,8284.

« Sfaldatura perfetta || (010).
« Sfaldatura meno perfetta || (100).
« Sfaldatura distinta || (001).
« Piano degli assi ottici || (100);

« Direzioni principali ottiche:
« α || [100]
« β || [010]
« γ || [001]

« Angolo degli assi ottici acuto nell'aria $2E = +100°$, $\varrho = v$.

« I cristalli del cloropirazolo ottenuti dall'etere di petrolio sono bianchi « trasparenti di lucentezza adamantina a madraperlacea, di forma allungata « a forma di lancia. Ho assunto la zona [010] in questa direzione di allun- « gamento, e la faccia dominante (001).



« Le faccie sviluppate nella zona [100] sono {001}, {010} e {012}.

« Le faccie {010} non danno riflessi distinti. Si hanno riflessi deboli ma « distinti dalle faccie {012}.

« L'angolo (012) : (001) varia da 22° a 23°. Ho dedotto da sei misure « l'angolo

$$(012) : (001) = 22°30'.$$

« Oltre questi riflessi ve ne sono altri nella stessa zona, i quali col « riflesso prodotto dalla faccia (001) danno un angolo che sta intorno a 60°.

« Ciò significa che per l'armonia della zona converrà ritenere le faccie « dei primi riflessi come quelli appartenenti al prisma {012} e quelli dei « secondi appartenenti al prisma {021}, il quale apparisce di rado e « incompleto. Infatti si ha (001) : (021) = 58°,53'

« Con ciò l'angolo fondamentale calcolato è:

$$(011) : (0\bar{1}1) = 79°,16'\tfrac{1}{2}.$$

« Solamente i piccoli cristalli microscopici hanno terminazione }110{.

« I cristalli grandicelli hanno terminazione lanceolata e non servono per « le misure della zona [001].

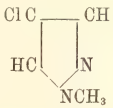
» All'incontro l'angolo fondamentale (110) : (1$\bar{1}$0) dei cristalli microsco- « pici risulta molto bene colle misure microscopiche. Infatti essendo i cri- « stallini appoggiati colla faccia (001) sul portaoggetti, ne risulta che l'an- « golo (100) : (110) varia da 39° a 38°, 30'. Io dedussi l'angolo da otto misure:

$$(110) : (1\bar{1}0) = 38°, 45' \times 2 = 77^{e}. 30'.$$

« La sfaldatura è perfetta secondo (010); infatti i cristalli compressi fra « portaoggetti si sfaldano facilmente secondo questa direzione. La sfaldatura « (100) è visibile nettamente al microscopio. I cristalli si sfaldano pure secondo (001).

« Non è stato possibile determinare tutti e tre gli indici principali di « rifrazione. L'indice medio risulta da questo, che i cristalli immersi nell'olio « di cassia perdono i loro rilievi. Ritengo quindi che l'indice β sia vicino a « quello dell'olio di cassia = 1,65. Le faccie (001) sono colme di figure di « corrosione naturali con contorni paralleli allo spigolo [100] e allo spigolo « (110) . (001). Questa asimmetria delte figure di corrosione sulla faccia (001) « può provare che la simmetria del cloropirazolo è trimetrica-sfenoidale ».

1- Metil- 4 - cloropirazol.



Per la preparazione di questa base abbiamo creduto conveniente di seguire il processo impiegato nell'eterificazione dei derivati del pirrolo, del metilchetolo, ecc, ecc., processo che del resto è generalmente seguito.

A tale scopo gr. 4 di cloropirazolo, sciolti in alcool metilico, vennero trattati con gr. 2,5 di potassa anch'essi sciolti in alcool metilico, e con un leggiero eccesso di ioduro di metile. Il tutto fu scaldato per qualche tempo a bagno-maria, ed osservammo come indizio sicuro di avvenuta reazione la separazione di molti cristalli di ioduro potassico.

Il prodotto della reazione venne abbandonato a sè stesso per oltre 12 ore, indi liberato per distillazione a bagno-maria della maggior parte dell'alcool. Il residuo fu diluito con acqua, ed estratto parecchie volte con etere. Distillando l'estratto etereo si ottenne come residuo, un liquido oleoso giallo, che venne purificato per distillazione.

Esso distillò quasi completamente alla temperatura di 167° e alla pressione di 756^{mm} sotto forma di un liquido giallo, che per prolungata azione della luce diventò rossastro.

Ha odore penetrante ed irritante, raffreddato a circa 10° sotto zero si mantenne liquido.

È degno di nota il fatto che l'ingresso di un radicale metilico in luogo dell'idrogeno imidico ha prodotto nel 4-cloropirazol un abbassamento del punto di ebullizione di circa 60 gradi, abbassamento che corrisponde con grande approssimazione a quello dovuto all'ingresso di un uguale radicale nella molecola del pirazol.

Il seguente specchietto illustra con maggiore evidenza tale relazione.

Pirazol P. e. 186°-188°	N-metilpirazol P. e. 126°-127°
4-Cloropirazol P. e. 220° (corr)	N-metil-4-cloropirazol P. e. 167° (756)^{mm}

All'analisi ha dato i seguenti risultati:

gr. 0,3936 di sostanza diedero gr. 0,4894 di AgCl che equivalgono su 100 parti a

$$\text{Cloro} = 30,75.$$

La teoria per la formola $C_3H_2ClNNCH_3$ richiede su 100 parti:

$$\text{Cloro} = 30,47.$$

Ci ripromettiamo prossimamente di riferire sopra i derivati di questa nuova base.

Chimica. — *Contributo allo studio dell'isomorfismo fra il tellurio ed il selenio* [1]. Nota di GIOVANNI PELLINI, presentata dal Corrispondente R. NASINI.

Le ricerche che vengono riportate in questa Nota si riferiscono ai tellurati e seleniati. La possibile constatazione di una relazione di isomorfismo fra essi avrebbe un valore decisivo per la questione trattata, in quanto che l'isomorfia verrebbe stabilita sulla forma limite e tipica del gruppo sesto del sistema periodico.

Gli studi finora eseguiti sui tellurati e seleniati non hanno condotto ad alcun risultato positivo [2]. Ma nel riprendere in esame i lavori compiuti dagli altri sperimentatori, la mia attenzione è stata attratta specialmente sulle ricerche dei signori Norris e Kingman [3] riferentisi al tellurato e seleniato acido di rubidio.

Un ostacolo alla formazione di miscele isomorfe fra seleniati e tellurati dipende dal contenuto diverso in acqua di cristallizzazione. I tellurati, tanto acidi che neutri, cristallizzano tutti con acqua: nulla di preciso si può dire dei tellurati di ammonio e litio che non si sono ottenuti finora cristallini e non sono stati sufficientemente studiati. I seleniati cristallizzano invece in forma anidra, eccettuato quello di sodio che si presenta anche con dieci molecole di acqua come il solfato, senza che però vi corrisponda lo stesso idrato per il tellurato sodico [4]. Il seleniato di litio cristallizza con una molecola di acqua.

Le recenti ricerche sembrano poi escludere la possibilità di ottenere tellurati anidri [5]. Il tellurato anidro di potassio descritto da Handl e Van Lang [6] come completamente isomorfo col solfato e seleniato potassico, non è stato più ripreparato [7]. Pur tuttavia non è escluso il caso che studiando completamente le curve di solubilità dei cristalli depositantisi dalle soluzioni miste di seleniati e tellurati a diverse temperature, si abbiano a raggiungere quelle condizioni di esistenza che permettono la deposizione di cristalli di miscela.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Padova.

(2) Vedi la mia prima Nota sullo stesso argomento, a pag. 629.

(3) American chemical Journal. Vol. *26*, pag. 318.

(4) Gutbier, Zeit. für anorg. Chemie, *31*, 340; Funk, Ber. chem. Gesell., *33*, 3696; Mylius, Ber. chem. Gesell., *34*, 2208.

(5) Gutbier e Funk, loc. cit.

(6) Wiener Akad. Ber. 43 e 45.

(7) Rammelsberg, Kristallogr. Chem., 1, 605, 1881; Retgers, Zeit. für phys. Chemie *8*, pag. 70.

Anche la limitata solubilità in acqua dei tellurati in confronto dei seleniati che sono solubilissimi, se non può in senso assoluto essere un ostacolo alla formazione di cristalli misti, rende certamente più difficili le condizioni della loro formazione.

Perciò il tellurato acido di rubidio che cristallizza con sola mezza molecola di acqua e la perde facilmente, ed inoltre presenta su altri tellurati una discreta solubilità, è apparso come il sale più adatto ad uno studio di isomorfismo col corrispondente seleniato. Le stesse ragioni valgono anche per i corrispondenti sali di cesio [1].

Tellurato acido di rubidio e seleniato acido di rubidio.

Questi due sali vennero preparati e studiati per la prima volta da Norris e Kingman.

$$RbHTeO_4 + {}^1/_2 H_2O.$$

Il tellurato acido di rubidio si ottiene quando si mescolano le soluzioni acquose concentrate di due molecole di acido tellurico per una di carbonato di rubidio. A freddo non avviene quasi nessuna reazione, mentre che a bagno maria si ha abbondante sviluppo di anidride carbonica. Per evaporazione a caldo si deposita una polvere amorfa, per evaporazione lenta alla ordinaria temperatura si ottengono delle croste cristalline. La preparazione di questo sale in apparenza semplicissima, presenta invece non lievi difficoltà, ed è ben difficile ottenere un prodotto unico.

Il tellurato acido di rubidio cristallizza con mezza molecola di acqua ($RbHTeO_4 + {}^1/_2 H_2O$) che perde alla temperatura di 120° secondo Norris e Kingman. Le mie esperienze invece dimostrano come a 120° la diminuzione di peso corrisponde a più di mezza molecola di acqua ed avviene anche una decomposizione della molecola anidra. La mezza molecola di acqua viene eliminata, quando si faccia passare una corrente di aria asciutta alla temperatura ambiente sul sale idrato asciutto all'aria.

1° gr. 0,5135 di $RbHTeO_4 + {}^1/_2 H_2O$ perdettero di peso a 120° gr. 0,0425 e fornirono gr. 0,234 di tellurio.

(Calcolato per ${}^1/_2 H_2O$ = gr. 0,015)
(» » Te = gr. 0,2282)

gr. 0,471 di sale secco a 120° diedero gr. 0,234 di tellurio.
(Calcolato per $RbHTeO_4$ = Te gr. 0,2161 — per $Rb_2Te_2O_7$ = Te gr. 0,2234)

2° gr. 0,597 di $RbHTeO_4 + {}^1/_2 H_2O$ perdettero di peso in corrente d'aria secca gr. 0,0192 e a 120° gr. 0,047 e fornirono gr. 0.2665 di Te.

(Calcolato per ${}^1/_2 H_2O$ = gr. 0,0187)
(» » Te = gr. 0,265)

[1] Norris e Kingman, loc. cit

3° gr. 0,4485 di $RbHTeO_4 + {}^1/_2 H_2O$ perdettero di peso in corrente d'aria secca gr. 0,0145 ed a 100° gr. 0,04 e fornirono gr. 0,189 di Te.

(Calcolato per $^1/_2 H_2O$ = gr. 0,014)
(" " Te = gr. 0,1931)

Il sale si scioglie lentamente in acqua fredda e la sua solubilità è di circa il 4 % a temperatura ordinaria: è un po' più solubile a caldo.

$RbHSeO_4$

Il seleniato acido di rubidio si ottiene facilmente per azione dell'acido selenico sul carbonato di rubidio.

Dalla soluzione acquosa si ha in cristalli grossi ma che si prestano malissimo a misure cristallografiche. I cristalli sono leggermente deliquescenti. 100 p. di acqua sciolgono 140 gr. di sale a 17,5°. Scaldati a 120° si mantengono lucenti e non perdono di peso.

Norris e Mommers mescolarono le soluzioni dei due sali in proporzioni equimolecolari e lasciarono cristallizzare spontaneamente. La prima crosta di cristalli formatasi era costituita quasi interamente da tellurato acido di rubibio e conteneva pochissimo selenio: la seconda crosta conteneva un po' più di selenio della prima. Conclusero senz'altro che non vi era isomorfismo fra i due sali.

Questa affermazione mi era parsa assai affrettata; due sole esperienze ad eguali condizioni di temperatura e con variazione di concentrazione assai piccola, non sono sufficienti a giustificare una conclusione così importante.

Si noti che calcolando in base ai dati delle loro analisi la percentuale di molecole di seleniato nei possibili cristalli misti, si ha:

gr. 0,3029 di miscela contengono gr. 0,0029 di Se
gr. 0,3327 " " gr. 0,0087 di Se

Da cui si calcola per i primi cristalli il 3,1 % di molecole di seleniato, e per i secondi cristalli il 9 %.

Queste quantità non mi sembrano trascurabili; aumenta il contenuto in selenio col concentrarsi della soluzione in seleniato e benchè i valori siano piccoli non sono però tali da essere trascurati. È noto infatti che diversi sali presentano fra loro relazioni di isomorfismo entro limiti assai ristretti. Guidato da queste considerazioni ho ripreso in esame i due composti ed espongo i risultati preliminari delle mie ricerche.

Le soluzioni acquose dei due sali quasi sature alla temperatura ordinaria vennero mescolate fra loro in diversi rapporti, poi evaporate a tempe-

ratura di circa 50-80° fino a che per raffreddamento avveniva deposizione di cristalli. Dopo qualche giorno i cristalli venivano raccolti, lavati con poca acqua, asciugati fra carta da filtro e poscia analizzati. Le soluzioni contenenti una forte percentuale di tellurato, depositarono una polvere di aspetto simile al composto tellurico: scaldati a 120° perdono di peso: l'analisi dimostra l'assoluta mancanza di selenio.

Le soluzioni contenenti invece percentuali di seleniato superiori all'equimolecolare depositarono tutte dei bellissimi cristalli; quelli studiati sono monoclini: scaldati per diverso tempo a 120° non perdono affatto di peso e all'analisi dimostrano di contenere molto selenio.

Vennero analizzati anche dei cristalli unici. Sono dunque dei cristalli misti appartenenti al tipo del seleniato.

Cristalli di miscela del tipo del tellurato, nelle condizioni finora studiate non vennero osservati.

I risultati delle analisi sono i seguenti:

N.	Peso dei cristalli misti ($RbHTeO_4 + RbHSeO_4$)					Molecole % di $RbHSeO_4$ nei cristalli misti
1	gr. 0,615	diedero	gr. 0,0895	di selenio		50.2
2	» 1,0615	»	» 0,144	»		43.98
3	» 1,0175	»	» 0,133	»		42.49
4	» 0,0755	»	» 0,0125	»		52.76
5	» 0,263	»	» 0,0375	»		46.03
6	» 0,4785	»	» 0,068	»		45.09

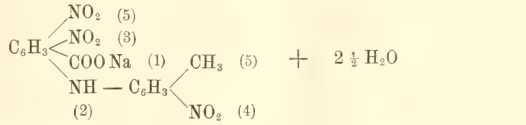
Si osserva dunque una variabilità di rapporti entro i limiti di 42-53 % mol. di seleniato.

I risultati sono indubbiamente degni di attenzione: pur tuttavia io non voglio finora affermare che l'isomorfismo fra seleniati e tellurati esiste; poichè la composizione dei cristalli misti è limitata e perchè cristalli misti del tipo del tellurato non furono finora ottenuti.

Attendo ora allo studio della formazione e della solubilità dei cristalli misti a diverse temperature e pubblicherò tra poco i risultati completi delle mie ricerche.

Cristallografia. — *Studio cristallografico di alcune nuove sostanze organiche* [1]. Nota del dott. FRANCESCO RANFALDI, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Sale sodico
dell'acido 2-ortonitroparatolilamino-3-5-dinitrobenzoico



Questa sostanza venne preparata da S. Cuttitta [2] neutralizzando esattamente il sovra indicato acido con carbonato sodico puro.

Il composto deflagra con violenza se riscaldato in un tubicino immerso in olio bollente.

Sistema cristallino: *triclino*

$$a : b : c = 1{,}52579 : 1 : 0{,}94494$$
$$\alpha = 76°{,}11' \; ; \; \beta = 81°{,}27' \; ; \; \gamma = 93°{,}29'$$

Forme osservate:

$$\}100\{ , \}001\{ , \}010\{ , \}101\{ , \}\bar{1}01\{ , \}0\bar{1}1\{ , \}\bar{1}\bar{1}1\{ .$$

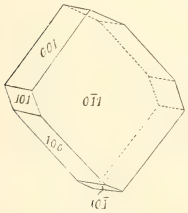


FIG. 1.

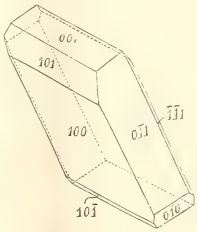


FIG. 2.

Combinazioni osservate:

1ª $\}100\{ , \}001\{ , \{101\} , \}\bar{1}01\{ , \}0\bar{1}1\{$ (v. fig. 1)

2ª $\{100\{ , \}001\{ , \}101\{ , \{\bar{1}01\} , \}0\bar{1}1\{ , \}010\{$ poco frequente

3ª $\}100\{ , \}001\{ , \}101\{ , \}\bar{1}01\{ , \}0\bar{1}1\{ , \}010\{ , \}\bar{1}\bar{1}1\{$ solo in alcuni cristalli (v. fig. 2).

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Messina.

[2] S. Cuttitta, *Sul 2.4.8 - trinitro - 7 metilacridone*, Rendiconti della Società Chimica di Roma, n. 14 (22 ottobre) 1905. pag. 146.

Angoli	N.	Misurati		Calcolati	Differenze esp. — calc.
		Limiti	Medie		
(100) : (001)	8	80°.25′ — 81°.37′	81°.27′	—	—
(100) : (0$\bar{1}$1)	8	79. 57 — 80. 34	80. 6	—	—
(100) : (0$\bar{1}$0)	2	86. 22 — 87. 7	86. 31	—	
(001) : (0$\bar{1}$1)	12	49. 16 — 49. 59	49. 30	—	—
(001) : ($\bar{1}\bar{1}$1)	2	55. 56 — 56. 35	56. 27	—	—
(001) : ($\bar{1}$01)	1	—	32. 50	33°.12′. 7″	— 22′. 7″
($\bar{1}$01) : ($\bar{1}\bar{1}$1)	2	46. 58 — 47. 6	46. 59	46. 46. 49	12. 11
($\bar{1}\bar{1}$1) : (0$\bar{1}$0)	1	—	57. 53	57. 52. 58	„ 2
($\bar{1}\bar{1}$1) : (0$\bar{1}$1)	3	28. 26 — 28. 37	28. 31	28. 31. 37	— „ 37
(0$\bar{1}$1) : (0$\bar{1}$0)	2	54. 29 — 54. 49	54. 33	54. 19. „	14. „
(0$\bar{1}$1) : ($\bar{1}$01)	5	59. 5 — 59. 49	59. 38	59. 53. 19	— 15. 19
(101) : (010)	1	—	80. 31	80. 37. 44	— 6. 44
(101) : (0$\bar{1}$1)	2	52. 38 — 52. 40	52. 39	52. 40. 15	— 1. 15
(101) : ($\bar{1}\bar{1}$1)	1	—	73. 14	73. 8. 16	5. 44
(101) : (001)	3	28. 18 — 28. 35	28. 26	28. 40. 16	— 14. 16

La dimensione dei cristalli misurabili varia da 1 a 2 mm. circa. Essi si potrebbero distinguere in due tipi, secondo che predomina la pinacoide }0$\bar{1}$1{ (v. fig. 1) o la }100{ (v. fig. 2) le quali con la }001{ costituiscono in ogni caso le forme prevalenti. Abbastanza sviluppata si mostra la }101{, di cui talvolta manca una faccia; le altre forme seguono l'ordine decrescente: }$\bar{1}$01{ , }010{ , }$\bar{1}\bar{1}$1{ e, salvo rare eccezioni, sono assai ristrette. — Tutte le facce al goniometro si mostrano molto splendenti, però quelle della zona [010], meno quelle della }100{ e della (00$\bar{1}$) che talvolta sono piane, si presentano alquanto incurvate nel senso della zona stessa; la (01$\bar{1}$) si mostra piana, incurvata ordinariamente la sua parallela; le }010{ e }$\bar{1}\bar{1}$1{ talora non riflettono immagini pel loro esiguo sviluppo.

Non fu osservata sfaldatura perfetta, pare ne esista una, poco distinta, secondo }$\bar{1}$01{.

I cristalli sono di colore giallo-cromo, con splendore vitreo e trasparenti.

Fra i cristalli avuti a mia disposizione, osservai dei geminati. Essi sono molto semplici: sono geminati di contatto, ed il contatto avviene secondo (100) che è pure piano di geminazione.

La fig. 3 rappresenta appunto uno di tali geminati: nella tabella seguente riporto alcuno degli angoli di geminazione più caratteristici.

Angoli	N.	Osservati	Calcolati	Differenze esp. — calc.
(001) : (00$\bar{1}$)	1	16°.55′	17°. 6′	— 11′
(0$\bar{1}$1) : (01$\bar{1}$)	1	19. 32	19. 48	— 16

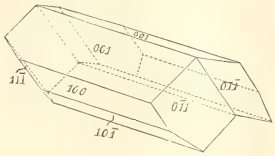
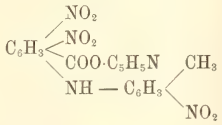


Fig. 3.

Sale di piridina
dell'acido 2-ortonitroparatolilamino-3.5-dinitrobenzoico.



I cristalli furono ottenuti da S. Cuttitta [1], facendo agire la piridina (in ragione di una molecola) su una soluzione alcoolica di acido 2-cloro-3.5-dinitrobenzoico e 2-nitro-4-toluidina, prese in quantità equimolecolari. — Punto di fusione 200°.

Sistema cristallino: *triclino*

$$a : b : c = 1{,}35414 : 1 : 1{,}09430$$
$$\alpha = 87°.16' \; ; \; \beta = 76°.36' \; ; \; \gamma = 92°.14'.6''$$

Forme osservate:

$$\}100\{ \, , \, \}001\{ \, , \, \}010\{ \, , \, \}\bar{1}01\{ \, , \, \}0\bar{1}1\{ \, , \, \}\bar{1}10\{ \, , \, \{\bar{1}\bar{1}1\{ .$$

[1] Loc. cit.

Combinazioni osservate:

1ª }100{ , }010{ , }001{ , }$\bar{1}$01{ , }$\bar{1}$10{ , }$\bar{1}\bar{1}$1{ (v. fig. 4)
2ª }100{ , }010{ , }001{ , }$\bar{1}$01{ , }$\bar{1}$10{ , }$\bar{1}\bar{1}$1{ , }0$\bar{1}$1{ rarissima (v. fig. 5).

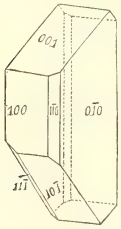


Fig. 4.

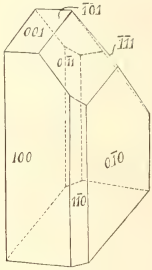


Fig. 5.

Angoli	Misurati	Calcolati	Differenze esp. — calc.
(001) : (100)	76°.36′	—	—
(001) : (0$\bar{1}$1)	48. 16	—	—
(001) : ($\bar{1}$01)	44. 2	—	—
($\bar{1}$01) : (0$\bar{1}$1)	63. 8	—	—
(0$\bar{1}$1) : (0$\bar{1}$0)	44. 28	—	—
(0$\bar{1}$0) : (1$\bar{1}$0)	36. 25	36°.21′. 3″	3′.57″
(0$\bar{1}$0) : ($\bar{1}\bar{1}$1)	48. 42	48. 50 »	— 8. »
($\bar{1}\bar{1}$1) : ($\bar{1}$00)	69. 8	69. 5. 47	2. 13
($\bar{1}\bar{1}$1) : ($\bar{1}$01)	45. 26	45. 11. »	15. »
($\bar{1}\bar{1}$1) : (001)	59. 18	59. 25. 37	— 7. 37
($\bar{1}\bar{1}$1) : (0$\bar{1}$1)	32. »	31. 57. 11	2. 49
($\bar{1}\bar{1}$1) : (1$\bar{1}$0)	72. 14	72. 20. 42	— 6. 42
(1$\bar{1}$0) : (0$\bar{1}$1)	48. »	47. 46. 53	13. 7
(1$\bar{1}$0) : (001)	84. 10	84. 15. 5	— 5. 5

I cristalli misurabili hanno una dimensione massima di qualche millimetro, ma se ne ottennero anche di molto più grandi.

Essi sono allungati nel senso dell'asse [001] e, salvo poche eccezioni, alquanto schiacciati secondo }010{, pinacoide sempre predominante, ora seguita, ora raggiunta per estensione dalla }100{, mentre la }$\bar{1}$10{, che talora è rappresentata da una sola faccia, si mostra sempre ad esse subordinata. — Le forme terminali talvolta presentano quasi eguale sviluppo, tal'altra la

}0$\bar{1}$1{ e la }$\bar{1}\bar{1}$1{ si mostrano subordinate alla }001{ e }$\bar{1}$01{, le quali ora hanno facce equidimensionali, ora l'una prevale sull'altra. Inoltre le facce della }100{ d'ordinario sono inegualmente estese, ed i cristalli si mostrano diversamente conformati alle due estremità dell'asse [001], poichè ad una di esse sono presenti tutte le facce delle forme terminali, con le combinazioni sovra indicate, e dall'altra si mostra solo la (00$\bar{1}$), e se in qualche individuo si scorge eccezionalmente qualche faccia di altra forma, questa è sempre appena visibile anche a forte ingrandimento.

Tutte le facce al goniometro si presentano molto brillanti, ma quelle della }001{ si mostrano foggiate a tremìa nei cristalli grandi, mentre nei piccoli vi si scorge appena una delicata striatura nel senso della zona [010]; tutte le altre facce sono incurvate in tutti i sensi e riflettono immagini multiple; per ciò il calcolo per la determinazione delle sovra indicate costanti, fu fondato sulle misure eseguite su di un cristallino scelto fra i migliori, dopo di essermi assicurato però che tutte le buone misure istituite sugli spigoli omologhi di altri individui, vanno abbastanza di accordo con quelle scelte per fondamentali.

Non havvi alcuna sfaldatura perfetta; ne esiste però una poco distinta secondo }001{ ed un'altra || a }$\bar{1}\bar{1}$1{.

I cristalli sono di colore rosso-aranciato, a splendore vitreo e trasparenti.

Dai valori sovra indicati assunti per α, β e γ nei cristalli dei due sali, si ha:

pel sale sodico: $\alpha = 76°,11'$; $\beta = 81°.27'$; $\gamma = 93°.29'$
pel sale di piridina: $\alpha = 87°.16'$; $\beta = 76°.36'$; $\gamma = 92°.14'.6''$.

Quindi, allo scopo di stabilire un'analogia più intima fra i cristalli delle due sostanze, si è indotti a prima vista ad orientare una delle proiezioni in modo che, restando fisso il valore assunto per γ, si venissero a scambiare fra loro i valori di α e β. — Orientando in tale senso i cristalli del sale di piridina la {001} conserverebbe il proprio simbolo, si permuterebbero fra loro i simboli delle {010} e {100} e tutte le altre forme cambierebbero conseguentemente di simbolo, pur restando la grandezza dei loro indici sempre limitata all'unità.

Ma in tal caso il rapporto parametrico di questi cristalli risulterebbe:

$$a : b : c = 0{,}73848 : 1 : 0{,}80812$$

e quindi si scosterebbe di più dal corrispondente rapporto trovato pel sale di sodio, che non adottando la prima orientazione, nel quale caso anche la disposizione degli spigoli, tenendo conto del loro valore angolare, presenta una più stretta analogia nel confronto dei cristalli delle due sostanze.

Pertanto ho creduto più conveniente tenere l'orientazione adottata.

Cloroplatinato di I-Lupanina.

$(C_{15}H_{24}N_2OHCl)_2\ Pt\ Cl_4$

Questa sostanza fu preparata dal prof. A. Soldaini e dal dott. T. Borraccia [1] insieme ad altri cloroplatinati, per azione del cloro gassoso sulla soluzione eterea di I-Lupanina (inattiva).

Il composto a 185° comincia ad imbrunirsi, a 197° circa fonde, verso 210° si decompone.

Sistema cristallino: *monoclino*

$$a : b : c = 2{,}6124 : 1 : 1{,}3428$$
$$\beta = 83^{\circ}.46'.33''$$

Forme osservate:

$$\}100\{\ ,\ \}001\{\ ,\ \}111\}\ ,\ \}\bar{1}11\{\ ,\ \}210\{$$

Combinazioni osservate:

1ª $\}100\{$, $\}111\{$, $\}\bar{1}11\{$, $\}001\{$ (v. fig. 6)
2ª $\}100\{$, $\}111\{$, $\}\bar{1}11\{$ — $\}210\{$
3ª $\}100\{$, $\}111\{$, $\}\bar{1}11\{$, $\}001\{$, $\}210\{$ (v. fig. 7).

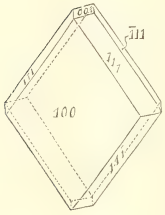


Fig. 6.

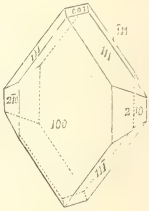


Fig 7.

[1] Il composto era stato ottenuto dal prof. Soldaini fin dal 1892 (vedi Acc. dei Lincei, VII, 12. — Gazzetta Chimica ital. Marzo 1892. — Archiv der Pharmacie, 230, Heft 1. Berlin 1893) però lo studio cristallografico non ne fu fatto, perchè non si poterono ottenere cristalli misurabili.

Angoli	N.	Misurati		Calcolati	Differenze esp. — calc.
		Limiti	Medie		
(111) : (001)	9	53°.6′ ½ — 53°.50′	53° 33′	—	—
(001) : ($\bar{1}$11)	9	56. 20 — 56. 45	56. 33	—	—
($\bar{1}$11) : (111)	13	33. 45 — 34. 28	34. 12	—	—
(111) : ($\bar{1}1\bar{1}$)	2	82. 36 — 82. 38	82. 37	82°.36′ ½	0′. ½
(111) : (11$\bar{1}$)	7	69. 18 — 70. 17	69. 57	69. 54	3
(111) : (210)	5	35. 27 — 36. 20	35. 50	36. 1	— 11.
(111) : (100)	10	69. 13 ½ — 70. 2	69. 35	69. 30	5.
(100) : (210)	5	52. 3 — 52. 53	52. 24	52. 24	0.
(210) : (11$\bar{1}$)	4	40. 22 — 40. 36	40. 28	40. 22 ½	5. ½
(11$\bar{1}$) : ($\bar{1}$11)	4	77. 15 — 77. 43	77. 29	77. 37	— 8
(210) : (001)	1	—	85 51	86. 12 ½	— 21. ½

I cristalli si presentano generalmente regolari, con abito tabulare secondo {100}. Le loro dimensioni variano da ½ mm. a poco più di 3 mm., che solo pochissimi raggiungono.

La 1ª combinazione si osserva in numerosi cristalli, meno frequente si notò la 3ª, rarissima la 2ª.

La forma {100} predomina sempre largamente su tutte le altre, e mentre in taluni cristalli la {111} ha facce più estese della {$\bar{1}$11}, in altri avviene il contrario; non è raro poi il caso in cui queste due forme hanno facce quasi equidimensionali. La {210} si presenta solo eccezionalmente con facce mediocremente sviluppate, ed in tal caso, queste hanno estensione variabile anche sullo stesso cristallo, il cui abito morfologico viene sensibilmente modificato; ma quasi sempre la {001} e la {210} si mostrano con facce tanto ristrette che al goniometro si scorgono appena come punti brillanti.

Tutte le facce sono abbastanza splendenti, però quelle del pinacoide {100}, essendo costantemente foggiate a tremìa, riflettono immagini multiple; le altre, anche quando appartengono alla stessa forma, dànno immagini la cui nettezza varia nei diversi cristalli, perciò per ogni spigolo si hanno ordinariamente valori che oscillano fra limiti abbastanza ampi.

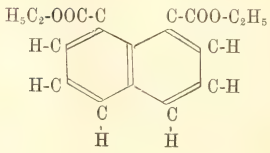
Sfaldatura facile e perfetta secondo {001}.

I cristalli sono di colore giallo-arancio, a splendore vitreo e trasparenti.

Il piano degli assi ottici è parallelo al piano di simmetria.

Su di una lamina tagliata parallelamente al piano di simmetria, una direzione di massima estinzione fa un angolo di circa 42° (luce ordinaria) con lo spigolo [100 : 010] verso lo spigolo [010 : 111].

Naftalato di etile.



Il prof. G. Errera mi ha fornito questa sostanza, che ottenne [1] riscaldando naftalato di metile con alcool etilico ed etilato sodico. — Fonde a 58°-60°.

Sistema cristallino: *monoclino*

$$a : b : c = 1{,}0555 : 1 : 3{,}1814$$
$$\beta = 70°.45'.27''$$

Forme osservate:

{001} , {110} , {$\bar{1}$11} , {$\bar{1}$13} , {$\bar{1}$14} , {$\bar{1}$01} , {011} , {012}

Combinazioni osservate:

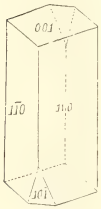


Fig. 8.

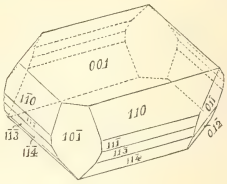


Fig. 9.

1ª {001} , {110} , {$\bar{1}$01} (v. fig. 8)
2ª {001} , {110} , {$\bar{1}$01} , {$\bar{1}$11} , {$\bar{1}$13} , {$\bar{1}$14} , {011} , {012} (v. fig. 9).

[1] Ancora inedito.

Angoli	N.	Misurati		Calcolati	Differenze esp. — calc.
		Limiti	Medie		
(110) : (1$\bar{1}$0)	7	89°.41′ — 89°.52′	89°.48′	—	—
(001) : ($\bar{1}$01)	7	89. 49 — 89. 55	89. 52	—	—
(001) : (110)	11	76. 15 — 76. 39	76. 30	—	—
(110) : (11$\bar{1}$)	5	13. 28 — 13. 40	13. 36 $^1/_4$	13°.35′ $^1/_2$	0′. $^3/_4$
(11$\bar{1}$) : (11$\bar{3}$)	3	25. 35 — 25. 55	25. 40 $^3/_4$	25. 46 $^3/_4$	— 6. »
(11$\bar{3}$) : (11$\bar{4}$)	3	9. 31 — 11. 14	10. 17 $^3/_4$	10. 8	9. $^3/_4$
(110) : (01$\bar{1}$)	2	53. 20 — 53. 23	53. 21 $^1/_2$	53. 25	— 3. $^1/_2$
(110) : (10$\bar{1}$)	5	47. 51 — 48. 10	48. 1 $^1/_4$	48. 4 $^1/_4$	— 3. »
(10$\bar{1}$) : (11$\bar{1}$)	2	46. 32 — 46. 35	46. 33 $^1/_2$	46. 32 $^3/_4$	» $^3/_4$
(10$\bar{1}$) : (11$\bar{3}$)	2	51. 43 — 51. 47	51. 45	51. 41 $^3/_4$	3. $^1/_4$
(10$\bar{1}$) : (11$\bar{4}$)	1	—	56. 4	56. 6	— 2. »
(11$\bar{3}$) : (01$\bar{2}$)	1	—	38. 12	38. 13 $^3/_4$	— 1. $^3/_4$
(01$\bar{1}$) : ($\bar{1}$10)	2	41. 54 — 41. 56	41. 55	41. 58 $^1/_4$	— 3. $^1/_4$
(00$\bar{1}$) : (01$\bar{2}$)	1	—	56. 25	56. 20 $^1/_2$	4. $^1/_2$
(00$\bar{1}$) : (01$\bar{1}$)	1	—	71. 33	71. 35 $^1/_4$	— 2. $^1/_4$

Le dimensioni dei cristalli variano da un minimo di qualche millimetro ad un massimo di 4 mm. circa.

Tutti sono pressochè egualmente sviluppati nel senso degli assi [100] e [010]; però taluni si presentano allungati nel senso dell'asse [001] e si mostrano con abito prismatico secondo }110{ (v. fig. 8); altri invece sono alquanto schiacciati secondo }001{ che, nei cristalli di questo tipo, è sempre molto sviluppata (v. fig. 9).

I cristalli più ricchi di forme sono quelli del 2° tipo, fra queste prevalgono però costantemente }001{ , }110{ , }$\bar{1}$01{ , }011{, le quali sono sempre presenti, mentre }$\bar{1}$11{ , }$\bar{1}$13} , {$\bar{1}$14} , {012} si presentano raramente e tanto ristrette, che al goniometro si mostrano come liste estremamente sottili, più o meno brillanti.

Nei cristalli del 1° tipo tutte le forme sono abbastanza sviluppate e seguono l'ordine decrescente: {110} , {001} , {$\bar{1}$01}. Inoltre, come rilevasi dalle figure, in tutti gli individui osservati non ho mai trovato presenti tutte le facce delle {011} , {012}.

I cristalli del 1° tipo si riscontrano di frequente fra quelli che si ebbero direttamente nella formazione della sostanza; ma da diverse cristallizzazioni da me ottenute, da soluzioni alcooliche del composto, si ebbero sempre individui del 2° tipo, in cui però ho riscontrato solo la combinazione del pinacoide {001} col prisma {110}.

Le facce appartenenti a ciascuna forma sono quasi egualmente sviluppate, perciò i cristalli si mostrano abbastanza regolari. Inoltre sono tutte piane e lucenti ad eccezione di quelle del pinacoide {001} dei cristalli del 2° tipo, le quali sono sempre foggiate a tremìa, ma di solito anche queste, come tutte le facce delle altre forme, al goniometro riflettono immagini semplici, variamente brillanti, ed a contorni più o meno definiti.

Sfaldatura facile e perfettissima secondo {001}, perfetta secondo {110}.

I cristalli sono di colore giallognolo, trasparenti ed a splendore vitreo; i grandi però, i quali appartengono sempre al 2° tipo, quantunque ottenuti dalla stessa soluzione degli altri, sono bianchi, opachi, ed a lucentezza madreperlacea.

Il piano degli assi ottici è parallelo al piano di simmetria.

Su di una lamina tagliata parallelamente al piano di simmetria, una direzione di massima estinzione fa un angolo di circa 25° (luce ordinaria), con lo spigolo [010 : 1$\bar{1}$0] verso [010 : 10$\bar{1}$].

Doppia rifrazione energica e negativa.

Mineralogia. — *Studio microscopico di alcune rocce della Liguria occidentale* (1). Nota del dott. Aristide Rosati, presentata dal Socio G. Struever.

Durante i suoi studi geologici sulla Liguria occidentale l'ing. D. Zaccagna, di cui sono note le interessanti pubblicazioni, raccolse alcuni campioni di rocce, che ritenne poi meritevoli di un esame microscopico. Per questo studio egli volle gentilmente rivolgersi a me inviandomi tutto il materiale necessario, e le indicazioni relative al giacimento delle rocce, indicazioni che io riferisco testualmente al principio di ogni descrizione. Il presente lavoro non è quindi che una descrizione di quanto mi risulta dall'osservazione microscopica. Le rocce provengono da varie località dei circondari di Albenga e di Savona in provincia di Genova. Di esse non è fatta menzione speciale, a quanto io so, in lavori precedenti; solo si trovano accenni in alcune pregevoli opere geologiche, di cui ricorderò le seguenti: *Liguria geologica e preistorica*, A. Issel, 1892. — *Nota preliminare sulla formazione gneissica e sulle rocce granitiche del massiccio cristallino ligure*, S. Franchi. *Boll. Com. Geol.*, 1893. — *Studio geologico sul Carbonifero della Liguria occidentale*, D. Zaccagna. *Memorie descrittive della carta geologica d'Italia*, vol. XII, 1903. — *Note spiccate* (*Calizzano*), A. Issel., Soc. Lig. Sc. Nat. 1904.

Per la classificazione delle rocce seguo specialmente quella proposta dal Rosenbusch.

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Mineralogia della R. Università di Roma.

Rocce gneissiche.

Gneiss biotitico-epidotico.

« Banco fra gli scisti sericitici del Carbonifero nel Rio Badoli presso Isola Grande, Valle della Bormida ».

Roccia scistosa minutamente granulare.

È molto evidente l'alternanza di strati bianchi quarzoso-feldspatici con strati di color grigio, in cui prevale la biotite.

Al microscopio struttura cataclastica assai minuta con tendenza alla struttura porfirica per individui più grandi di quarzo e feldspato.

Il quarzo prevale sul feldspato, e si presenta in sezioni limpide ovoidali con poche inclusioni e spesso con estinzione ondulosa. Gl' individui feldspatici, anch'essi allotriomorfi, hanno dimensioni maggiori, e racchiudono molti inclusi di apatite e zircone. Generalmente sono inalterati. Non di rado hanno estinzione ondulosa. Sono riferibili in gran parte all'ortoclasio. Il plagioclasio tende a divenire idiomorfo, è costantemente geminato secondo la legge dell'albite, ed offre talvolta grandi cristalli tabulari a geminazione polisintetica, mentre sono più frequenti i geminati semplici. L'angolo di estinzione simmetrica nella zona normale a (010) dà un massimo di circa 16°; alcune ricerche col metodo di Becke nei frequenti contatti col quarzo ebbero per risultato:

posizione	parallela	$\omega > \alpha_1$	$\varepsilon > \gamma_1$
»	incrociata	$\omega > \gamma_1$	$\varepsilon > \alpha_1$

Si tratta quindi di albite.

La mica è una biotite in laminette fortemente pleocroiche da α giallo a c bruno-scuro; spesso si altera in clorite e limonite. Le laminette spesso piegate o contorte si riuniscono in fascetti paralleli alla direzione di scistosità.

Altro minerale relativamente abbondante è l'epidoto, che si presenta in forme granulari o in cristalli allungati secondo [b] e con sfaldatura parallela a {001}; ha colore giallo-limone con debole pleocroismo dal giallo all' incoloro.

La magnetite si presenta in minutissimi granuli; è poco diffusa.

Gneiss cloritico-epidotico.

« Lente nella besimaudite permiana, sulla sinistra della Bormida, presso Rive (Isola Grande) ».

All'esame esterno è una roccia di color bianco-verdastro a struttura granulare tendente alla scistosa. Si distingue una parte bianca fatta principalmente di quarzo granulare, ed un materiale verdastro luccicante cloritico-

micaceo; le due parti si compenetrano insieme, così che la struttura gneissica non riesce distinta.

Al microscopio si notano i seguenti minerali: clorite, quarzo, ortose, oligoclasio, mica bianca, epidoto, ilmenite, magnetite, zircone. Sono tutti allotriomorfi, salvo lo zircone, che alcune volte presenta la combinazione del prisma {110} con la piramide {111}.

Dei feldspati prevale l'ortoclasio in grandi cristalli tabulari caratterizzati da linee di sfaldatura molto nette. I pochi cristalli di oligoclasio si distinguono per la geminazione dell'albite e per avere nella zona $\perp$ a (010) un angolo d'estinzione molto piccolo.

Il quarzo è abbondantissimo e presenta i soliti caratteri sviluppandosi spesso in forme lenticolari. Quarzo e feldspato hanno spesso inclusioni di altri minerali come epidoto, magnetite, mica, zircone.

Anche l'epidoto è abbondante, e si presenta per lo più in forme granulari; ha leggiero pleocroismo dal giallo-pallido all'incoloro.

La mica bianca forma piccoli straccetti o laminette più o meno contorte e si unisce alla clorite per formare gli straterelli cloritico-micacei.

L'ilmenite e la magnetite hanno i soliti caratteri, e del resto sono poco abbondanti.

Il microscopio fa vedere una struttura cataclastica, una specie di mosaico dovuto principalmente all'intreccio dei cristalli di quarzo e feldspato.

Gneiss micascistoso.

« In lenti nella besimaudite ed a contatto coll'amfibolite del monte Spinarda presso Calizzano ».

Roccia grigio-cenere di struttura granulare e scistosa. Macroscopicamente lascia riconoscere grandi lamine lucenti di muscovite parallele alla direzione di scistosità, e molto quarzo in grossi granuli cenerognoli frammisto ad un minerale biancastro feldspatico. L'alternanza di zone micacee con zone quarzoso-feldspatiche, che è carattere delle rocce gneissiche tipiche, non è molto distinta, sicchè a prima vista data anche la prevalenza della mica la nostra roccia sembra un micascisto.

Al microscopio risulta che i costituenti essenziali della roccia sono: muscovite quarzo e feldspato.

La muscovite forma grandi lamine incolore e ordinariamente freschissime; è raro che si abbia un principio di alterazione in limonite e clorite.

Alcune sezioni basali o prossime alla base offrono distintissime figure d'interferenza dalle quali si ottiene un angolo apparente degli assi ottici di circa 66° con $r > v$.

Il quarzo è rappresentato da grandi sezioni incolore limpide a contorni irregolarissimi. Poche inclusioni di apatite e zircone; talvolta estinzione ondulosa; spesso bellissime figure d'interferenza uniassiche.

Il feldspato si riferisce in parte ad ortose e microclino, in parte a plagioclasio. L'ortose, che prevale sul plagioclasio, forma grandi cristalli allotriomorfi, provvisti di distinte linee di sfaldatura. Generalmente è fresco, ma non mancano esempi di alterazione in muscovite che preferisce formarsi nell'interno dei cristalli. Il microclino molto raro è freschissimo e si distingue per la sua caratteristica *Gitterstructur*. Anche il plagioclasio si sviluppa in grandi cristalli, che sono geminati polisintetici secondo la legge dell'albite. Deve riferirsi all'albite, giacchè il valore massimo dell'angolo d'estinzione simmetrica nella zona $\perp$ a (010) è di circa 16° e il metodo di Becke applicato nei frequenti contati col quarzo ha dato i seguenti schemi:

posizione $\parallel$	posizione $+$
$\omega > \alpha_1$	$\omega > \gamma_1$
$\varepsilon > \gamma_1$	$\varepsilon > \alpha_1$

Sono minerali del tutto accessorî: zircone, apatite e magnetite, i primi due inclusi nel quarzo e nel feldspato.

Nelle sezioni trasversali comparisce la disposizione scistosa dei minerali costituenti la roccia alternando straterelli micacei con quelli in cui prevale l'impasto quarzoso-feldspatico.

Data la notevole quantità di feldspato, la presente roccia va classificata come gneiss.

Rocce prasinitiche.

Per maggior chiarezza riporto qui la definizione di roccie prasinitiche data dall'egregio ing. V. Novarese nella sua interessante Memoria: *Nomenclatura sistematica delle rocce verdi nelle Alpi occidentali*, Boll. Com. Geol. 1895.

« Nel quadro annesso abbiamo tenuto distinto da tutto il resto il gruppo « delle rocce prasinitiche la cui caratteristica sta nell'essere le rocce in esso « comprese costituite sempre da uno o più dei seguenti elementi: un feld- « spato sodico-calcare più o meno vicino all'albite; un minerale del gruppo « degli amfiboli, che ora è un amfibolo verde attinolitico, ora invece « un amfibolo sodico verde-azzurro o violetto; un minerale epidotico, che « può essere epidoto propriamente detto oppure zoisite, ed infine una clo- « rite. Tutti questi minerali hanno un carattere comune; o per la loro na- « tura stessa o per il loro abito appartengono sempre alla categoria di quelli « che siamo soliti a considerare come secondarî. Perciò le rocce del gruppo « delle prasiniti sono composte essenzialmente di minerali secondarî; e salvo « rare eccezioni, nella loro composizione non presentano mai elementi che si « possano ritenere primitivi ».

Prasinite amfibolica — Campione A.

« Massa lentiforme nella besimaudite fra il gneiss micascitoso sopradescritto e l'amfibolite scistosa, Campione A, che è descritta in seguito. Salendo dal colle di Vetria al monte Spinarda, presso Calizzano. »

Roccia grigio-verdastra, granosa. Una pasta bianca, saccaroide, feldspatico-quarzosa è finamente commista al minerale verde, da cui risulta la massima parte della roccia; in taluni punti è visibile la pirite.

Al microscopio l'amfibolo negli individui più sviluppati ha forma irregolare o granulare e manca di sfaldatura prismatica distinta. Pleocroismo:

a = giallo-verdiccio
b = verde-grasso
c = verde-bluastro

onde si tratta di comune orneblenda. Poche inclusioni di rutilo e magnetite. Alterazione in limonite poco diffusa; alcuni cristalli all'esterno sono trasformati in amfibolo azzurro. Oltre l'orneblenda, vi è molto amfibolo di color verde-chiaro e di abito attinolitico, i cui cristalli aciculari o microlitici preferiscono costituire le inclusioni verdi del feldspato.

Il feldspato è allotriomorfo, e non presenta caratteri sufficienti a determinarlo. Alcuni cristalli sono geminati secondo la legge dell'albite. Frequentemente è saussuritizzato; molto diffuse le inclusioni di amfibolo aciculare.

Sono minerali accessorî:

Magnetite granulare,

Ilmenite in forme allungate, spesso circondata da leucosseno,

Granato in associazioni granulari di colore leggermente roseo, talvolta birifrangenti,

Rutilo in piccoli cristalli giallognoli,

Titanite,

Epidoto in granuli,

Pirite con avanzata alterazione in limonite.

Prasinite amfibolica — Campione B.

« Massa lentiforme accompagnata da micascisto fra gli scisti carboniferi e la besimaudite permiana, presso Montefreddo (Mallare) ».

Campione di roccia alterata a struttura scistosa e colore grigio-verdastro. Lascia riconoscere macroscopicamente cristallini d'amfibolo commisti a materiale feldspatico-quarzoso, che forma una pasta bianca granulare. Venule di quarzo attraversano la roccia in vario senso.

Al microscopio la parte bianca risulta costituita da un intimo aggregato granofirico di quarzo e feldspato.

Il quarzo meno diffuso del feldspato si distingue da questo per la limpidezza dei suoi cristalli generalmente scevri d'inclusioni ed inalterati.

Il feldspato forma granulazioni ad estinzione ondulosa ripiene di apatite aciculare e di zircone, e che tendono ad alterarsi in saussurite.

Non si riconosce quasi mai geminazione dell'albite, ma alcune determinazioni col metodo di Becke nei frequenti contatti col quarzo hanno dato:

$$\text{posizione} \parallel \omega > \alpha_1 \qquad \varepsilon > \gamma_1$$
$$\text{"} \quad \perp \omega = \gamma_1 \qquad \varepsilon > \alpha_1$$

per cui deve riferirsi alla serie dell'oligoclasio acido.

Di elementi colorati principalissimo l'amfibolo in cristalli molto allungati secondo il prisma }110{ e quindi di abito attinolitico, ma a contorni molto irregolari e di dimensioni variabilissime. Pleocroismo:

a giallo-chiaro
b verde
c verde-cupo

Estinzione massima di 15° dalle linee di sfaldatura. Si altera in limonite e allo stato microlitico forma inclusioni nel feldspato.

La biotite in laminette contorte e quasi sempre più o meno alterate in clorite è rara.

È raro anche l'epidoto in granuli giallognoli pleocroici.

Sono del tutto accessorî:

Granato,

Zircone, talvolta in forma di prisma verticale terminato dalla piramide }111{,

Ilmenite con orlo leucossenico,

Magnetite,

Titanite,

Pirite, spesso limonitizzata.

La struttura scistosa della roccia nella sezione sottile non risulta molto evidente, avendosi una statificazione alquanto irregolare dei minerali che hanno forme frammentarie e quindi dànno luogo piuttosto ad una struttura cataclastica.

Questi due campioni certamente non rappresentano prasiniti tipiche, perchè quantunque in generale i minerali costituenti hanno caratteri tali da doverli ritenere di formazione secondaria, pure questa non sempre riesce evidente specialmente per l'amfibolo. Tuttavia, tenuto conto dei loro caratteri mineralogici complessivi, credo non essermi allontanato troppo dal vero classificandoli fra le rocce prasinitiche.

Fisiologia. — *L'azione dei gaz compressi sulla vita dei microorganismi e sui fermenti.* Nota del dott. CARLO FOÀ, presentata dal Socio A. MOSSO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Biologia. — *Sulla possibilità di accumulare arsenico nei frutti di talune piante* [1]. Nota preliminare di B. GOSIO, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Da parecchi anni intrapresi ricerche sistematiche sul passaggio dell'arsenico nei vegetali. Per quanto si conosce dalla fisiologia di questi ultimi, se alle loro radici si offre un soluto troppo ricco di arsenico, è ovvio succeda come per gli stessi arseniomiceti, cioè l'intolleranza: può anche accadere l'avvelenamento delle cellule delle radici e quindi minacciarsi la vita dell'organismo.

Nelle mie ricerche però io mi servii di soluzioni arsenicali molto diluite: (1 parte di arsenito sodico per 100000 di acqua — 1 : 10000).

Incominciai colla soluzione più debole per passare più tardi alla più forte (1 : 10000) ed innaffiavo spesso le piante nelle ore più opportune.

Le prime ricerche riguardarono piantagioni di mais e di fagiuoli. In entrambi i casi, a mezzo della sensibilissima reazione biologica, potei constatare il passaggio dell'*As* in pochi giorni del trattamento. Il saggio riuscì però poco intenso anche per i frutti: la causa dello scarso successo dovette risiedere nelle particolari condizioni, in cui dette piante vennero coltivate. si trattava infatti di colture in terreno libero ed esposto alle vicende atmosferiche: e ciò ha notevole influenza sul quantitativo d'arsenico assorbibile dalle radici, massime nei periodi di pioggia, che nel caso mio furono ripetuti ed abbondanti.

All'inconveniente posi in seguito completo riparo, sia con una più acconcia scelta della pianta, sia con un'adatta copertura del terreno.

Utilizzai una cucurbitacea: *cucurbita pepo - varietas verrucosa - forma aurantiaca.*

Il seme fu deposto nell'aprile: l'accolse una gran cassa piena di terra, protetta da un ampia tettoia aperta da un lato. L'innaffiamento venne fatto con acqua comune, fino a che la pianticella raggiunse l'altezza di mezzo

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio microbiologico della Sanità pubblica.

metro circa. A questo punto l'acqua semplice fu sostituita con quella arsenicale all' 1 : 100000; dopo un mese si passò all' 1 : 10000, colla quale soluzione si proseguì l'innaffiamento fino alle ultime fasi vegetative.

Coll'avanzarsi dello sviluppo, la pianta fu congiunta ad un palo, che le permise d'arrampicarsi fin sopra la tettoia, dove si potè espandere con piena libertà, mentre la parte inferiore del caule e tutto il terreno adiacente rimasero protetti dalle pioggie.

Numerosi saggi qualitativi dell'arsenico vennero fatti col metodo biologico sulle foglie, sui fiori e finalmente sui frutti. Questi ultimi si raccolsero nel mese di ottobre in numero di due soli: essi avevano il peso rispettivo di gr. 79 e 61.

Tutte le prove ebbero esito certo, con maggior evidenza nel periodo del maggior rigoglio nello sviluppo della pianta. Però il massimo contenuto di arsenico si rivelò nel frutto, dove i saggi riuscirono intensissimi, dimostrando che là doveva essersi costituito un vero accumulo del metalloide. Le determinazioni quantitative [1] furono fatte su 36 grammi di sostanza fresca: questa venne con un trattamento nitrico preparata a subire il processo della distillazione in presenza d'acido cloridrico; così si ricuperò l'arsenico sotto forma di tricloruro. Si precipitò quindi colle dovute regole a mezzo del solfidrico e si ottenne così il trisolfuro d'arsenico, il cui peso alla bilancia ammontò a gr. 0,0036; da ciò si calcola gr. 0,0015 di arsenico metallico. Riportando a 100 parti, si può contare su una percentuale d'oltre gr. 0,0041, sempre calcolando in puro arsenico metallico.

Risulta adunque, che certe piante, anche se innaffiate con diluitissime soluzioni dell'elemento attivo, riescono ad accumulare arsenico nei frutti e con ogni verosimiglianza la cifra ottenuta può elevarsi considerevolmente, se si provvede ad una graduale immunizzazione delle radici mercè soluti man mano più ricchi del metalloide, od anche spingendo l'innaffiamento oltre il necessario.

Io vado estendendo le ricerche in tale indirizzo, prendendo in esame varie altre piante, e spero poter giungere a qualche corollario utile anche dal punto di vista pratico, poichè già fin d'ora s'intuisce la probabilità di poter propinare l'arsenico medicamentoso in una forma più efficace, che non coi comuni preparati officinali. A quest'ultimo riguardo voglio anche ricordare che intrapresi anche ricerche sull'accumulo dell'arsenico nelle uova, approdando a risultati molto convincenti.

[1] Ringrazio vivamente il dott. Manuelli per la scrupolosa pratica del dosaggio.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente Blaserna presenta tre volumi di una ricca pubblicazione intitolata: *Le Mexique, son évolution sociale,* offerta in dono all'Accademia dal Governo degli Stati Uniti del Messico; fa inoltre omaggio del tomo V del *Traité de Chimie minérale* del prof. Moissan, e di alcune pubblicazioni del prof. Pisani.

CORRISPONDENZA

Il Presidente Blaserna presenta un piego suggellato, trasmesso dal dott. Munaron per essere conservato negli Archivi accademici.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 17 giugno 1906.

Agamennone G. — Winke über die Konstruktion der Erdbebenmesser in Italien. (Sondrabd. aus der Monatschrift « Die Erdbebenwarte » 1904-05). Laibach, 1905. 8°.

Battaglia M. — Pleurite da tetragono. Taranto, 1906. 8°.

Bigoni G. — Dopo Lissa (1811). Milano, 1906. 8°.

Cabreira A. — Biographie de Antonio Cabreira: (Collection des grands dictionnaires; Dictionnaire biographique internat. des Ecrivains ecc. Tomes XIV et XV). Paris, s. a. 8°.

Id. — Sur le problème relatif à la résolution d'un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux. (Bull. de Sciences math. et phys. élément., fondé par M. Niewenglowski. Onzième année. N. 12). Paris, 1906. 8°.

Id. — Sur les proprietés de deux Cercles égaux et tangents. Coimbra, 1906. 8°.

Caldarera F. — Corso di meccanica razionale. Vol. III. Equilibrio e moto dei sistemi continui. Idrostatica.. Idrodinamica. Palermo, 1906. 8°.

Comune di Venezia. Case sane, economiche e popolari. Bergamo, s. a. 8°.

Expédition antarctique belge. Résultats du voyage du S. Y. Belgica en 1897-1898-1899 sous commandement de A. de Gerlache de Gomery. Rapports scientifiques. Zoologie, Météorologie. Botanique. Cartes. Anvers, 1903-1904. f.

Ferraris C. — Gli inscritti nelle Università e negli Istituti superiori del Regno nel dodicennio scolastico dal 1893-94 al 1904-05. (Dalla Riforma Sociale, fasc. 5. Ann. XIII). Torino, 1906. 8°.

Lamas A. — Desde la Cárcel. Santiago, 1905. 8°.

Russo A. — Differenti stati dei corpi cromatici nell'ooplasma dei mammiferi e loro riproduzione sperimentale. II. Nota prel. (dal Bollett. dell'Acc. Gioenia di sc. nat. in Catania, Fasc. LXXXIX). s. l. 1906. 8°.

Stabile F. — Del suffisso Ositas. Cava, s. a. 8°.

V. C.

INDICE DEL VOLUME XV, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1906 — 1° Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

Almansi. « Sul principio dei lavori virtuali in rapporto all'attrito ». 490; 539.

Angeli e Marchetti. « Sopra gli azossicomposti ». 426; 480.

Angelucci. « Separazione quantitativa del radiotorio dei fanghi di Echaillon e Salins Moutier ». 497.

— V. *Blanc*.

Arnò. « Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate e di onde hertziane ». 629; 691.

Artom. « Sopra un nuovo sistema di telegrafia senza filo ». 629; 692.

Arzelà. « Condizioni di esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali ». 417.

— « Sulle equazioni a derivate parziali ». 670.

Azzarello. V. *Peratoner*.

B

Balbiano. Fa parte della Commissione esaminatrice della Memoria *Zambonini*. 398.

Barbieri. « Sulle forme superiori di combinazione dell'argento ». 469; 500.

Bargellini. « Prodotti di condensazione dell'acido rodaninico colle aldeidi ». 35; 181.

— « Azione del cloroformio e idrato sodico sui fenoli in soluzione nell'acetone ». 579.

Bassani. « Commemorazione del Socio *Scarabelli Gommi-Flamini* ». 186; 246.

Battelli. « Resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza ». 148; 266; 471; 529.

— « Ricerche sperimentali sulla resistenza dei solenoidi alle correnti d'alta frequenza ». 698.

Blanc. « Ricerche su un nuovo elemento presentante i caratteri radioattivi del torio ». 328; 349.

Id. e Angelucci. Trasmettono un piego suggellato. 302.

Blaserna (Presidente). Annunzia che alla seduta assistono S. E. *G. Esteva* e il prof. *Louchaire*. 597.

— Comunica un invito della Università di Aberdeen per la celebrazione del sua quarto centenario. 302.

— Presenta un piego suggellato inviato dal sig. *Mataloni*. 68; dal sig. *Gregory*. 187; dai dottori *Blanc* e *Angelucci*. 302; dal dott. *Munaron*. 732.

— Presenta una pubblicazione dell'ing.

Mancini e ne parla. 64. Id. del Corrispondente *Viola*. 400. Id. del senatore *Marazio*. 517; tre volumi dell'opera: « Le Mexique, son évolution sociale ». 732.

Blaserna (Presidente). Fa parte della Commissione esaminatrice della Memoria *Zambiasi*. 516.

— « Commemorazione del Socio straniero *Langley* ». 398.

Boggio. « Sulla deformazione di un ellissoide elastico ». 104.

Borgo. V. *Mazzara*.

Bortolotti. « Sopra una ricerca di limite ». 490; 545.

— « Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insiemi lineari ». 490; 684.

Brizi. « Ricerche intorno al modo di caratterizzare le alterazioni prodotte alle piante coltivate dalle emanazioni gassose degli stabilimenti industriali ». 186; 232.

Brunelli. « Sulla distruzione degli oociti nelle regine dei termitidi infette da Protozoi ed altre ricerche sull'ovario degl'insetti ». 55.

Bruni e Contardi. « Sulle reazioni di doppia decomposizione fra alcooli ed eteri composti ». 637.

C

Capellini. « La Rovina delle Rocche di S. Pietro a Porto Venere ». 3.

Carrara. Invia per esame la sua Memoria: « Elettrochimica delle soluzioni non acquose ». 516. — Sua approvazione. 664.

Carrasco e Padoa. « Sulla formazione e scomposizione del nucleo indolico per mezzo dell'azione catalitica del nickel ». 644; 699.

Castelnuovo. « Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica ». 337.

Cerruti (Segretario) « Dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti ». 69; 187; 302; 400; 517; 664.

— Presenta le pubblicazioni dei Soci: *von Baeyer*. 63; *Bassani*. 186; *Berlese*. 302; *Bianchi*. 63; *Darboux*, *Fod*. 302; *Fusari*. 186; *Haeckel*, *Helmert*. 302; *Hermite*. 400; *Klein*. 517; *Langley*, *Leonardi-Cattolica*. 400; *Lustig*. 63; *Pascal*. 63; 517; *Pflueger*. 186; 302; *Raina*. 517; *Saccardo*. 302; *Sorauer*. 517; *Taramelli*. 302; *Veronese*. 517. — e dei signori: *Amodeo*. 63; *Campana*. 302; *Guidi C*. 63; *Loew*. 517; *Verbeck*. 302.

Cerruti (Segretario). Fa particolare menzione delle pubblicazioni: dell'Accademia delle scienze di Copenaghen e della Società olandese delle scienze di Harlem. 64; dell'Osservatorio di Bordeaux. 186; del fasc. 33° dei « Risultati delle campagne scientifiche » del Principe di Monaco. 400; della Commissione svedese per la misura di un arco di meridiano. 517.

— Comunica gli elenchi dei lavori presentati per concorrere ai premi Reali per la *Chimica* e per la *Matematica*, e a quelli del Ministero della P. I. per le *Scienze fisiche e chimiche*, del 1905. 64.

Cesaris-Demel. Invia per esame, la sua Memoria: « Sulla varia tingibilità e sulla differenziazione della sostanza cromatica contenuta in alcuni eritrociti » 63. — Sua approvazione. 186.

Chella. « Misura del coefficiente di attrito interno dell'aria a basse temperature ». 119.

Chistoni. « Risultati pireliometrici ottenuti dal 22 agosto 1902 a tutto giugno 1903 al R. Osservatorio Geofisico di Modena ». 19; 126.

— « Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1902 e nell'estate del 1903 ». 133; 208.

— « Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1904 e nell'estate del 1905 ». 214; 276.

Ciamician. Riferisce sulla Memoria *Carrara*. 664.

Clerici. « Delle sabbie fossilifere di Malagrotta sulla via Aurelia ». 133.

Colomba. « Sulla scheelite di Traversella ». 281.

Contardi. V. *Bruni* e *Koerner*.

Cuboni « Ricerche sulla produzione artificiale della melata sulle foglie dell'olivo ». 482.

D

Dalla Vedova. « Commemorazione di Cristoforo Colombo ». 597; 658.
De Helguero. Invia per esame la sua Memoria: « Per la risoluzione delle curve dimorfiche ». 469. — Sua approvazione. 516.
Di Stefano. « Sull'esistenza dell'Eocene nella penisola salentina ». 344; 423.
Ducceschi. « Sulla fisiologia della respirazione. I. Osservazioni su di un caso di fistola bronchiale nell'uomo ». 186; 223.

E

Eredia. « La pioggia a Roma ». 363; 450.
Esteva. Assiste alla seduta accademica. 597.

F

Fasoli. V. *Tizzoni.*
Foà C. « L'azione dei gas compressi sulla vita dei microrganismi e sui fermenti ». 730.
Foà P. Riferisce sulla Memoria *Cesaris-Demel.* 186.

G

Gallo. « L'equivalente elettrochimico dell'Iodio ». 24.
Giacomini. « Sulle capsule surrenali e sul simpatico dei Dipnoi. Ricerche in Protopterus annectens ». 394.
Gorini. « Ricerche batteriologiche sul formaggio Gorgonzola ». 246; 298.
Gosio. « Sulla possibilità di accumulare arsenico nei frutti di talune piante ». 649; 730.
— « Sulla produzione di cumarine fermentative nello sviluppo di taluni ifomiceti ». 649.
Grassi. Fa parte della Commissione esaminatrice della Memoria *Cesaris-Demel.* 186.
Gregory. Trasmette un piego suggellato. 187.

K

Körner. « Nuove ricerche intorno alle sostanze dette aromatiche a 6 atomi di carbonio ». 482; 525.
— e Contardi. « Intorno alla sesta nitrobibromobenzina ». 482; 526.
Kuiper. « Sul meccanismo respiratorio dei pesci ossei ». 385.

L

Langley. Annuncio della sua morte. 301. Sua commemorazione. 398.
Lauricella. « Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi ». 349; 426.
— « Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sulla integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti ». 490; 611.
— « Sul problema derivato di Dirichlet, sul problema dell'elettrostatica e sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità ». 619.
Lazzarini. V. *Minunni.*
Lebesgue. « Sur les fonctions dérivées ». 629.
Lebon. « Théorie et construction de tables permettant de trouver rapidement les facteurs premiers d'un nombre ». 349; 439.
Levi B. « Ricerche sulle funzioni derivate ». 433; 490; 551; 674.
Levi M. G. e Voghera. « Sopra la formazione elettrolitica degli iposolfiti ». 281; 322.
— V. *Nasini.*
Longo. « Ricerche sul Fico e sul Caprifico ». 373.
Louchaire. Assiste alla seduta accademica. 597.

M.

MAGINI. « Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore ». 6; 208; 270; 308; 442.

MAGRI. « Sulla radioattività dei fanghi termali depositati dalle acque degli stabilimenti dei Bagni di Lucca (Toscana) ». 14; 111.

MANUELLI. « Azione dello zolfo sulle soluzioni dei sali metallici ». 644; 703.

MARCHETTI. V. *Angeli.*

MARCOLONGO. « Sugl'integrali delle equazioni dell'elettrodinamica ». 308; 344.

MARIOTTI. Aggiunge alcune parole alla Commemorazione di Cristoforo Colombo. 597.

MARTELLI. « Nuovi studî sul Mesozoico Montenegrino ». 176.

MATALONI. Trasmette un piego suggellato. 68.

MAZZARA e BORGO. » Azione del cloruro di solforile sul pirazolo ». 644; 704.

MILLOSEVICH F. « Sopra alcuni minerali di Val d'Aosta ». 317.

— « Appunti di mineralogia sarda. Bournonite del Sarrabus ». 363; 457.

MILLOSEVICH E. Fa omaggio di due pubblicazioni del sig. *Sauve.* 186.

— « Osservazioni delle comete 1905 *b* e 1906 *a* fatte all'equatoriale di 39 cm. dell'Osservatorio astronomico del Collegio Romano ». 147.

— « Osservazioni della cometa 1905 *c* Giacobini fatte all'equatoriale di 39 cm. d'apertura all'Osservatorio del Collegio Romano ». 265.

MINUNNI e LAZZARINI. « Su taluni derivati del pirazolo ». 19.

— « Sull'acido 5-metil-1-fenil-3-ossifenilpirazol-4-carbonico ed il suo lattone ». 136.

MODERNI. « Alcune osservazioni geologiche sul Vulcano Laziale e specialmente sul Monte Cavo ». 462.

MONTEMARTINI. « Sui tubercoli radicali della Datisca cannabina ». 144.

MONTI. « Sulla misura della velocità di propagazione delle perturbazioni sismiche in rapporto alla sismometria razionale ». 15.

MONTI. « Sulla probabile origine della distribuzione dei temporali italiani a seconda delle stagioni ». 173.

— « Sull'interpretazione matematica dei sismogrammi ». 217.

MORIGGIA. Annuncio della sua morte. 186.

MOSSO. « Crani preistorici del Foro Romano ». 98.

MUNARON. Trasmette un piego suggellato. 732.

N

NASINI. Fa parte della Commissione esaminatrice della Memoria *Carrara.* 664.

— e LEVI. « Sulla radioattività della sorgente di Fiuggi presso Anticoli ». 307.

NIELSEN. « Sur le développement en fraction continue de la fonction Q de M. Prym ». 6; 98.

— « Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions cylindriques ». 349; 490.

O

ORLANDO. « Alcune applicazioni dell'integrale di Fourier ». 205.

— « Sull'integrazione di una notevole equazione differenziale a derivate parziali ». 266.

OTTOLENGHI. « Su una nuova reazione colorata della colesterina ». 44.

P

PACINOTTI. « Circa alle influenze della temperatura, delle vibrazioni, della umidità, dell'elettrolisi, e dell'untuosità, sull'adesione e sull'attrito nello sfregamento fra varî corpi, e sul lavoro di alcuni aratri; riassunto di appunti sperimentali ». 82.

PADOA. « Sui prodotti di idrogenazione del pirrolo a mezzo del nickel ridotto ». 219.

— V. *Carrasco.*

PANICHI U. È approvata la stampa della sua Memoria: « Sulle variazioni dei fenomeni ottici dei minerali, al variare della temperatura ». 63.

PANNELLI « Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni ». 483.
— « Sopra gl'invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali ». 619.
PANTANELLI. « Influenza dei colloidi su la secrezione e l'azione dell'invertasi ». 377.
— « Proinvertasi e reversibilità dell'invertasi nei Mucor ». 587.
PARONA. « Fossili turoniani della Tripolitania ». 160.
PASCAL. « Sui simboli di Riemann nel Calcolo differenziale assoluto ». 610; 670.
PAVANINI. « Sul problema dei due corpi nell'ipotesi di un potenziale newtoniano ritardato ». 164; 197.
PEANO. « Sulle differenze finite ». 5; 71.
PEGLION. « Morìa di piantoni di gelsi cagionata da Gibberella moricola (De Not.) Sacc. ». 62.
— « Intorno alla peronospora della canapa ». 594.
PELLINI. « Contributo allo studio dell'isomorfismo fra il tellurio ed il selenio ». 629; 711.
— e VIO. « Contributo allo studio dell'isomorfismo fra selenio e tellurio ». 637.
PERATONER e AZZARELLO. « Eterificazione del γ-piridone con diazoidrocarburi grassi ». 35; 139.
PEROTTI. « Sulla spontanea formazione della diciandiamide nei prodotti concimanti contenenti cianamide calcica ». 48.
— « Distribuzione dell' Azotobacterio in Italia ». 295.
— « Sopra la forma italiana del Nitrosomonas europaea Win. ». 512.
PETRI. « Nuove ricerche sopra i batteri della Mosca olearia ». 238.
PINCHERLE. « Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date ». 603.
PIOLA. « Dispositivo per lo studio dell'isteresi magnetica sotto l'azione di campi magnetici oscillanti ». 698.
— e TIERI. « Variazioni magnetiche prodotte nel ferro colla torsione ». 566.
PIZZETTI. « Intorno al calcolo della rifrazione astronomica, senza speciali ipotesi sul modo di variare della temperatura dell'aria coll'altezza ». 6; 73.
POCHETTINO. « Sul comportamento fotoelettrico dell'Antracene ». 355.
— « Sull'effetto fotoelettrico nell'Antracene ». 698.
— e TRABACCHI. « Sul modo di comportarsi del selenio rispetto alle correnti alternanti ». 698.

R

RANFALDI. « Studio cristallografico di alcune nuove sostanze organiche ». 644; 715.
REINA. Riferisce sulla Memoria *De Helguero*. 516.
REPOSSI. « Su alcuni minerali del granito di S. Fedelino (Lago di Como) ». 505.
RIGHI. « Su alcuni casi, apparentemente paradossali, di trasmissione dell'elettricità attraverso un gas ». 610; 665.
ROSATI. « Studio microscopico di alcune rocce della Liguria occidentale ». 645; 724.

S

SANI. « Azione della benzilammina sull'α-crotonato etilico ». 645.
SAUVE. « Perfezionamenti allo spettroelioscopio ». 168.
SCARABELLI GOMMI FLAMINI. Sua commemorazione. 186; 246.
SELLA. Fa parte della Commissione esaminatrice della Memoria *Panichi*. 63.
— Riferisce sulla Memoria *Zambiasi*. 516.
SILVESTRI. « Sviluppo dell' Ageniaspis fuscicollis (Dalm.) Thoms. (Chalcididae) ». 650.
STRÜVER. Riferisce sulla Memoria *Panichi*. 63.
— Id. sulla Memoria *Zambonini*. 398.

T

TEGLIO. « Contributo allo studio del pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångstrøm ». 176; 214.

Tieri. « Modificazione del detector magneto-elastico del Sella ». 164.

Tizzoni e Fasoli. « Saggio di ricerche batteriologiche sulla pellagra ». (V. *Errata corrige*).

Trabacchi. V. *Pochettino*.

V

Van Rynberk. « Sul riflesso orbicolare delle palpebre nel pescecane (Scyllium) ». 53.

Vanzetti. « Decomposizione elettrolitica di acidi organici bicarbossilici. Acido adipico ». 505; 574.

Venditori. « Sulla riduzione del ferricianuro di potassio ». 370.

Vinassa de Regny. « A proposito della esistenza del Culm nelle Alpi Carniche ». 647.

Viola. « La trasformazione delle coordinate dei cristalli ». 6; 89.

Voghera. V. *Levi M. G.*

Volterra. Offre un volume del prof. *Caldarera*. 517.

— Fa parte della Commissione esaminatrice della Memoria *De Helguero*. 516.

— « Nuovi studî sulle distorsioni dei solidi elastici ». 519.

— « Sull'applicazione del metodo delle immagini alle equazioni del tipo iperbolico ». 670.

Z

Zambiasi. Invia per esame la sua Memoria: « Verifica dei coristi normali dell'Ufficio centrale italiano pel corista uniforme ». 398. — Sua approvazione. 516.

Zambonini. Invia per esame la sua Memoria: « Ulteriori ricerche sulle zeoliti ». 301. — Sua approvazione 398.

— « Sulla costituzione della titanite ». 291.

— « Appunti sulla scheelite di Traversella ». 505; 558.

INDICE PER MATERIE

A

ANATOMIA. « Sulle capsule surrenali e sul simpatico dei Dipnoi. Ricerche in Protopterus annectens ». *E. Giacomini.* 394.

ANTROPOLOGIA. « Crani preistorici del Foro Romano ». *A Mosso.* 98.

ASTRONOMIA. « Osservazioni delle comete 1905 *b* e 1906 *a* fatte all'equatoriale di 39 cm. dell'Osservatorio astronomico del Collegio Romano ». *E. Millosevich.* 147.

— « Osservazioni della cometa 1905 *c* Giacobini fatte all'equatoriale di 39 cm. d'apertura all'Osservatorio del Collegio Romano ». *Id.* 265.

— « Intorno al calcolo della rifrazione astronomica, senza speciali ipotesi sul modo di variare della temperatura dell'aria coll'altezza ». *P. Pizzetti.* 6; 73.

B

BATTERIOLOGIA AGRARIA. « Distribuzione dell'Azotobacterio in Italia ». *R. Perotti.* 295.

— « Sopra la forma italiana del Nitrosomonas europaea. Win. ». *Id.* 512.

BATTERIOLOGIA CASEARIA. « Ricerche batteriologiche sul formaggio Gorgonzola ». *C. Gorini.* 246; 298.

BIOGRAFIA. « Commemorazione di Cristoforo Colombo ». *G. Dalla Vedova.* 597; 658.

BIOLOGIA. « Sulla distruzione degli oociti nelle regine dei termitidi infette da Protozoi ed altre ricerche sull'ovario degl'insetti ». *G. Brunelli.* 55.

BIOLOGIA. « Sulla possibilità di accumulare arsenico nei frutti di talune piante ». *B. Gosio.* 649; 730.

— « Sulla produzione di cumarine fermentative nello sviluppo di taluni ifomiceti ». *Id.* 649.

Bollettino bibliografico. 188; 263; 303; 401; 598; 732.

BOTANICA. « Ricerche sulla produzione artificiale della melata sulle foglie dell'olivo ». *G. Cuboni.* 482.

— « Ricerche sul Fico e sul Caprifico ». *B. Longo.* 373.

— « Sui tubercoli radicali della Datisca cannabina ». *L. Montemartini.* 144.

C

CHIMICA. « Sopra gli azossicomposti ». *C. Angeli* e *G. Marchetti.* 426; 480.

— « Sulle forme superiori di combinazione dell'argento ». *G. A. Barbieri.* 469; 500.

— « Prodotti di condensazione dell'acido rodaninico colle aldeidi ». *G. Bargellini.* 35; 181.

— « Azione del cloroformio e idrato sodico sui fenoli in soluzione nell'acetone ». *Id.* 579.

— « Sulle reazioni di doppia decomposizione fra alcooli ed eteri composti ». *G. Bruni* e *A. Contardi.* 637.

— « Sulla formazione e scomposizione del nucleo indolico per mezzo dell'azione catalitica del nickel ». *O. Carrasco* e *M. Padoa.* 644; 699.

CHIMICA. « L'equivalente elettrochimico dell'Iodio ». *G. Gallo.* 24.
— « Nuove ricerche intorno alle sostanze dette aromatiche a 6 atomi di carbonio ». *G. Körner.* 482; 525.
— « Intorno alla sesta nitrobibromobenzina ». *Id.* e *A. Contardi.* 482; 526.
— « Sopra la formazione elettrolitica degli iposolfiti ». *M. G. Levi* e *M. Voghera.* 281; 322.
— « Azione dello zolfo sulle soluzioni dei sali metallici ». *A. Manuelli.* 644; 703.
— « Azione del cloruro di solforile sul pirazolo ». *G. Mazzara* e *A. Borgo.* 644; 704.
— « Su taluni derivati del pirazolo ». *G. Minunni* e *G. Lazzarini.* 19.
— « Sull'acido 5-metil-1-fenil-3-ossifenilpirazol-4-carbonico ed il suo lattone ». *Id. Id.* 136.
— « Su una nuova reazione colorata della colesterina ». *D. Ottolenghi.* 44.
— « Sui prodotti di idrogenazione del pirrolo a mezzo del nichel ridotto ». *M. Padoa.* 219.
— « Contributo allo studio dell'isomorfismo fra il tellurio ed il selenio ». *G Pellini.* 629; 711.
— « Contributo allo studio dell'isomorfismo fra selenio e tellurio ». *Id.* e *Vio.* 637.
— « Eterificazione del γ-piridone con diazoidrocarburi grassi ». *A. Peratoner* ed *E. Azzarello.* 35; 139.
— « Azione della benzilammina sull'α-crotonato etilico ». *G. Sani.* 645.
— « Decomposizione elettrolitica di acidi organici bicarbossilici. Acido adipico ». *B. L. Vanzetti.* 505; 574.
— « Sulla riduzione del ferricianuro di potassio ». D. *Venditori.* 370.
CHIMICA AGRARIA. « Sulla spontanea formazione della diciandiamide nei prodotti concimanti contenenti cianamide calcica ». *R. Perotti.* 48.
Concorsi a premi. Elenchi dei lavori presentati per concorrere ai premi Reali per la *Chimica* e per la *Matematica,* e a quelli del Ministero della P. I. per le *Scienze fisiche e chimiche,* del 1905. 64.
CRISTALLOGRAFIA. « Studio cristallografico di alcune nuove sostanze organiche ». *F. Ranfaldi.* 644; 715.
— « La trasformazione delle coordinate dei cristalli ». *C. Viola.* 6; 89.

F

FISICA. « Separazione quantitativa del radiotorio dei fanghi di Echaillon e Salins Moutier ». *O. Angelucci.* 497.
— « Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate e di onde hertziane ». *R. Arnò.* 629; 691.
— « Sopra un nuovo sistema di telegrafia senza filo ». *A. Artom.* 629; 692.
— « Resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza. » *A. Battelli.* 148; 266; 471; 529.
— « Ricerche su un nuovo elemento presentante i caratteri radioattivi del torio ». *G. A. Blanc.* 328; 349.
— « Misura del coefficiente di attrito interno dell'aria a basse temperature ». *S. Chella.* 119.
— « Influenza degli orli sulla capacità elettrostatica di un condensatore ». *R. Magini.* 6; 208; 270; 308; 442.
— « Sulla radioattività dei fanghi termali depositati dalle acque degli stabilimenti dei Bagni di Lucca (Toscana) ». *G. Magri.* 14; 111.
— « Sulla radioattività della sorgente di Fiuggi presso Anticoli ». *R. Nasini* e *M. G. Levi.* 307.
— « Dispositivo per lo studio dell'isteresi magnetica sotto l'azione di campi magnetici oscillanti ». *F. Piola.* 698.
— « Variazioni magnetiche prodotte nel ferro colla torsione ». *Id.* e *L. Tieri.* 566.
— « Sul comportamento foto-elettrico dell'Antracene ». *A Pochettino.* 355.
— « Sull'effetto fotoelettrico nell'Antracene ». *Id.* 698.
— « Sul modo di comportarsi del selenio

rispetto alle correnti alternanti ». *Id.* e *G. C. Trabacchi.* 698.

Fisica. « Su alcuni casi, apparentemente paradossali, di trasmissione dell'elettricità attraverso un gas ». *A. Righi.* 610; 665.

— « Perfezionamenti allo spettroelioscopio ». *A. Sauve.* 168.

— « Modificazione del detector magnetoelastico del Sella ». *L. Tieri.* 164.

— « Ricerche sperimentali sulla resistenza dei solenoidi alle correnti d'alta frequenza ». *A. Battelli.* 698.

Fisica matematica. « Alcune applicazioni dell'integrale di Fourier ». *L. Orlando.* 205.

Fisica tecnologica. « Circa alle influenze della temperatura, delle vibrazioni, della umidità, dell'elettrolisi, e dell'untuosità, sull'adesione e sull'attrito nello sfregamento fra varî corpi, e sul lavoro di alcuni aratri; riassunto di appunti sperimentali ». *A. Pacinotti.* 82.

Fisica terrestre. « Risultati pireliometrici ottenuti dal 22 agosto 1902 a tutto giugno 1903 al R. Osservatorio Geofisico di Modena ». *C. Chistoni.* 19; 126.

— « Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1902 e nell'estate del 1903 ». *Id.* 133; 208.

— « Misure pireliometriche eseguite sul Monte Cimone nell'estate del 1904 e nell'estate del 1905 ». *Id.* 214; 276.

— « Sulla misura della velocità di propagazione delle perturbazioni sismiche in rapporto alla sismometria razionale ». *V. Monti.* 15.

— « Sulla probabile origine della distribuzione di temporali italiani a seconda delle stagioni ». *Id.* 173.

— « Sull'interpretazione matematica dei sismogrammi ». *Id.* 217.

— « Contributo allo studio del pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström ». *E. Teglio.* 176; 214.

Fisiologia. « Sulla fisiologia della respirazione. I. Osservazioni su di un caso di fistola bronchiale nell'uomo ». *V. Ducceschi.* 186; 223.

Fisiologia. « L'azione dei gas compressi sulla vita dei microrganismi e sui fermenti ». *C. Foà*; 730.

— « Sul maccanismo respiratorio dei pesci ossei » *T. Kuiper.* 385.

— Sul riflesso orbicolare delle palpebre nel pescecane (Scyllium) » *G. van Rynberk* ». 53.

Fisiologia vegetale. « Influenza dei colloidi su la secrezione e l'azione dell'invertasi ». *E. Pantanelli.* 377.

— « Proinvertasi e reversibilità dell'invertasi nei Mucor ». *Id.* 587.

G

Geologia. « La Rovina delle Rocche di s. Pietro a Porto Venere ». *G. Capellini.* 3.

— « Delle sabbie fossilifere di Malagrotta sulla via Aurelia ». *E. Clerici.* 133.

— Sull'esistenza dell'Eocene nella penisola salentina ». *G. Di Stefano.* 344; 423.

Geologia. « Nuovi studi sul Mesozoico Montenegrino ». *A. Martelli.* 176.

— « Alcune osservazioni geologiche sul Vulcano Laziale e specialmente sul Monte Cavo ». *P. Moderni.* 462.

— « Fossili turoniani della Tripolitania ». *C. F. Parona.* 160.

— « Studio microscopico di alcune rocce della Liguria occidentale ». *A. Rosati.* 645; 724.

— « A proposito della esistenza del Culm nelle Alpi Carniche ». *P. Vinassa de Regny.* 647.

M

Matematica. « Sul principio dei lavori virtuali in rapporto all'attrito ». *E. Almansi.* 490; 539.

— « Condizioni di esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali ». *C. Arzelà.* 417.

— « Sulle equazioni a derivate parziali ». *Id.* 670.

— « Sopra una ricerca di limite ». *E. Bortolotti.* 490; 545.

MATEMATICA. « Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insiemi lineari ». *Id.* 490; 684.
— « Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica ». *G. Castelnuovo.* 337.
— « Sur les fonctions dérivées ». *H. Lebesgue.* 629.
— « Théorie et construction de tables permettant de trouver rapidement les facteurs premiers d'un nombre ». *E. Lebon.* 349; 439.
— « Ricerche sulle funzioni derivate ». *B. Levi.* 433; 490; 551; 674.
— « Sur le développement en fraction continue de la fonction Q. de M. Prym ». *N. Nielsen.* 6; 98.
— « Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions cylindriques ». *Id.* 349; 490.
— « Sull'integrazione di una notevole equazione differenziale a derivate parziali ». *L. Orlando.* 266.
— « Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni ». *M. Pannelli.* 483.
— « Sopra gl'invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali ». *Id.* 619.
— « Sui simboli di Riemann nel Calcolo differenziale assoluto ». *E. Pascal.* 610; 670.
— « Sulle differenze finite » *G. Peano.* 5; 71.
— « Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date ». *S. Pincherle.* 603.
— « Nuovi studî sulle distorsioni dei solidi elastici ». *V. Volterra.* 519.
— « Sull'applicazione del metodo delle immagini alle equazioni del tipo iperbolico » *Id.* 670.
MECCANICA. « Sulla deformazione di un ellissoide elastico ». *T. Boggio.* 104.
— « Sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi ». *G. Lauricella.* 349; 426.
— « Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sulla integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti ». *Id.* 490; 610.
MECCANICA. « Sul problema derivato di Dirichlet, sul problema dell'elettrostatica e sull'integrazione delle equazioni dell'elasticità ». *Id.* 619.
— « Sugl'integrali delle equazioni dell'elettrodinamica ». *R. Marcolongo.* 308; 344.
— « Sul problema dei due corpi nell'ipotesi di un potenziale newtoniano ritardato ». *G. Pavanini.* 164; 197.
METEOROLOGIA. « La pioggia a Roma » *F. Eredia.* 363; 450.
MINERALOGIA. « Sulla scheelite di Traversella ». *L. Colomba.* 281.
— « Sopra alcuni minerali di Val d'Aosta ». *F. Millosevich.* 317.
— « Appunti di mineralogia sarda. Bournonite del Sarrabus ». *Id.* 363; 457.
— « Su alcuni minerali del granito di S. Fedelino (Lago di Como) ». *E. Repossi.* 505.
— « Sulla costituzione della titanite ». *F. Zambonini.* 291.
— « Appunti sulla scheelite di Traversella ». *Id.* 505; 558.

N

Necrologie e Commemorazioni dei Soci: *Scarabelli Gommi-Flamini.* 186; 246; *Moriggia.* 186; *Langley.* 301; 398.

P

Pieghi suggellati inviati: dal sig. *Mataloni.* 68; dal sig. *Gregory.* 187; dai dottori *Blanc* e *Angelucci.* 302; dal dott. *Munaron.* 732.
PATOLOGIA. « Saggio di ricerche batteriologiche sulla pellagra ». *G. Tizzoni* e *G. Fasoli.* (V. *Errata-corrige*).
PATOLOGIA VEGETALE. « Ricerche intorno al modo di caratterizzare le alterazioni prodotte alle piante coltivate dalle emanazioni gassose degli stabilimenti industriali ». *U. Brizi.* 186; 232.

PATOLOGIA VEGETALE. « Morìa di piantoni di gelsi cagionata da Gibberella moricola (De Not.) Sacc. ». *V. Peglion.* 62.

— « Intorno alla peronospora della canapa ». *Id.* 594.

PATOLOGIA VEGETALE. « Nuove ricerche sopra i batteri della Mosca olearia ». *L. Petri.* 238.

— « Sviluppo dell'Ageniaspis fuscicollis (Dalm.) Thoms. (Chalcididae ». *F. Silvestri.* 650.

ERRATA-CORRIGE

A pag. 75, lin. 6 a. f. la formula $\frac{p}{p_0} = \frac{p}{p_0}$, deve correggersi in $\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0}$.

» 78, » 3, il primo membro della formula $\int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - c^2}}$ deve correggersi in $\int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$

» 249, » 17, invece di *1849* legg. *1839*.

» 261, al titolo della penultima pubblicazione dello Scarabelli, vanno aggiunte le parole: (*in collaborazione col dott. L. Foresti*).

» 286 lin. 4, invece di: valori trovati 73°, 49′-75°, 58′ legg.: 73°, 49′-73°, 58′.

» » » 10, » » valore teorico 59°, 56′ legg.: valore teorico 19°, 56′.

» 287 » 24, » » $c = 1{,}53773$ legg.: $c = 1{,}53798$.

Nella seduta del 1° aprile 1906, deve essere inclusa la presentazione della Memoria del Socio TIZZONI e del dott. FASOLI: « Saggio di ricerche batteriologiche sulla pellagra ».

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XV. (1892-1906). Fasc. 12°. 1° sem.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIV. (1892-1905).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VI. Fasc. 1°-5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Fasc. 1°.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 giugno 1906.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Righi. Su alcuni casi, apparentemente paradossali, di trasmissione dell'elettricità attraverso un gas . . . . . Pag. 665
Volterra. Sull'applicazione del metodo delle immagini alle equazioni del tipo iperbolico (*) » 670
Arzelà. Sulle equazioni a derivate parziali . . . . . » »
Pascal. Sui simboli di Riemann nel Calcolo differenziale assoluto . . . . . » »
Levi. Ricerche sopra le funzioni derivate (pres. dal Socio *Segre*) . . . . . » 674
Bortolotti. Sulle trasformazioni che lasciano invariata la frequenza di insiemi lineari (pres. dal Corrisp. *Cesàro*) . . . . . » 684
Arnò. Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate e di onde hertziane (pres. dal Socio *Colombo*) . » 691
Artom. Sopra un nuovo sistema di telegrafia senza filo (pres. dal Corrisp. *G. Grassi*). . » 692
Piola. Dispositivo per lo studio dell'Isteresi magnetica sotto l'azione di campi magnetici oscillanti (pres. dal Corrisp. *Sella*) (*) . . . . . » 698
Pochettino. Sull'effetto fotoelettrico nell'Antracene (pres. *Id.*) . . . . . » »
Id. e *Trabacchi.* Sul modo di comportarsi del selenio rispetto alle correnti alternanti (pres. *Id.*) . . . . . » »
Battelli. Ricerche sperimentali sulla resistenza dei solenoidi alle correnti d'alta frequenza (*) » »
Carrasco e *Padoa.* Sulla formazione e scomposizione del nucleo indolico per mezzo dell'azione catalitica del nickel (pres. dal Socio *Ciamician*) . . . . . » 699
Manuelli. Azione dello zolfo sulle soluzioni dei sali metallici (pres. *Id.*) . . . . . » 703
Mazzara e *Borgo.* Azione del cloruro di solforile sul pirazolo (pres. dal Socio *Paternò*) . » 704
Pellini. Contributo allo studio dell'isomorfismo fra il tellurio ed il selenio (pres. dal Corrisp. *Nasini*) . . . . . » 711
Ranfaldi. Studio cristallografico di alcune nuove sostanze organiche (pres. dal Socio *Strüver*) » 715
Rosati. Studio microscopico di alcune rocce della Liguria occidentale (pres. *Id.*) . . . » 724
Foà. L'azione dei gaz compressi sulla vita dei microorganismi e sui fermenti (pres. dal Socio *Mosso*) (*) . . . . . » 730
Gosio. Sulla possibilità di accumulare arsenico nei frutti di talune piante (pres. dal Socio *Pirotta*) . . . . . » »

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Blaserna (Presidente). Presenta tre volumi offerti dal Governo degli Stati Uniti del Messico, e alcune pubblicazioni del prof. *Moissan* e del prof. *Pisani* . . . . . » 732

CORRISPONDENZA

Blaserna (Presidente). Presenta un piego suggellato, inviato dal dott. *Munaron*, perchè sia conservato negli Archivi accademici . . . . . » »
BULLETTINO BIBLIOGRAFICO . . . . . » »
Indice del vol XV, 1° semestre 1906 . . . . . » 733

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

526

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01356 8803